Микроэкономика уровень II (упрощенный)

Практика (4 часа)
Преподаватель:
к.э.н., доцент Павлова Елена Евгеньевна

Выбор и поведение потребителя

Задача №1

Функция полезности индивида имеет вид $U(X, Y) = X\,Y$.

а) Какое количество товаров *X* и *Y* будет приобретать индивид, если его доход равен 100 ден. ед., цены товаров *X* и *Y* соответственно равны $P_X = 5$ ден. ед., $P_Y = 5$ ден. ед.?

б) Найдите количество товаров *X* и *Y* при приобретении которых, максимизируется полезность индивида, если цена товара *X* возрастет до 20 ден. ед.

в)* Определите величину эффекта замены и эффекта дохода по Хиксу и по Слуцкому, общего эффекта изменения цены.

г)* Определить компенсирующее и эквивалентное изменение дохода.

д) Вывести функцию спроса на благо Х.

г) Определить коэффициенты прямой эластичности спроса по цене.

Все этапы решения представить графически.

а) Дано: $U(X, Y) = X Y$, $I=100$, $P_X = 5$, $P_Y = 5$
Найти: X_1, Y_1

Решение:

Оптимум потребителя:
$$MRS_{XY} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \times \frac{\Delta TU}{\Delta TU} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Бюджетное ограничение:
$$I = P_X X + P_y Y$$

Оптимальную комбинацию благ (точка E_1) ищем, решая систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 100 = 5X + 5Y \\ \frac{Y}{X} = \frac{5}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_1 = 10; Y_1 = 10$$

Для упрощения расчетов

- Для функции Кобба-Дугласа вида:

$$U = X^{\alpha} Y^{\beta}$$

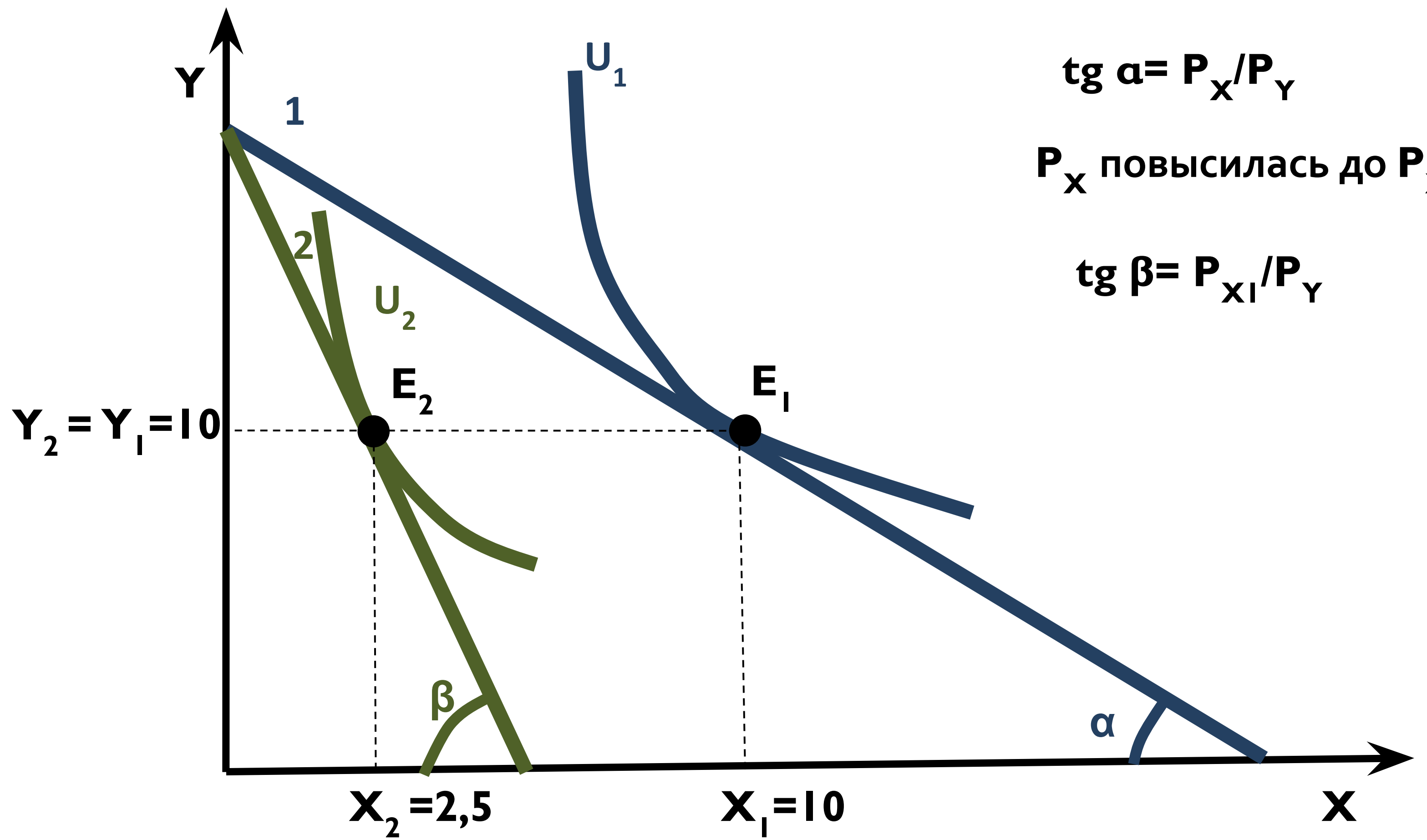
$$\frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{\alpha Y}{\beta X}$$

б) Дано: $U(X, Y) = X\,Y$, $I=100$, $P_X = 20$, $P_Y = 5$
Найти: X_1, Y_1

Оптимальную комбинацию благ при росте цены товара X (точка E_2) ищем, решая систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 100 &= 20X + 5Y \\ \frac{Y}{X} &= \frac{20}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_2 = 2{,}5; Y_2 = 10$$

Изменение оптимума потребителя при росте цены товара X



$tg\ \alpha = P_X / P_Y$

P_X повысилась до P_{X1}

$tg\ \beta = P_{X1} / P_Y$

Общий эффект изменения цены. Эффект замены и эффект дохода по Хиксу

Общий эффект изменения цены по Хиксу составит:

$$\Delta X = X_2 - X_1 = 2{,}5 - 10 = -7{,}5;$$
$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = 10 - 10 = 0$$

При разложении общего эффекта сохраняется первоначальный уровень полезности: $U_1 = XY = 10 \times 10 = 100$.

Т.е. Эффект замены ($E_1 \Rightarrow E_3$):

$$\left.\begin{array}{l} U_1 - const \\ \dfrac{P_X}{P_Y} \rightarrow \dfrac{P_{X1}}{P_Y} \end{array}\right\}$$

Эффект дохода ($E_3 \Rightarrow E_2$):

$$\left.\begin{array}{l} U_1 \rightarrow U_2 \\ \dfrac{P_{X1}}{P_Y} - const \end{array}\right\}$$

Общий эффект изменения цены. Эффект замены и эффект дохода по Хиксу

Точка E_3:

$$\left.\begin{aligned} U_1 = XY = 100 - const \\ MRS_{XY} = \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} XY = 100 \\ \frac{Y}{X} = \frac{20}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_3 = 5; Y_3 = 20$$

Следовательно, *эффект замены*:

