Тема уроку:

Похідна. Фізичний і геометричний зміст похідної.

Похідна та диференційованість функції

Функція f має в точці x похідну:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Фізичний зміст похідної:

$$\upsilon(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$$

Геометричний зміст похідної:

$$k=tg\lambda=f'(x_0)$$

Функція f диференційована в точці x:

$$\Delta f(x)=A(x)\Delta x+a(x;\Delta x)\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}a(x;\Delta x)=0,\ A(x)\in R$$

Функція f неперервна в точці x

Арифметичні операції над диференційованими функціями u і v:

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\quad (uv)'=u'v+uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Похідна складеної функції y=f(u), u=ф(x):

$$y_x'=y_u'\cdot u_x'$$

Похідна оберненої функції x=ф(y):

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

Таблиця похідних

Похідні вищого порядку:

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))',\ n=2,3...$$

Фізичний зміст похідної

І.Ньютон сформулював дві основні проблеми математичного аналізу:

1). ***Довжина шляху, який долається, є постійною(тобто в будь-який момент часу); необхідно знайти швидкість руху у пропонований час;***

2). ***Швидкість руху постійно дана; необхідно знайти довжину пройденого у запропонований час шляху.***

1). Задача про миттєву швидкість:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$$

$$V(t) = S'(t)$$

2). Задача про знаходження змінного струму, який проходить по провіднику:

$$J(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = g'(t)$$

3). Друга похідна:

$$v(t) = S'(t)$$

$$a(t) = v'(t)$$

$$a(t) = S''(t)$$

4). Приклад:

$$S(t) = \frac{at^2}{2}$$

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t) = at$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V(t)}{\Delta t} = V'(t) = S''(t)$$

Висновок:

$$s'(t) = v(t) \Rightarrow v'(t) = a(t) \Rightarrow a(t) = s''(t)$$

Використання похідної в фізиці.

”Збірник конкурсних задач“
під редакцією М.І.Сканаві.

Задача 15.120.

Тіло масою m_0 рухається прямолінійно за законом

$S(t) = \alpha t_2 + \beta t + \lambda$

α, β, λ –сталі

Довести, що сила яка діє на тіло стала

Доведення:

$F=m_0a$

$a(t)=V'(t)=S''(t);$

$S'(t)=(\alpha t^2+ \beta t+ \lambda)'=2\alpha t+\beta;$

$a(t)=S''(t)=(2\alpha t+ \beta)'=2\alpha;$

$a(t)=2\alpha,$

$\alpha=const;$

Висновок

Сила, що діє на тіло – стала.

Задача 15.121

Тіло масою m_0 рухається прямолінійно за законом $S(t)=\dfrac{2}{2t-1}$

Довести, що сила, яка діє на тіло, пропорційна кубу пройденого шляху.

Доведення

$F=m_0a$; $$a(t)=\mathcal{V}'(t)=\mathcal{S}''(t)$$

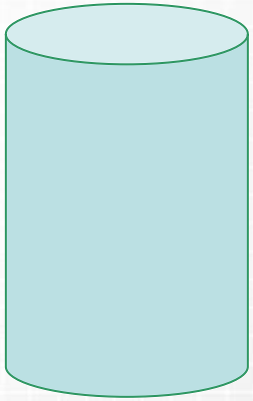
$$\mathcal{S}'(t)=\left(\frac{2}{2t-1}\right)'=-\frac{4}{(2t-1)^2}$$

$$a(t)=\mathcal{S}''(t)=\left(-\frac{4}{(2t-1)^2}\right)'=\frac{16}{(2t-1)^3}$$

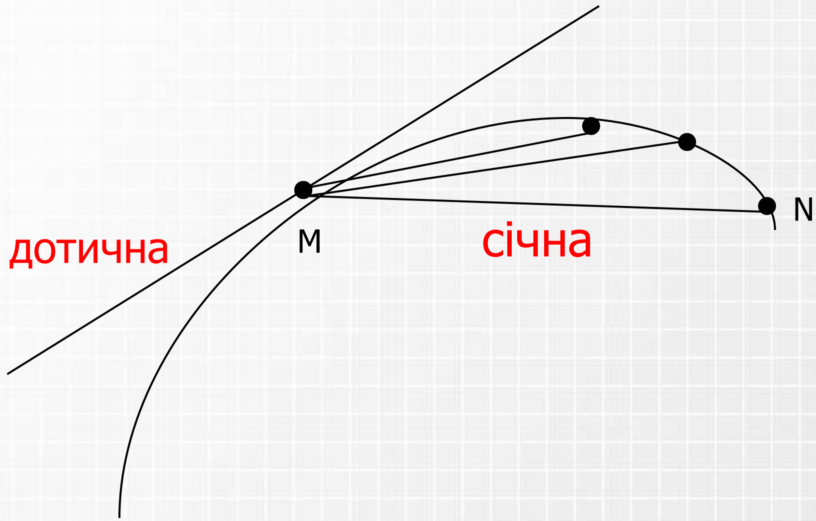
$$a(t)=2\left(\frac{2}{2t-1}\right)^3=2\big(\mathcal{S}(t)\big)^3$$

Висновок:

Сила, що діє на тіло, пропорційна кубу пройденого шляху.



