Государственное Образовательное Учреждение
Лицей №1523

ЮАО г.Москва

Лекции по геометрии

10 класс

© **Хомутова Лариса Юрьевна**

© **Крайко Мария Александровна**

Лекция №1

Аксиомы стереометрии и следствия из них

1. Аксиомы стереометрии

Стереометрия - это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве

В планиметрии основными фигурами являются точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается еще одна основная фигура - **плоскость**.

Наряду с этими фигурами будем рассматривать геометрические тела и их поверхности.

Плоскость - геометрическая фигура простирающаяся неограниченно во все стороны.

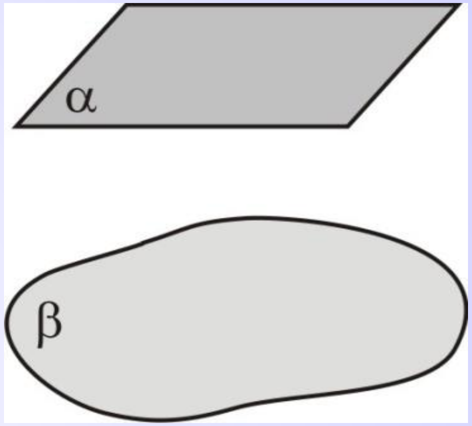
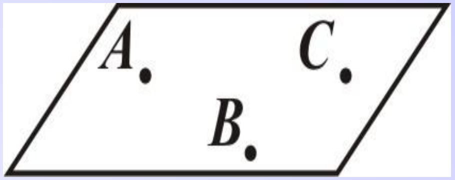


Рисунок 1

На чертеже плоскости чаще всего изображаются параллелограммами и обозначаются греческими буквами; иногда плоскости изображаются другими плоскими фигурами (на рисунке 1 представлены возможные изображения плоскостей).

Замечание: В каждой плоскости пространства выполняются не только все аксиомы планиметрии, но также и все остальные факты, доказанные в курсе 7-9 классов.

<u>A1:</u> Через любые три не лежащие на одной прямой точки можно провести единственную плоскость (рисунок 2).

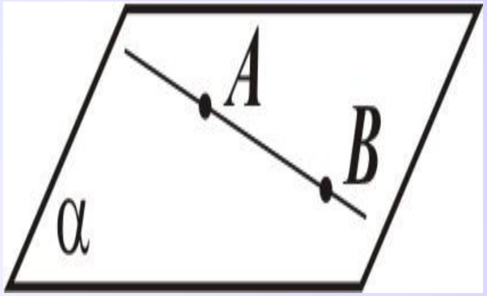


<u>Рисунок 2</u>

Задание плоскости тремя точками породило обозначение плоскости тремя точками (к примеру, на рисунке 2 изображена плоскость (*ABC*)).

<u>А2:</u> Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.
(рисунок 3)

$$\left.\begin{aligned} A \in \alpha, \\ B \in \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB \subset \alpha$$



<u>Рисунок 3</u>

Замечание : Из аксиомы А2 следует, что если прямая и плоскость имеют 2 общие точки, то эта прямая лежит в плоскости, т.е. имеет с ней бесконечное число общих точек.

Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то говорят, что ***прямая параллельна плоскости*** (на рисунке 4 $a \parallel \alpha$).

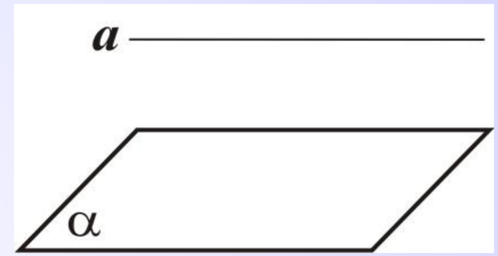


Рисунок 4

Если прямая и плоскость имеют ровно одну общую точку, то говорят, что ***прямая пересекает*** эту ***плоскость*** (на рисунке 5 $a \cap \alpha = A$).

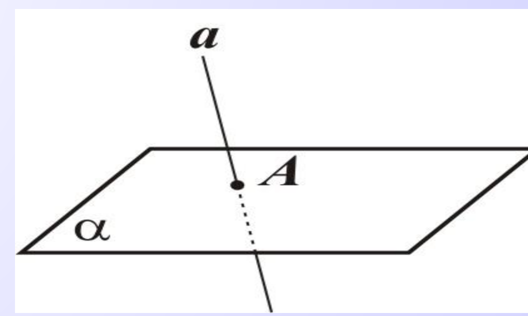


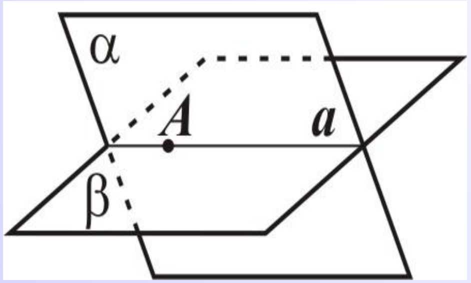
Рисунок 5

К примеру, всякая прямая, лежащая в плоскости пола стандартной комнаты, параллельна плоскости потолка этой же комнаты, поскольку они не имеют общих точек.

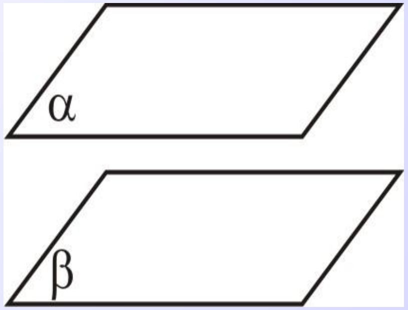
<u>А3:</u> Если две несовпадающие плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, содержащей эту точку.