$$\Delta X = X_3 - X_1 = 5 - 10 = -5;$$

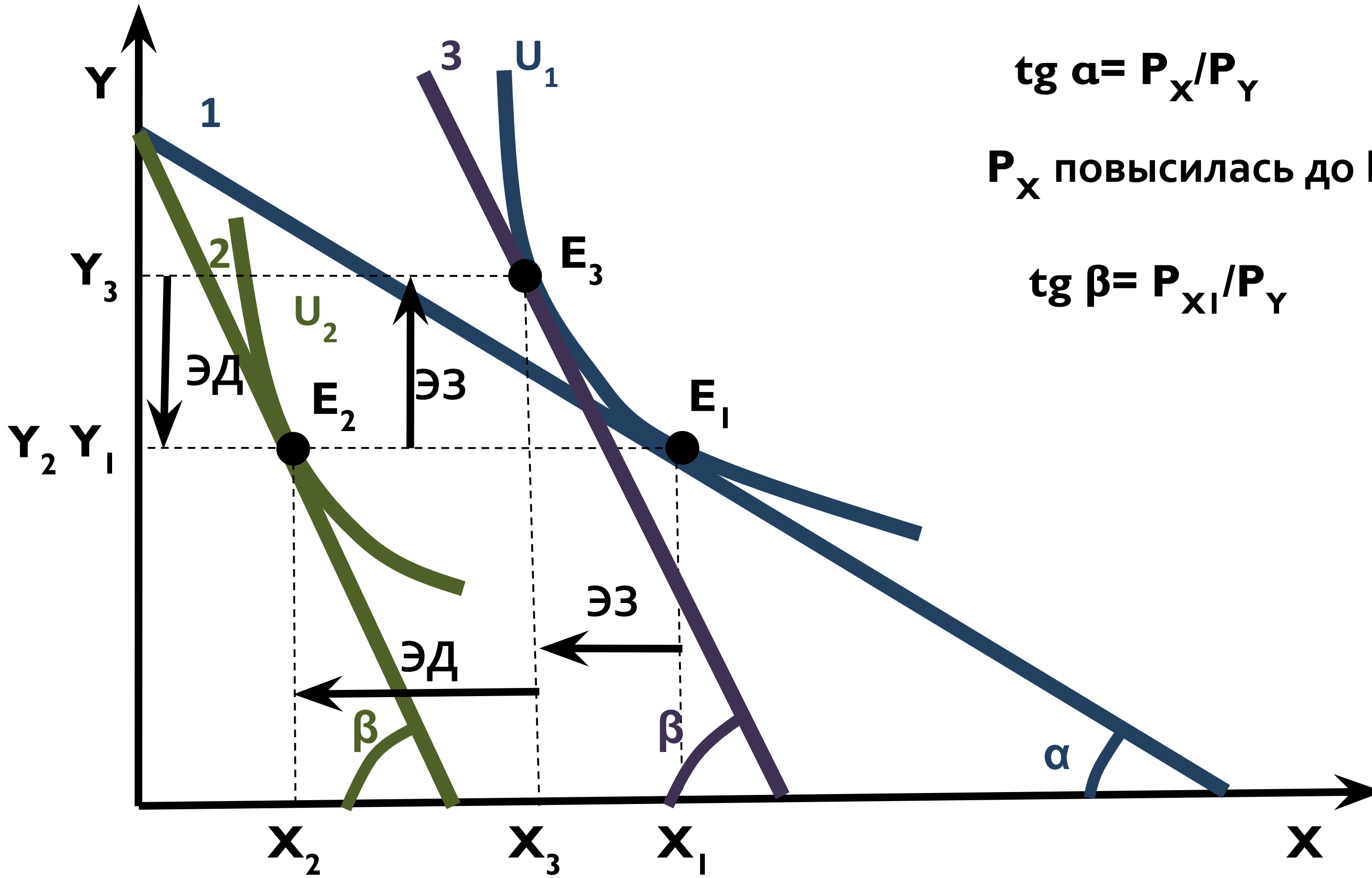
$$\Delta Y = Y_3 - Y_1 = 20 - 10 = 10,$$

***эффект дохода*:**

$$\Delta X = X_2 - X_3 = 2{,}5 - 5 = -2{,}5;$$

$$\Delta Y = Y_2 - Y_3 = 10 - 20 = -10.$$

Общий эффект изменения цены. Эффект замены и эффект дохода по Хиксу



$tg\ \alpha = P_X/P_Y$

P_X повысилась до P_{X1}

$tg\ \beta = P_{X1}/P_Y$

Общий эффект изменения цены. Эффект замены и эффект дохода по Слуцкому

- Общий эффект по Слуцкому тот же самый
- После изменения цены товара уровень удовлетворения потребителя останется прежним, если он будет иметь возможность купить первоначальный товарный набор. **Для этого ему потребуется:**

$$I = P_xX + P_yY = 20\times10+5\times10 = 250 \text{ ден.ед.}$$

Общий эффект изменения цены. Эффект замены и эффект дохода по Слуцкому

Точка E_3:

$$\left.\begin{aligned} 250 = 20X + 5Y \\ \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{20}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow X_3 = 6{,}25; Y_3 = 25$$

Следовательно, *эффект замены*:

$$\Delta X = X_3 - X_1 = 6{,}25 - 10 = -3{,}75;$$

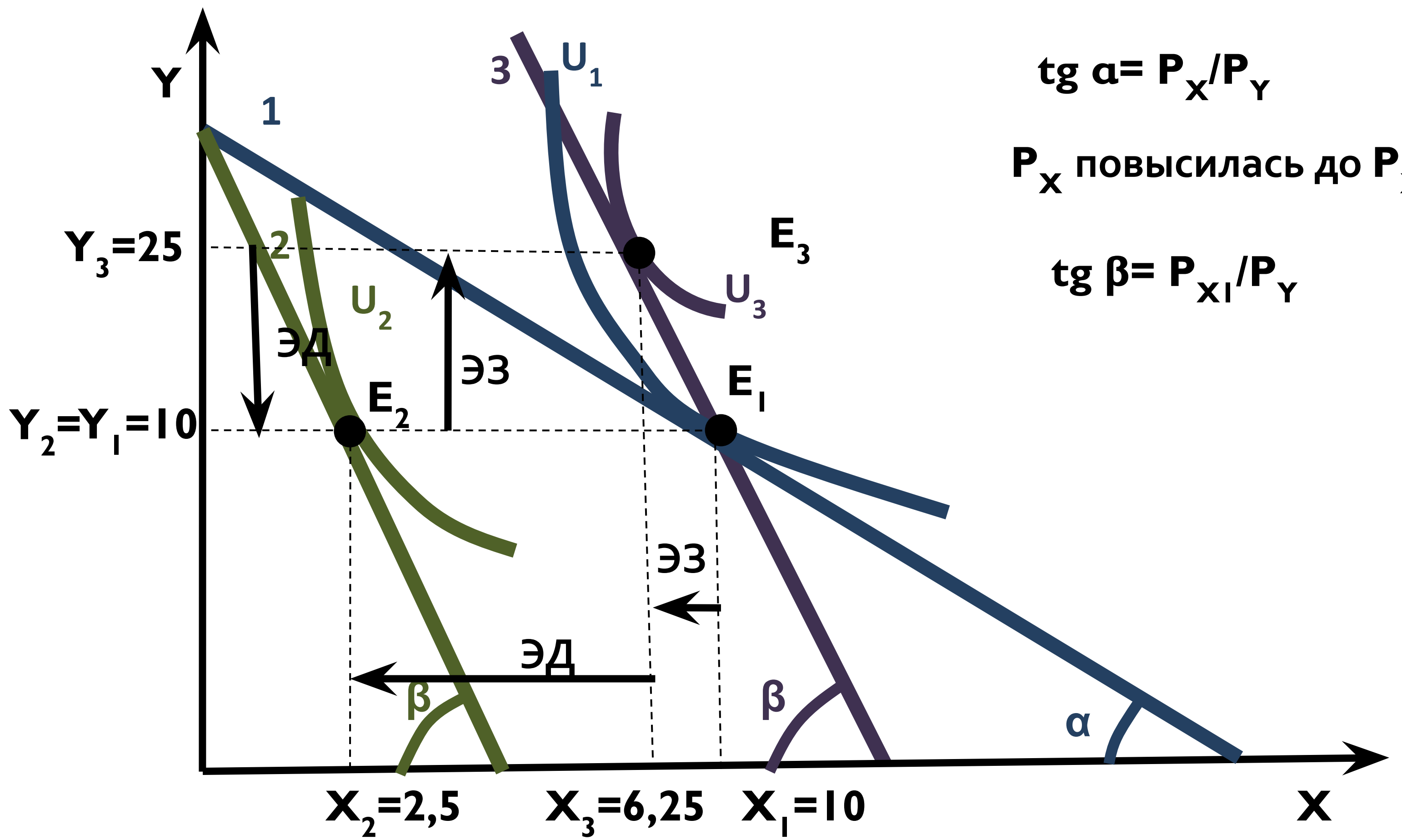
$$\Delta Y = Y_3 - Y_1 = 25 - 10 = 15,$$

***эффект дохода*:**

$$\Delta X = X_2 - X_3 = 2{,}5 - 6{,}25 = -3{,}75;$$

$$\Delta Y = Y_2 - Y_3 = 10 - 25 = -15.$$

Общий эффект изменения цены. Эффект замены и эффект дохода по Слуцкому



$tg\ \alpha = P_X/P_Y$

P_X повысилась до P_{X1}

$tg\ \beta = P_{X1}/P_Y$

Компенсирующее изменение дохода

- Для нахождения на первоначальной кривой безразличия при новой цене блага *X* индивиду нужно иметь бюджет:

$$I = (20 \cdot 5 + 5 \cdot 20) = 200 \text{ ден. ед.}$$

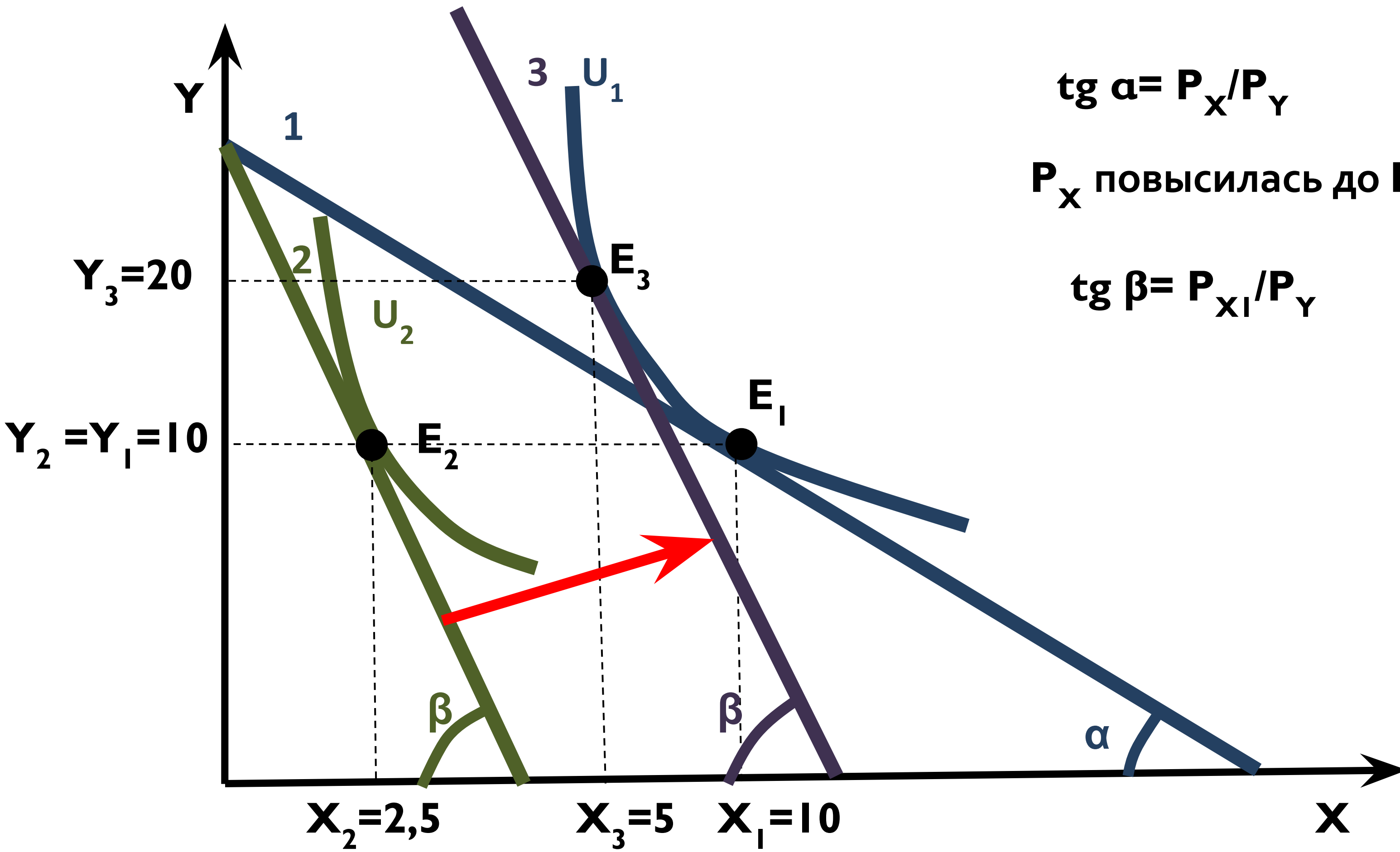
***Компенсирующее изменение дохода по Хиксу* составит: 200 – 100 = 100**

- Для покупки исходной потребительской корзины при новой цене блага *X* индивиду нужно иметь бюджет:

$$I = (20 \cdot 6{,}25 + 5 \cdot 25) = 250 \text{ ден. ед.}$$

***Компенсирующее изменение дохода по Слуцкому* составит: 250 – 100 = 150**

Компенсирующее изменение дохода (модель Хикса)

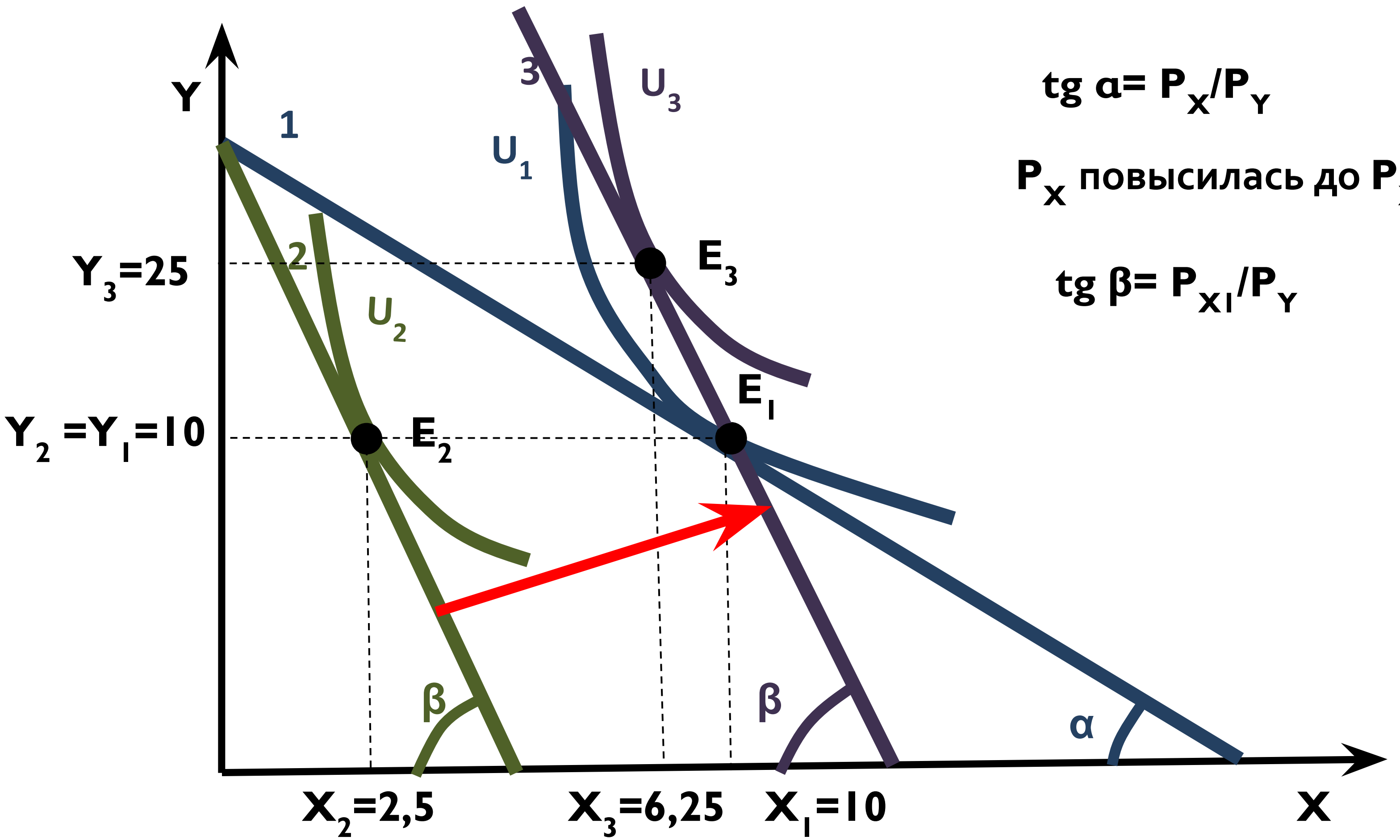


$tg\ \alpha = P_X/P_Y$

P_X повысилась до P_{X1}

$tg\ \beta = P_{X1}/P_Y$

Компенсирующее изменение дохода (модель Слуцкого)



$tg\ \alpha = P_X/P_Y$

P_X повысилась до P_{X1}

$tg\ \beta = P_{X1}/P_Y$

Эквивалентное изменение дохода

Точка E_3:

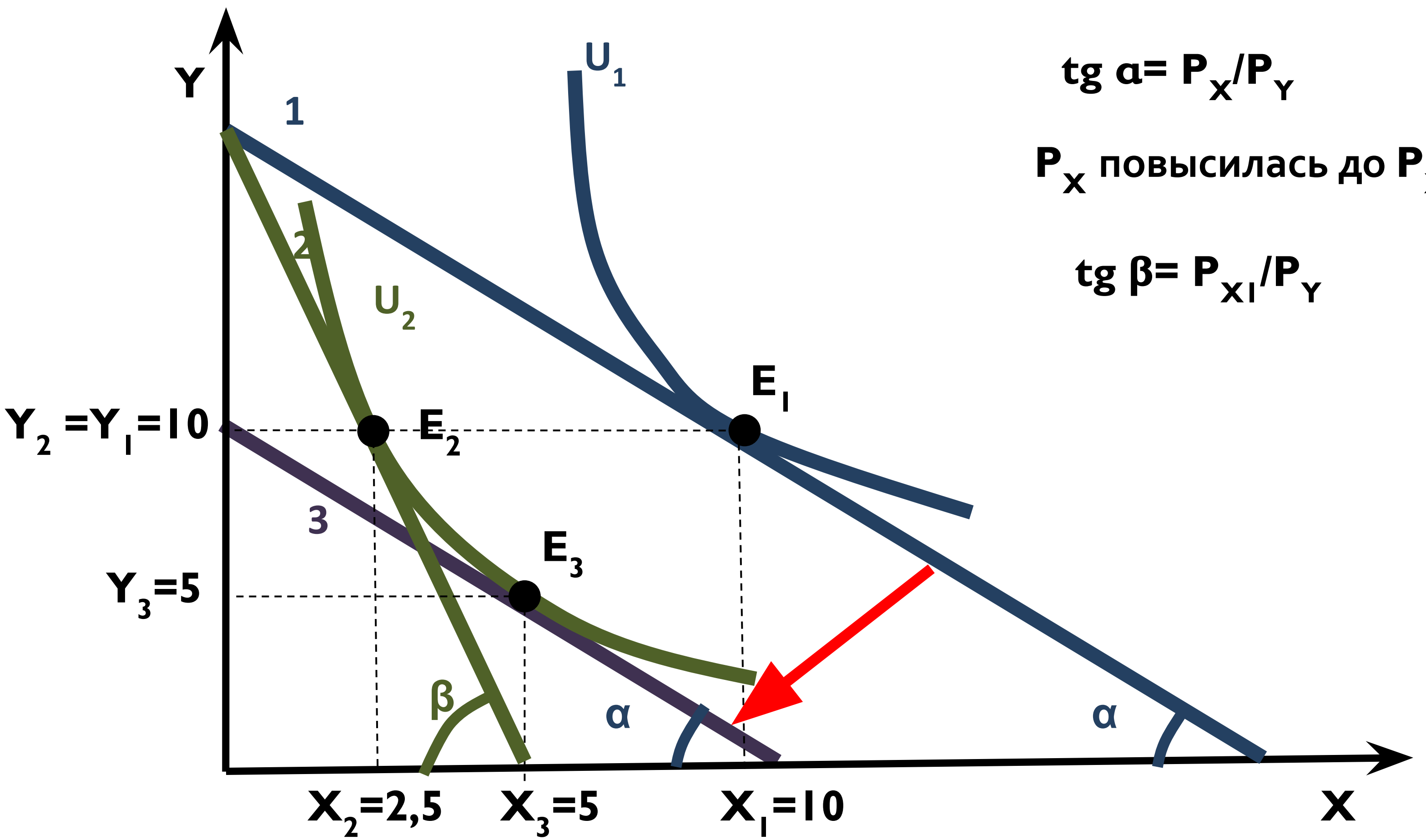
$$\left.\begin{array}{l} U_2 = XY = 2{,}5 \times 10 = 25 \\ \dfrac{MU_X}{MU_Y} = \dfrac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \dfrac{Y}{X} = \dfrac{5}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow X_3 = 5; Y_3 = 5$$

При исходных ценах такой набор благ можно купить при бюджете:

I = 5·5 + 5·5 = 50 ден. ед.

Эквивалентное изменение дохода равно: 100 – 50 = 50.

Эквивалентное изменение дохода



$tg\ \alpha = P_X/P_Y$

P_X повысилась до P_{X1}

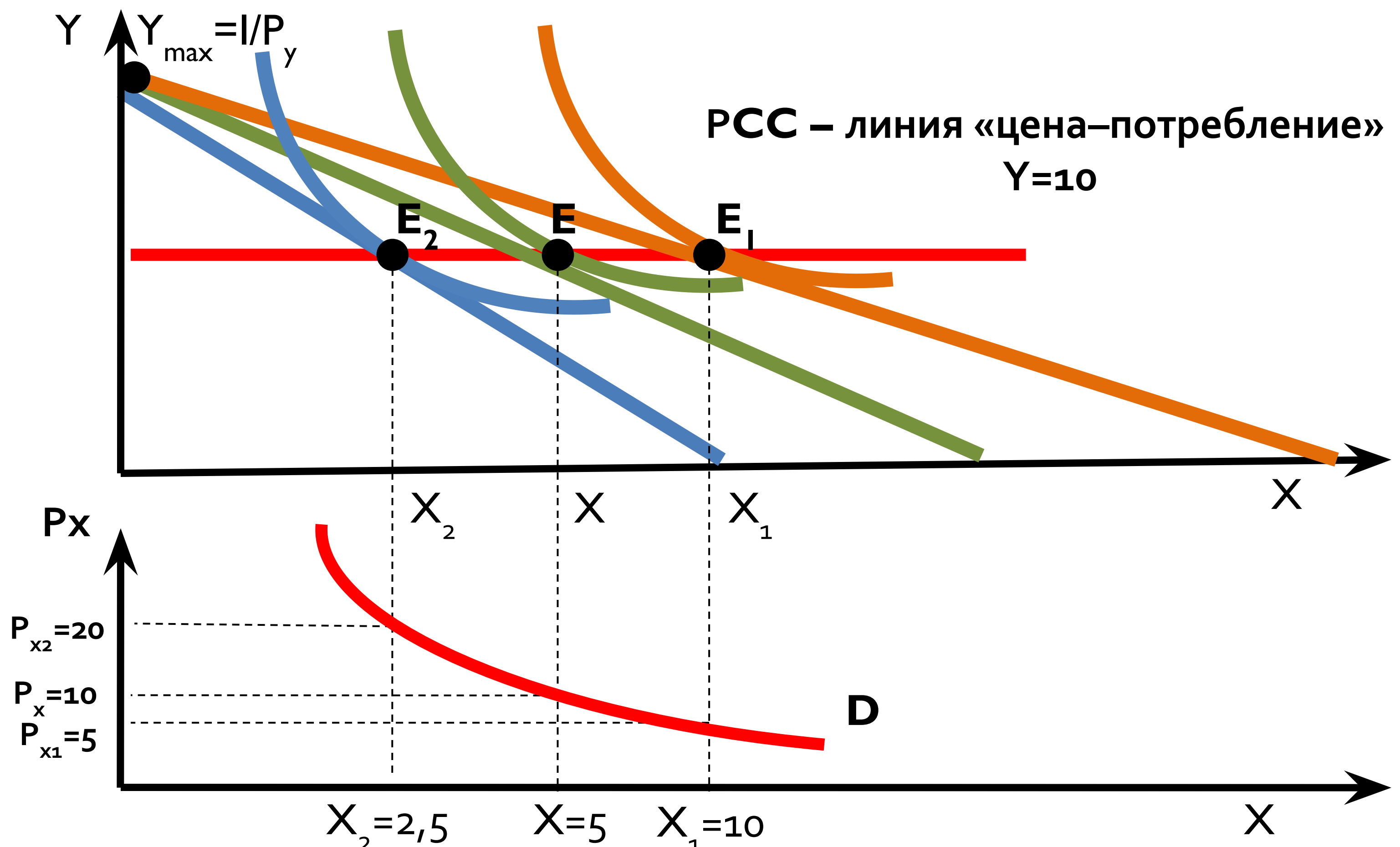
$tg\ \beta = P_{X1}/P_Y$

Выведение функции спроса на благо *X*

В функции спроса объединены только оптимальные объемы блага при соответствующем уровне цены:

$$\left.\begin{aligned} I = P_X X + P_Y Y \\ \frac{MU_X}{MU_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} 100 = P_X X + P_Y Y \\ \frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y} \to P_X X = P_Y Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 100 = 2P_X X \Rightarrow X = \frac{50}{P_X}$$

Выведение функции спроса на благо *X*



Коэффициенты прямой эластичности спроса по цене

- **Дуговая эластичность:**

$$e_i = \frac{\Delta Q_i / Q_i}{\Delta P_i / P_i} = \frac{\Delta Q_i}{\Delta P_i} \times \frac{P_i}{Q_i}$$

$$e_i = \frac{2{,}5 - 10}{20 - 5} \times \frac{20 + 5}{2{,}5 + 10} = -\frac{7{,}5 \times 25}{15 \times 12{,}5} = -1$$

- **Точечная эластичность:**

$$e_i = \frac{\partial Q_i / Q_i}{\partial P_i / P_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial P_i} \times \frac{P_i}{Q_i} = Q_i'(P_i) \times \frac{P_i}{Q_i}$$

$$e_i = -\frac{50}{P_i^2} \times \frac{P_i}{Q_i} = -\frac{50}{P_i Q_i} = -\frac{50 P_i}{50 P_i} = -1$$

Индивидуальный и рыночный спрос

Задача №2

На рынке имеются три покупателя со следующими функциями спроса: $\mathbf{q_{D1}=6-P}$; $\mathbf{q_{D2}=4-P}$; $\mathbf{q_{D3}=10-2P}$.

Определить:

1. Сколько единиц товара будет продано на рынке при $P = 3$?
2. При какой цене можно будет продать 12 единиц товара?
3. Какова эластичность спроса по цене при $P = 4$?
4. Какова эластичность спроса по цене при $Q = 1$?

Индивидуальный и рыночный спрос

Функции спроса трех потребителей линейны:

$$q_{D1}=6-P$$

$$q_{D2}=4-P$$

$$q_{D3}=10-2P$$

Для каждого потребителя существует своя область допустимых значений цены:

$$P_{max1}=6, \qquad P_{max2}=4, \qquad P_{max3}=5,$$

когда $0 \le P < 4$, на рынке присутствуют все три покупателя, в интервале $4 \le P < 5$ — первый и третий, а в интервале $5 \le P < 6$ — только один первый покупатель.