Геометричний зміст похідної



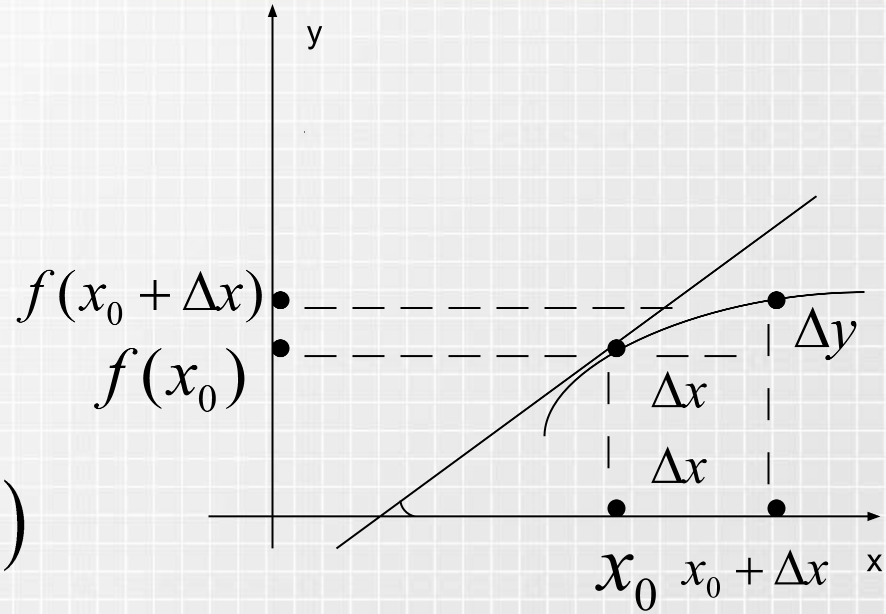
Дотичною до кривої в даній точці M, називається ***граничне положення січної*** **MN, коли точка N прямує вздовж кривої до точкиM.**

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

k-кутовий коефіцієнт

$$k = tg\alpha = f'(x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

$$\alpha = \begin{cases} arctgk, \text{ якщо } k \geq 0 \\ \pi - arctgk, \text{ якщо } k < 0 \end{cases}$$

Застосування

геометричного змісту похідної

Завдання з ЗНО

1) Обчисліть $f'(1)$, якщо кут між дотичною проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$ і додатнім напрямом осі ОХ, дорівнює 30^0.

Розв'язання

$$f'(1) = tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) До графіка функції $y = -0,5x^2$ проведено дотичну у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Обчисліть тангенс кута нахилу дотичної до додатнього напрямку осі абсциса.