Аксиома А3 фактически утверждает, что
-две плоскости либо совпадают,
- либо пересекаются по прямой (на рисунке 6 $\alpha \cap \beta = a$),
- либо вовсе не имеют общих точек.

Две ***плоскости***, не имеющие общих точек, называются ***параллельными*** (на рисунке 7 $\alpha \parallel \beta$).



<u>Рисунок 6</u>



<u>Рисунок 7</u>

2. Следствия из аксиомы стереометрии

Теорема о задании плоскости прямой и не лежащей на ней точкой:
Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.

Дано:
a, т.*A* $\notin a$.
Доказать:
$\exists\,!\alpha$: $A \in \alpha$,
$a \subset \alpha$.

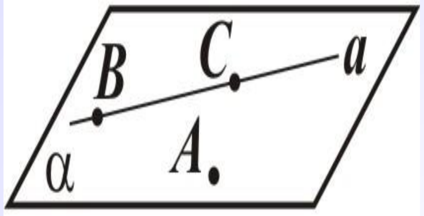


Рисунок 8

Доказательство:
∃ : Возьмем $\forall$ т. B, $C \subset a$ (рисунок 8) и проведем через 3 неколлинеарные точки A, B и C плоскость α (это можно сделать в соответствии с аксиомой А1). Докажем, что α – искомая плоскость: т. B и т. C лежат в плоскости α , то по аксиоме А2 плоскость α проходит через прямую a.

!: Допустим, что помимо плоскости α существует плоскость β, содержащая точку A и прямую a. B, $C \subset a \subset \beta$, $\Rightarrow$ плоскость β содержит точки A, B и C. Таким образом, через 3 неколлинеарные точки A, B и C проходят сразу 2 плоскости α и β, что противоречит аксиоме А1. А значит, плоскость α – единственная. #

Доказанная только что теорема утверждает, что плоскость задается прямой и не лежащей на ней точкой. В связи с этим используется следующее обозначение плоскости, проходящей через прямую a и не лежащую на ней точку A: плоскость $(a; A)$.

Теорема о задании плоскости двумя пересекающимися прямыми: Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Дано:
$a \cap b = !\, A$.

Доказать:
$\exists\, !\alpha$: a, $b \subset \alpha$.

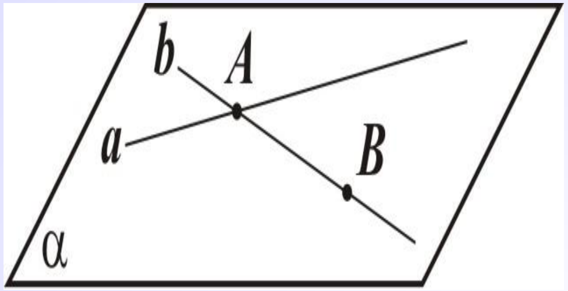
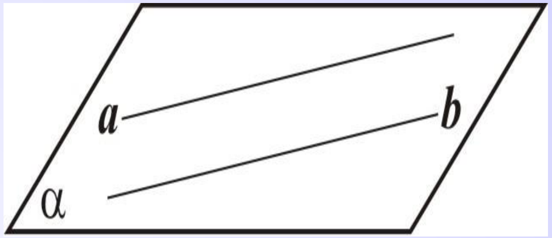


Рисунок 9

Доказательство:
∃ : Возьмем на прямой b $\forall$ т. B, отличную от A (рисунок 9), и проведем через прямую a и точку $B \notin a$ плоскость α (это можно сделать в соответствии с теоремой о задании плоскости прямой и не лежащей на ней точкой). Докажем, что α – искомая плоскость: точки A и B, принадлежат прямой b, следовательно по А2 прямая $b \subset \alpha$.

!: Допустим, что помимо плоскости α существует плоскость β, содержащая прямые a и b. $B \in b \subset \beta$, $\Rightarrow$ плоскость β содержит прямую a и точку B. Таким образом, через прямую a и не лежащую на ней точку B проходят сразу 2 плоскости α и β, что противоречит теореме о задании плоскости прямой и не лежащей на ней точкой. Следовательно, плоскость α – единственная.

Две ***прямые*** в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (на рисунке 10 $a \parallel b$).



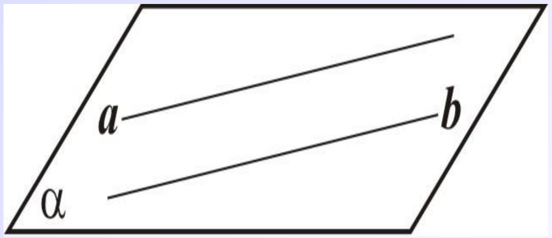
Рисунок

Замечание : Требование принадлежности параллельных прямых одной плоскости является существенным: Из того, что прямые не пересекаются, не вытекает их параллельность. К примеру, если рассмотреть две прямые, одна из которых лежит в плоскости пола, а вторая – в плоскости потолка стандартной комнаты, то, не имея общих точек, они далеко не всегда будут параллельными, поскольку не всегда будут лежать в одной плоскости. Позже будет показано, что такие прямые называются скрещивающимися.

Теорема о задании плоскости двумя параллельными прямыми:
Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

Дано:
$a \parallel b$.

Доказать:
$\exists\, !\alpha$: a, $b \subset \alpha$.



Рисунок

Доказательство:

$\exists$: По условию $a \parallel b$, $\Rightarrow$ по определению параллельных прямых существует плоскость α, содержащая каждую из прямых a и b (рисунок 10).

!: Допустим, что помимо плоскости α существует плоскость β, содержащая прямые a и b. Но тогда плоскости α и β пересекаются сразу по двум общим прямые a и b, что противоречит аксиоме А3. Следовательно, плоскость α – единственная.