Индивидуальный и рыночный спрос

Следовательно: Функция рыночного спроса примет вид:

$Q_D = q_{D1} + q_{D2} + q_{D3} = 20 - 4P$, при $0 \le P < 4$ и $4 < Q \le 20$

$Q_D = q_{D1} + q_{D3} = 16 - 3P$, при $4 \le P < 5$ и $1 < Q \le 4$

$Q_D = q_{D1} = 6 - P$, при $5 \le P < 6$ и $0 < Q \le 1$

$$e_i = \frac{\partial Q_i / Q_i}{\partial P_i / P_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial P_i} \times \frac{P_i}{Q_i} = Q_i'(P_i) \times \frac{P_i}{Q_i}$$

1. $P = 3 \Rightarrow Q_D = 20 - 4P = 20-12=8$

2. $Q = 12 \Rightarrow Q_D = 20 - 4P \Rightarrow 12 = 20-4P \Rightarrow P = 2$

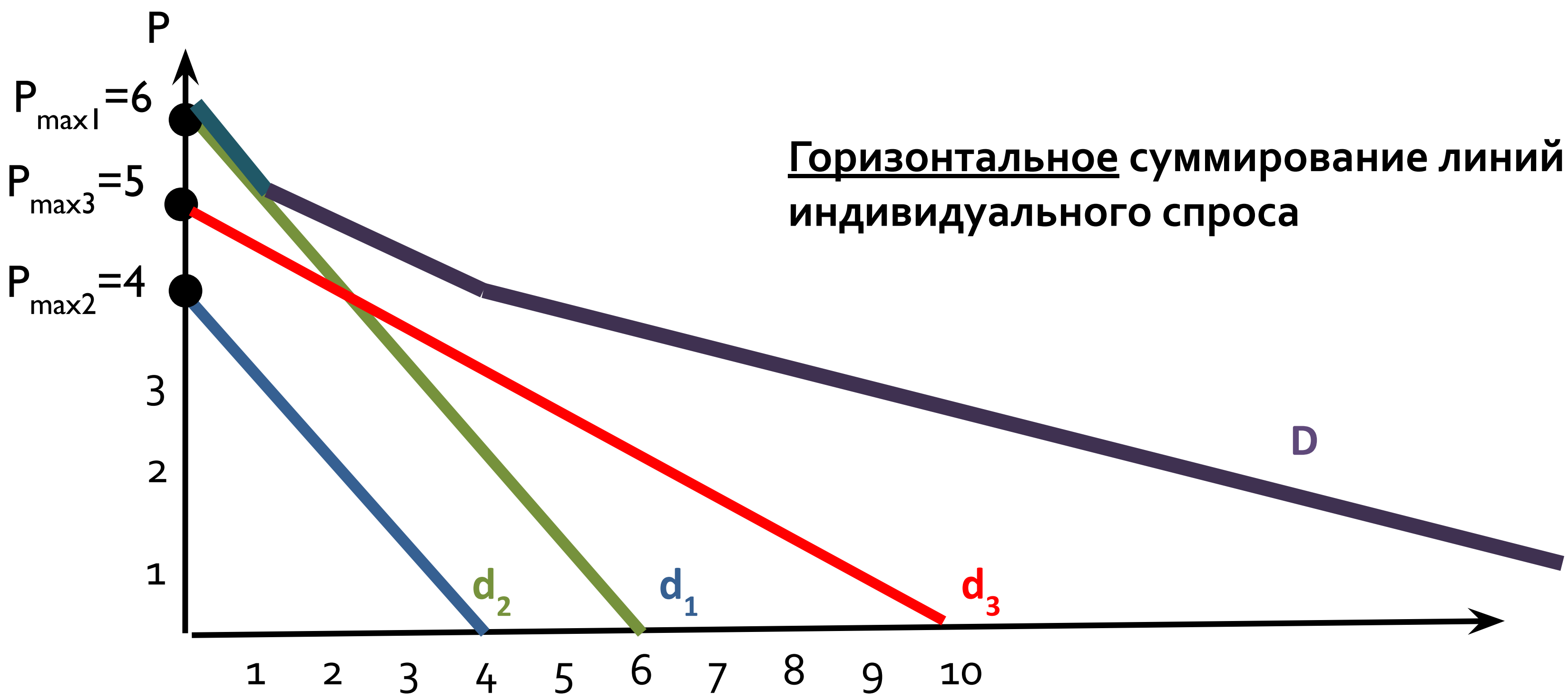
$$e_i = -3\frac{4}{4} = -3$$

$$e_i = -1\frac{5}{1} = -5$$

3. $P = 4 \Rightarrow Q_D = 16 - 3P \Rightarrow Q = 4 \Rightarrow$

4. $Q = 1 \Rightarrow Q_D = 6 - P \Rightarrow 1 = 6 - P \Rightarrow P = 5 \Rightarrow$

Индивидуальный и рыночный спрос



<u>Горизонтальное</u> суммирование линий индивидуального спроса

Индивидуальное предложение труда

Задача № 4

Предпочтения индивида относительно денег и свободного времени отображается функцией полезности $U = (I + 27)^{0,5}F^{0,25}$, где $I = wL$ – заработная плата, F – свободное время, равное разности между календарным временем (T) и рабочим временем: $F = T – L$. Сколько часов индивид будет работать в течение календарного времени $T = 33$ при цене труда $w = 3$ и какова эластичность предложения труда по цене?

Дано: U = (I + 27)^{0,5}F^{0,25}, T = 33, w = 3

Решение:

Цель индивида − максимизировать функцию $U = \left(I + 27\right)^{0,5} F^{0,25}$ при $F = 33 - L$ и $I = wL$.

Оптимум индивида достигается при: $MRS_{FI} = \dfrac{MU_F}{MU_I} = \dfrac{w}{1}$

$$\Rightarrow \frac{wL + 27}{2(33 - L)} = \frac{w}{1} \Rightarrow wL + 27 = 66w - 2wL$$

$$3wL = 66w - 27 \Rightarrow L = 22 - \frac{9}{w}$$

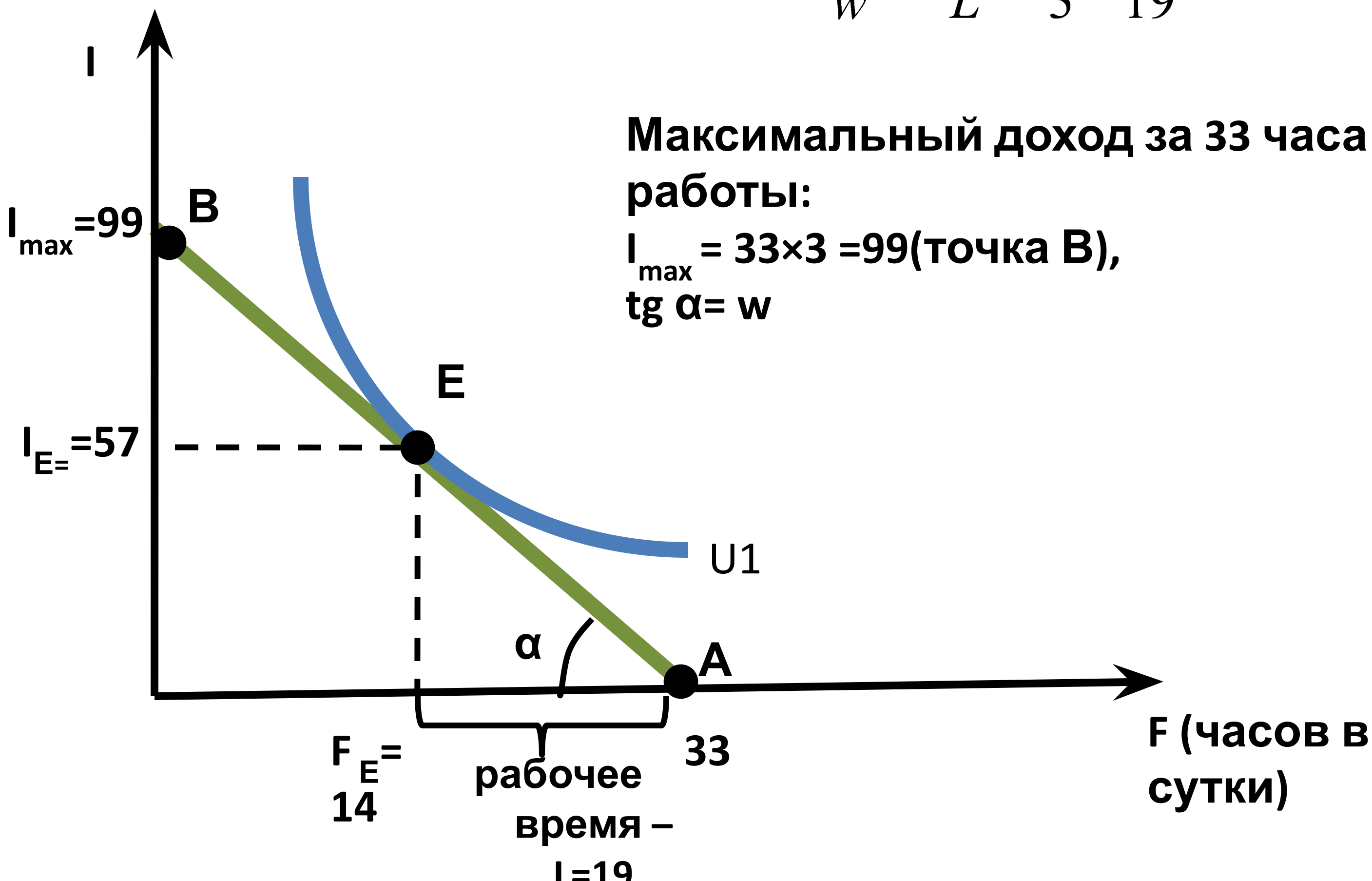
Следовательно, при $w = 3$ индивид будет работать 19 часов.