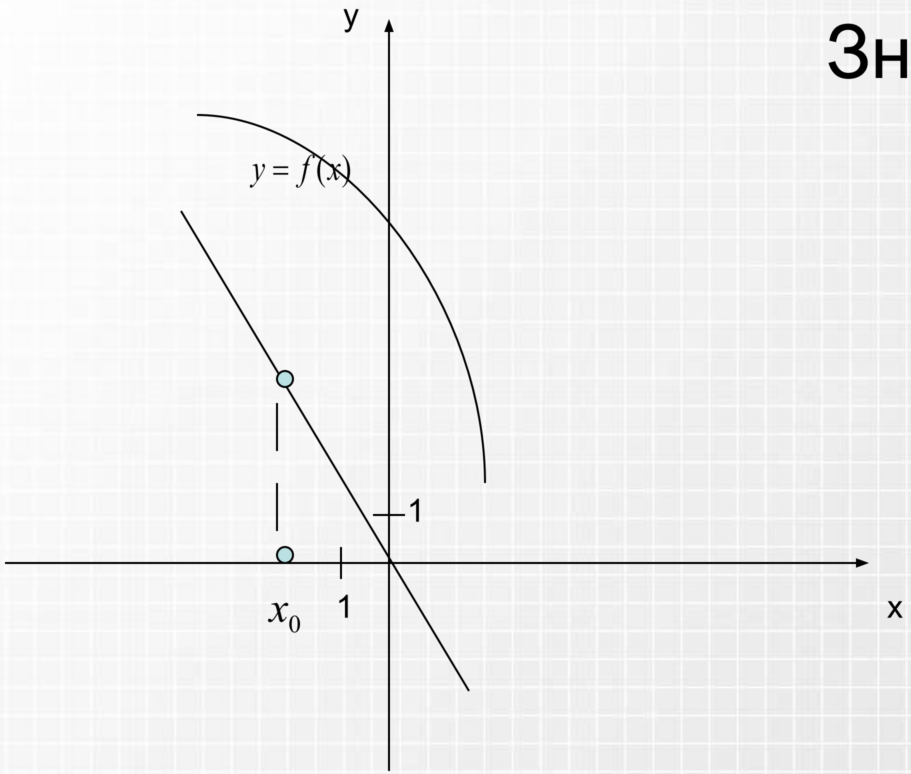
Розв'язання

$$f'(3) = -3;$$

$$f'(x_0) = tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = -3.$$

3) На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0

Знайти значення $f'(x_0)$



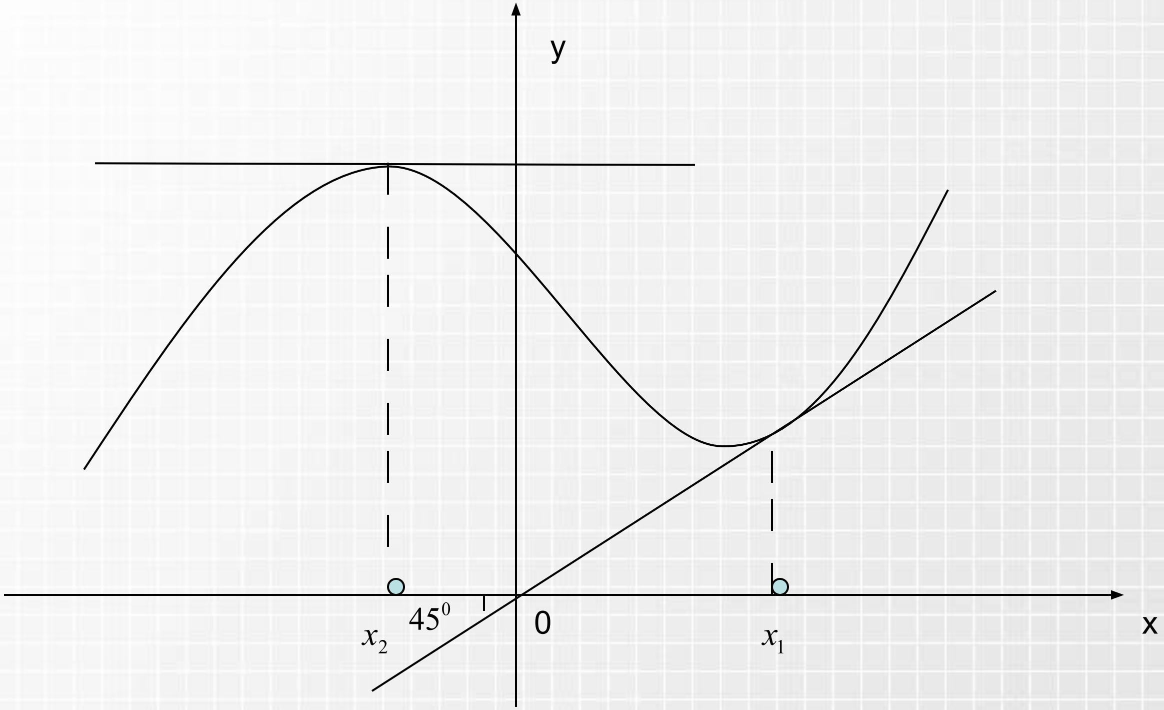
Розв'язання

$$f'(x_0) = tg\alpha,$$

$$\alpha = 135^0,$$

$$-tg45^0 = -1.$$

4) На малюнку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$.



Розв’язання

$$f'(x_1) = tg45^0 = 1;$$

$$f'(x_2) = tg0^0 = 0;$$

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 1$$

5) Знайдіть, при яких значеннях параметра а дотична до графіка функції $y = x^3 + ax^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$ проходить через точку N(3;4).

Розв’язання

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

$$f(x_0) = -1 + a;$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax;$$

$$f'(-1) = 3 - 2a;$$

$$y = -1 + a + (3 - 2a)(x + 1)$$

$$y = (3 - 2a)x - a + 2,$$

$$m.N \in y \Rightarrow 4 = (3 - 2a)3 - a + 2,$$

$$a = 1.$$

Умова паралельності прямих

$$\begin{cases} y_1=k_1x+b_1, \\ y_2=k_2x+b_2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad k_1=k_2, \quad \Leftrightarrow \quad y_1 \parallel y_2$$

Умова перпендикулярності прямих

$$\begin{cases} y_1 = k_1 x + b_1, \\ y_2 = k_2 x + b_2, \end{cases} \iff k_1 \cdot k_2 = -1, \iff y_1 \perp y_2$$

Задача 1

На параболі y= 4- X вибрано дві точки з абсцисами x= -1 і x=3. Через ці точки проведено січну. Знайти рівняння дотичної до параболи, яка *паралельна* січній.