Определим коэффициент эластичности предложения труда по его цене:

$$e_S = \frac{\partial L}{\partial w} \times \frac{w}{L}$$

Дано: $U = (I + 27)^{0,5}F^{0,25}$, $T = 33$, $w = 3$

$$e_S = \frac{9}{w^2} \times \frac{w}{L} = \frac{9}{3} \times \frac{1}{19} = 0{,}16$$



Максимальный доход за 33 часа работы:

I_{max} = 33×3 =99(точка В),

tg α= w

Индивидуальная функция предложения капитала

Задача № 5

Предпочтения индивида относительно нынешнего (C_0) и будущего (C_1) потребления благ отображаются двухпериодной функцией полезности $U = C_0^{0,5} C_1^{0,4}$. Его доход в текущем периоде I_0 = 250, в будущем I_1 = 120. Определите объемы его сбережений в текущем периоде и объемы потребления в обоих периодах при ставке процента i = 20%.

Дано: $U = C_0^{0,6}C_1^{0,4}$, $I_0 = 250$, $I_1 = 120$, $i = 20\%$

Решение:

Индивид максимизирует функцию $U = C_0^{0,6}C_1^{0,4}$

когда

$$MRS_{C0C1} = \frac{MU_{C_0}}{MU_{C_1}} = (1+i)$$

при ограничении $\mathbf{C_1 = I_1 + (I_0 - C_0)(1+i)}$

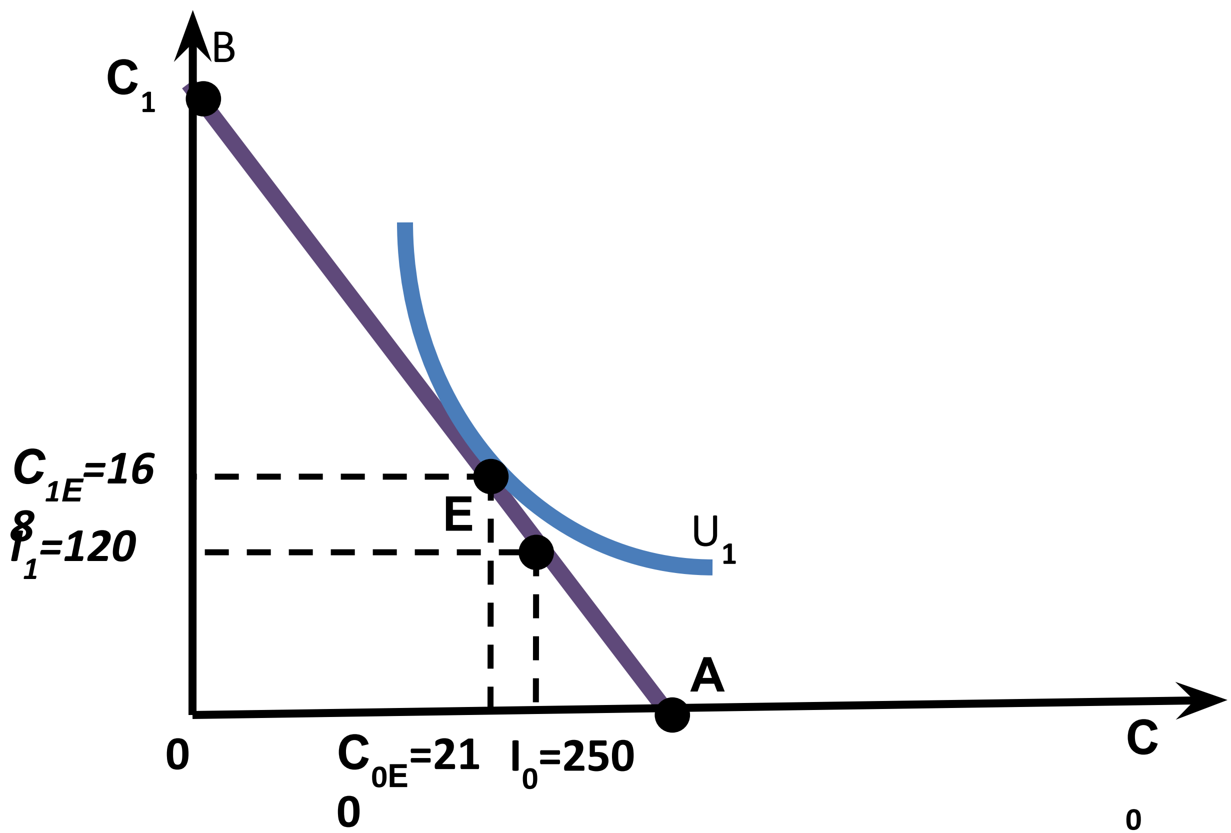
$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 120 + (1+0,2)(250 - C_0) \\ \dfrac{0,6C_1}{0,4C_0} = 1 + 0,2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = 0,8C_0 \\ 0,8C_0 = 120 + 300 - 1,2C_0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_0 = 210, C_1 = 168, S_0 = 40$$

т. е. индивид дает взаймы.

Дано: $U = C_0^{0,6} C_1^{0,25}$, $I_0 = 250$, $I_1 = 12$, $i = 20\%$

Межвременное равновесие потребителя



Теория фирмы

Задача № 6

- Зависимость выпуска продукции от количества используемого труда отображается функцией:

$$Q = 50L + 5L^2 - 0,5L^3$$

1. При каком количестве используемого труда достигается максимум: а) общего выпуска; б) предельной производительности (предельного продукта) труда; в) средней производительности (среднего продукта) труда.
2. Определите эластичность выпуска по труду при использовании 5 ед. труда.

Дано: Q=50L+5L^2-0,5L^3

а) Функция от одной переменной достигает максимума, когда ее производная равна нулю.

$$dQ/dL = 50 + 10L - 1,5L^2 = 0 \Rightarrow L = 10$$

б) Предельная производительность труда: $MP_L = Q'_L = 50 + 10L - 1,5L^2$

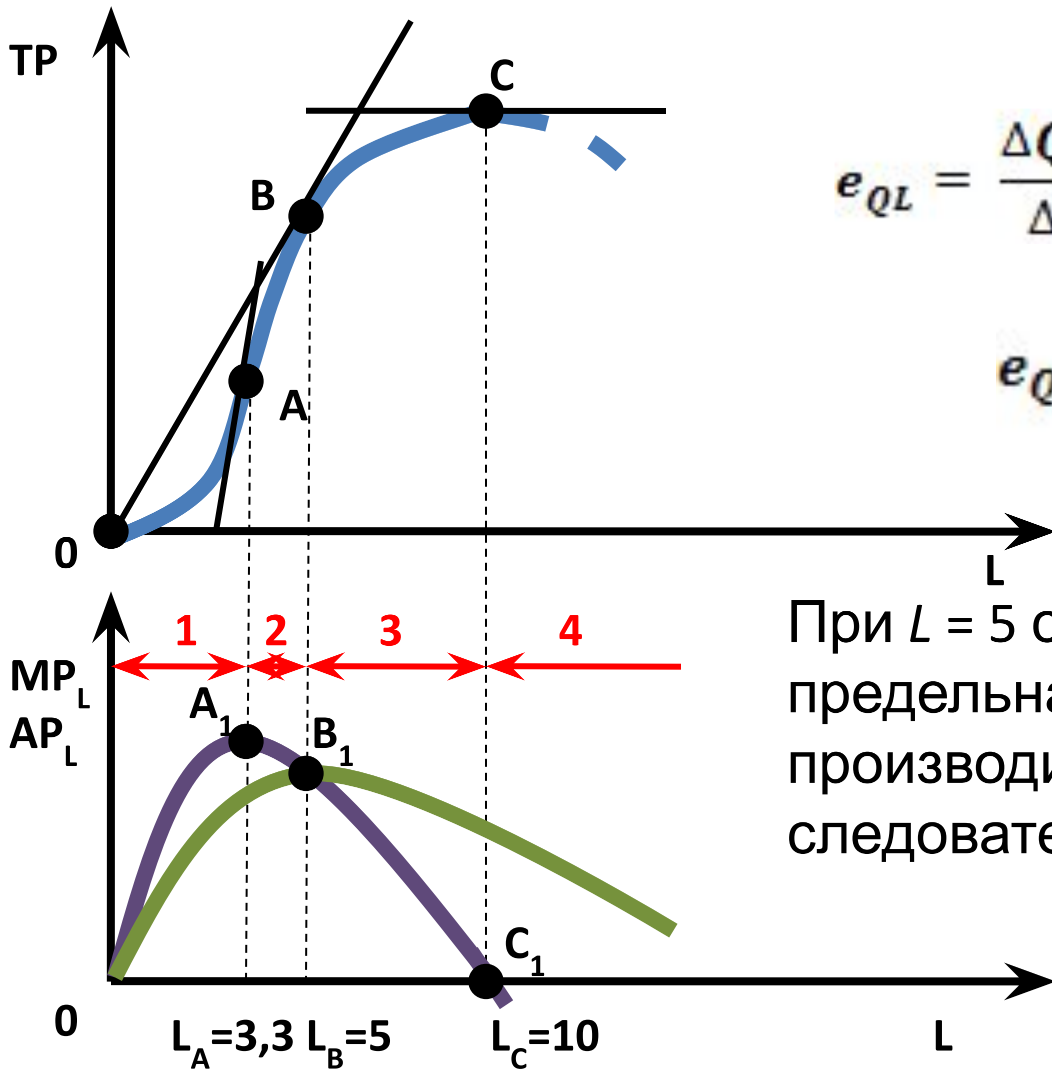
достигает максимума при $MP'_L = 10 - 3L \ = 0 \Rightarrow L = 3,3$

в) Средняя производительность труда: $AP_L = \frac{Q}{L} = 50 + 5L - 0,5L^2$

достигает максимума при

$$AP'_L = 5 - L \ = 0 \Rightarrow L = 5$$

Дано: $Q=50L+5L^2-0,5L^3$



$$e_{QL} = \frac{\Delta Q \ /Q}{\Delta L \ /L} = \frac{\Delta Q}{\Delta L} \times \frac{L}{Q}$$

$$e_{QL} = \frac{MP_L}{AP_L}$$

При L = 5 средняя и предельная производительности равны следовательно e_{QL}=1.

Теория фирмы

Задача № 7

Фирма, максимизирующая прибыль, работает по технологии $Q = L^{0,25}K^{0,25}$. Факторы производства она покупает по неизменным ценам: $w = 2$; $r = 8$ и продает свою продукцию по цене $P = 320$. Определите: а) выпуск фирмы; б) общие затраты на выпуск; в) средние затраты; г) предельные затраты; д) объем спроса фирмы на труд; е) объем спроса фирмы на капитал; ж) прибыль фирмы; з) излишки продавца.

Дано: $Q = L^{0,25}K^{0,25}$, $w = 2$, $r = 8$, $P = 320$

Решение:

Если в условии производственная функция, то:

$TC(K,L) \Rightarrow TC(Q) \Rightarrow MC(Q) \Rightarrow MC=P \Rightarrow Q_S(P)$

$TC=Kr+Lw=8K+2L$

В оптимуме: $MRTS_{LK} = MP_L / MP_K = w/r$

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{0,25K}{0,25L} = \frac{2}{8} \Rightarrow L = 4K$$

$TC=8K+8K=16K$

Из производственной функции:

$Q=(4K)^{0,25}K^{0,25}=(2K)^{0,5} \Rightarrow K=0,5Q^2$

$TC=8Q^2$

Дано: $Q = L^{0,25}K^{0,25}$, $w = 2$, $r = 8$, $P = 320$

$$TC=8Q^2$$
$$MC=TC'(Q)=16Q$$
$$MC=P \Rightarrow 16Q=P \Rightarrow Q_S = P/16$$

а) $Q_S = P/16 = 320/16=20$

б) $LTC = 8\cdot20^2 = 3200$

в) $LAC = 3200/20 = 160$

г) $LMC = 16\cdot20 = 320$

д) $L = 4\cdot200 = 800$

е) $K = 0,5\cdot400 = 200$

ж) $П= TR-TC = 20\cdot320 – 3200 = 3200$

з) $R_S = 0,5\ (P-P_{min})Q=0,5\cdot20\cdot320 = 3200$

Теория затрат, теория предложения

Задача № 8

Фирма с функцией общих затрат $TC = 8 + 8Q + 2Q^2$ может продать любое количество своей продукции по цене *P* = 20.

1. Определите выпуск фирмы: а) минимизирующий средние затраты; б) максимизирующий прибыль.
2. Рассчитайте максимальную величину: а) прибыли; б) излишка производителя.
3. Определите эластичность предложения фирмы по цене, когда она получает максимум прибыли.

Дано: Q=8+8Q+2Q^2,P = 20.
Найти: а) Q, ATC ⇒ min
б) Q, П ⇒ max

Решение:

$$ATC = \frac{TC}{Q} = \frac{8}{Q} + 8 + 2Q$$

$$ATC'(Q) = -\frac{8}{Q^2} + 2 = 0 \Rightarrow Q = 2$$

Условие максимизации прибыли:
P=MC

$$MC = TC'(Q) = 8 + 4Q$$

$$8 + 4Q = 20 \Rightarrow Q = 3$$

Дано: $Q=8+8Q+2Q^2$, $P = 20$.

Найти: а) $П_{max}$

б) R_S

Решение:

$$П = TR - TC$$

$$п = 20 \cdot 3 - 8 - 8 \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 10$$

$$R_S = TR - VC$$

$$R_S = 20 \cdot 3 - 8 \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 18$$

Выводим функцию предложения:

$$Q_S \Leftarrow P = MC$$

$$8 + 4Q = P \Rightarrow Q_S = 0{,}25Q - 2$$

$$e_S = \frac{\partial Q}{\partial P} \times \frac{P}{Q} = 0{,}25\frac{20}{3} = \frac{5}{3}$$

Оптимум по Парето в обмене

Задача № 11

Первый индивид произвел 200 ед. блага *A*, а второй – 240 ед. блага *B*. Предпочтения индивидов относительно данных благ отображаются функциями полезности: $U_1 = Q_{A1}^{0,5} Q_{B1}^{0,25}$, $U_2 = Q_{A2}^{0,25} Q_{B2}^{0,75}$. Индивиды договорились о распределении блага *A*: $Q_{A1} = 120$; $Q_{A2} = 80$.

а) Сколько блага *B* должен получить 1-й индивид для достижения оптимального по Парето распределения благ?

б) При какой цене блага *A* рынок обеспечивает оптимальное по Парето распределение, если $P_B = 1$?

в) Рассчитать величину бюджета первого и второго индивидов.

Дано: $U_1 = Q_{A1}^{0,5} Q_{B1}^{0,25}$ **,** $U_2 = Q_{A2}^{0,25} Q_{B2}^{0,75}$ **, Q_A = 200, Q_B = 240, Q_{A1} = 120; Q_{A2} = 80**

Решение:

а) Условие оптимального по Парето распределения благ:

$$MRS^{\mathrm{I}}_{A,B} = MRS^{\mathrm{II}}_{A,B}$$

$$MRS^1_{AB} = \frac{MU_A}{MU_B} = \frac{0,5Q_{B1}}{0,25Q_{A1}} = \frac{Q_{B1}}{60}$$

$$MRS^2_{AB} = \frac{MU_A}{MU_B} = \frac{0,25Q_{B2}}{0,75Q_{A2}} = \frac{Q_{B2}}{240}$$

$$\frac{Q_{B1}}{60} = \frac{Q_{B2}}{240} \Rightarrow Q_{B2} = 4Q_{B1}$$

$$Q_B = Q_{B1} + Q_{B2} = 5Q_{B1} \Rightarrow Q_{B1} = 48, Q_{B2} = 192$$

Дано: $U_1 = Q_{A1}^{0,5} Q_{B1}^{0,25}$ **,** $U_2 = Q_{A2}^{0,25} Q_{B2}^{0,75}$ **, $Q_A = 200$, $Q_B = 240$, $Q_{A1} = 120$; $Q_{A2} = 80$**

Решение:

б) Условие оптимума отдельного потребителя:

$$MRS^1_{AB} = \frac{MU_A}{MU_B} = \frac{P_A}{P_B}$$

$$MRS^1_{AB} = \frac{0,5Q_{B1}}{0,25Q_{A1}} = \frac{0,5 \times 48}{0,25 \times 120} = \frac{P_A}{1} \Rightarrow P_A = 0,8$$

в)

$$I = P_A Q_A + P_B Q_B$$

бюджет 1-го индивида $0,8 \cdot 120 + 48 = 144$

бюджет 2-го $0,8 \cdot 80 + 192 = 256$

Оптимум по Парето в производстве

Задача № 12

Для производства двух благ *A* и *B* имеется 240 ед. труда и 160 ед. капитала. Технологии производства представлены функциями $Q_A = L_A^{0,5} K_A^{0,25}$, $Q_B = L_B^{0,25} K_B^{0,5}$.

При производстве блага *A* используется 16 ед. капитала, а при производстве блага *B* – 144 ед. Сколько ед. труда должно быть в отрасли *A*, чтобы обеспечить эффективность по Парето в производстве?

Дано: $Q_A = L_A^{0,5} K_A^{0,25}, Q_B = L_B^{0,25} K_B^{0,5}$ **, L=240, K=160 K_A = 16, K_B = 144**

Решение:

а) Условие оптимального по Парето распределения ресурсов:

$$MRTS_{LK}^{A} = MRTS_{LK}^{B}$$

$$MRTS_{LK}^{A} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{0,5K_A}{0,25L_A} = \frac{32}{L_A}$$

$$MRTS_{LK}^{B} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{0,25K_B}{0,5L_B} = \frac{72}{L_B}$$

$$\frac{32}{L_A} = \frac{72}{L_B} \Rightarrow L_B = 2,25L_A$$

$$L = L_A + L_B = 3,25L_A \Rightarrow L_A = 80, L_B = 180$$

Парето-оптимальность в производстве и обмене

Задача № 13*

Кривая производственных возможностей описывается уравнением:

$$Q_A = 800 - Q_B^2 \ ,$$

а функция общественной полезности:

$$U = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5} \ .$$

Определите оптимальные объемы производства каждого блага.