Розв'язання

1) $y = kx + b$ – рівняння січної

Дана січна проходить через точки :

(-1;3), (3;-5)

Складаємо рівняння січної:

$$\begin{cases} 3 = -k + b; \\ -5 = 3k + b; \end{cases}$$

$8 = -4k$,

$k = -2$, то $b = 1$

$y = -2x + 1$ – рівняння січної

2) $y=f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ – рівняння дотичної

$f(x_0)=4 - x_0^2$;

$f'(x_0)= -2x_0$;

$y =4- x_0^2 - 2x_0(x-x_0)$,

$y = -2x_0x +x_0^2 + 4$,

3) $y_1=kx+b_1$, $y_2=k_2x+b_2$,

$k_1=k_2 \iff y_1 \parallel y_2$

4) За умовою паралельності прямих, маємо :

$$-2x_0 = -2$$

$$x_0 = 1.$$

Отже, $y = -2x-3$ - шукане рівняння дотичної.

Задача 2

Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x)= -x^2+4$, яка перпендикулярна до прямої $x-2y+2=0$.

Розв'язання

$y = f(x_0) + f\,'(x_0)(x - x_0)$,

$f(x_0) = -x_0^2 + 4$,

$f\,'(x_0) = -2x_0$,

$y = -x_0^2 + 4 - 2x_0(x - x_0)$,

$y = -2x_0x + x_0^2 + 4$ - рівняння дотичної

$y = 0{,}5x + 1$ - рівняння прямої перпендикулярної до дотичної

Умова перпендикулярності прямих

$y_1 = k_1 x + b_1$ і $y_2 = k_2 + b_2$

$k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow y_1 \perp y_2$

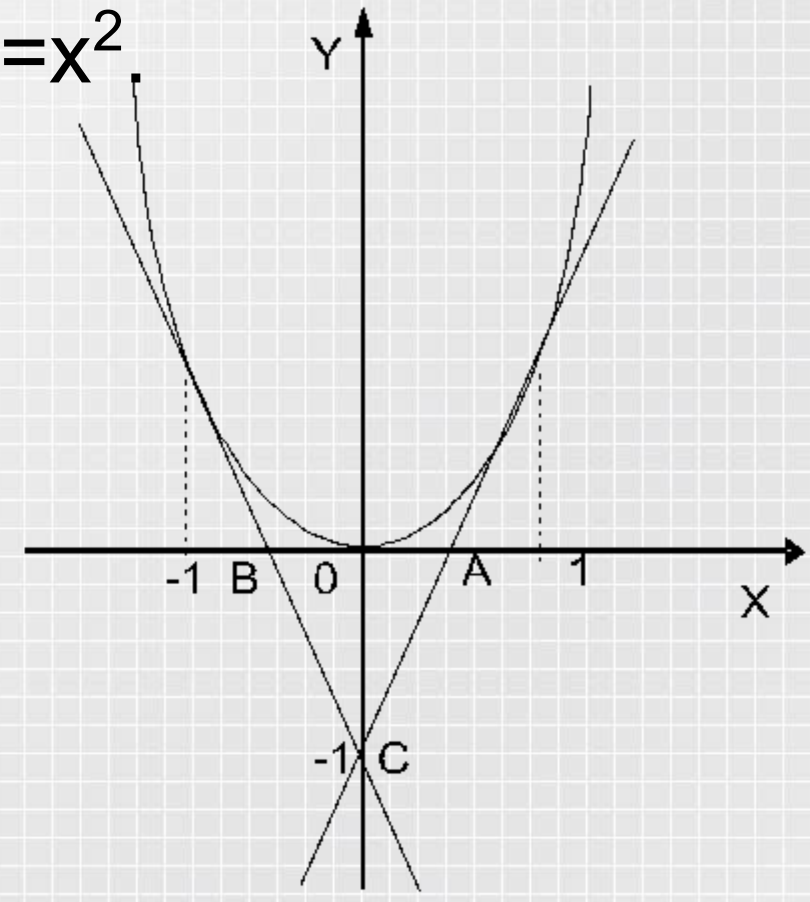
За умовою перпендикулярності прямих маємо :

якщо $k_1= -2x_0$, $k_2=0,5$,то $-2x_0 \cdot 0,5= -1$,$x_0=1$.

Отже, y= -2x+5 - шукане рівняння дотичної

Задача 3

Знайти величину кута між двома дотичними проведеними з точки (0;-1) до графіка функції $y=x^2$.



Задача 4

Знайти площу трикутника, утвореного бісектрисами координатних кутів і дотичної до кривої y= в точці M(3;2)