Парето-оптимальность в производстве и обмене

Решение:

Рассмотрим два способа решения

Первый способ: $MRS_{BA} = MRPT_{BA}$

$$MRS_{BA} = \frac{MU_B}{MU_A} = \frac{2Q_A}{Q_B}$$

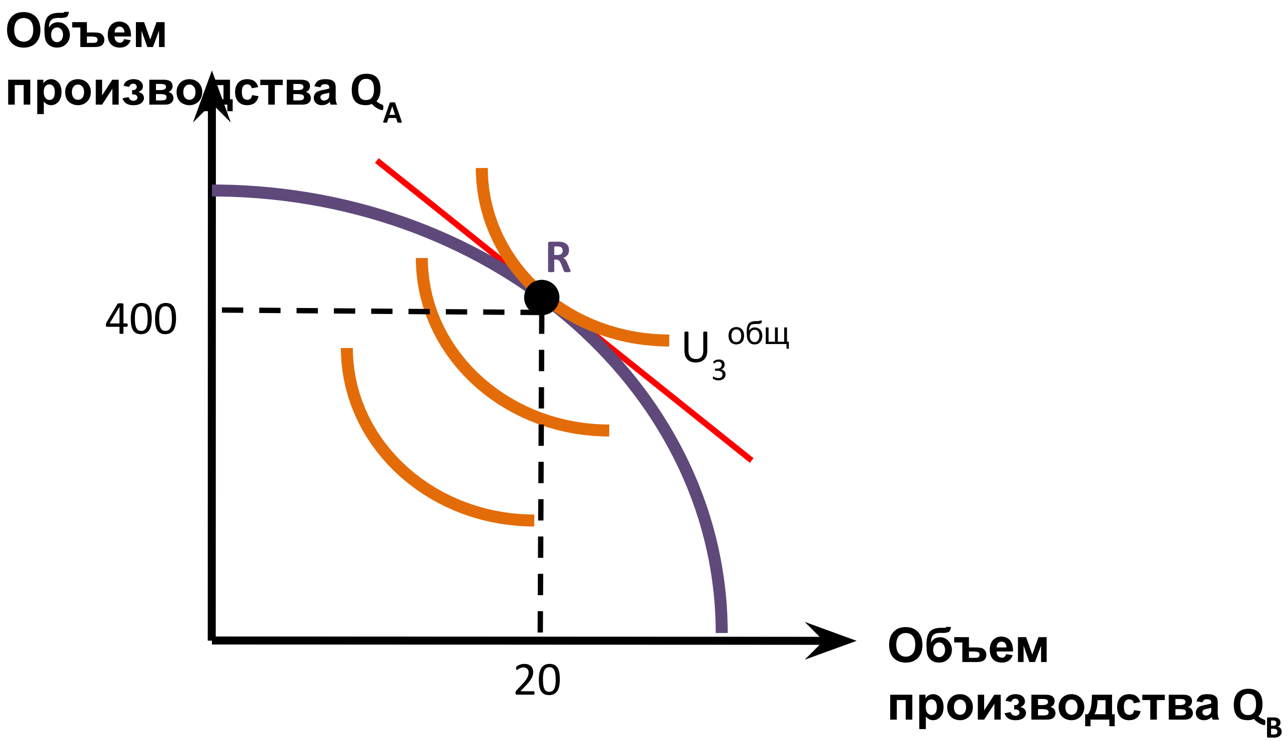
$$MRPT_{BA} = \frac{\Delta Q_A}{\Delta Q_B} = \left(Q_A = 800 - Q_B^2\right)' = |-2\,Q_B| = 2Q_B$$

Решая систему:

$$\begin{cases} \frac{2Q_A}{Q_B} = 2Q_B; \\ Q_A = 800 - Q_B^2. \end{cases}$$

получаем: $Q_A = 400; Q_B = 20$.

Парето-оптимальность в производстве и обмене



В точке R наклон границы производственных возможностей ($MRPT_{BA}$) и кривой безразличия общества ($MRS_{BA}^{общ}$) равны

Парето-оптимальность в производстве и обмене

Второй способ:

Производственные возможности выступают в роли бюджетного ограничения при максимизации функции полезности:

$$\Phi = Q_A^{0,25} Q_B^{0,5} - \lambda\left(Q_A - 800 + Q_B^2\right) \to \max .$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial Q_A} &= \frac{0,25 Q_B^{0,5}}{Q_A^{0,75}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial Q_B} &= \frac{0,5 Q_A^{0,75}}{Q_B^{0,5}} - 2\lambda Q_B = 0 \end{aligned}\right\} \to Q_A = 400;\ \ Q_B = 20.$$

Монополия

Задача №16

Отраслевой спрос $Q^D = 180 - 2P$ удовлетворяет единственная фирма с функцией общих затрат: $TC = 120 + 12Q + 0{,}5Q^2$.

1. Определите цену и объем продаж, если фирма максимизирует: а) прибыль; б) выручку; в) объем продаж.
2. Определите параметры работы фирмы, если бы она могла осуществлять ценовую дискриминацию первой степени.
3. Определите величину дотации за каждую проданную единицу товара, при которой фирма, стремясь максимизировать прибыль, будет продавать 45 ед.
4. Определите цену и объем продаж, если фирма максимизирует прибыль при наличии 20%-го налога на выручку.

Дано: $TC = 120 + 12Q + 0,5Q^2$

$Q^D = 180 - 2P \Rightarrow P = 90 - 0,5Q$

Решение:

а) Условие максимизации прибыли:

MR=MC

$$MR = TR' = (PQ)' = (90Q - 0,5Q^2)' = 90 - Q$$

$$MC = TC' = 12 + Q$$

$$12 + Q = 90 - Q$$

$$Q = 39, P = 90 - 0,5 \times 39 = 70,5$$

$$\Pi = TR - TC = 39 \times 70,5 - 120 - 12 \times 39 - 0,5 \times 39^2 = 1401$$

б) Условие максимизации выручки:

MR=0

$$MR = TR' = 90 - Q = 0$$

$$Q = 90, P = 90 - 0,5 \times 90 = 45$$

$$\Pi = TR - TC = 90 \times 45 - 120 - 12 \times 90 - 0,5 \times 90^2 = 1200$$

Дано: $TC = 120 + 12Q + 0,5Q^2$

$Q^D = 180 - 2P \Rightarrow P = 90 - 0,5Q$

Решение:

в) Условие максимизации выпуска:

P=MC

$$MC = TC' = 12 + Q$$

$$12 + Q = 90 - 0,5Q$$

$$Q = 52, P = 90 - 0,5 \times 52 = 64$$

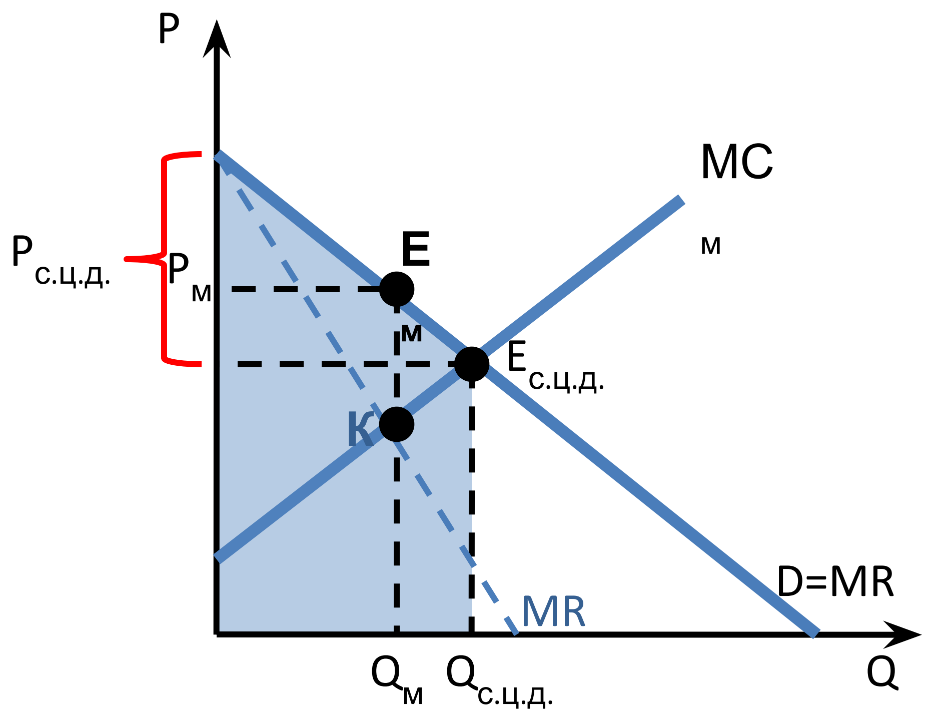
$$\prod = TR - TC = 52 \times 64 - 120 - 12 \times 52 - 0,5 \times 52^2 = 1232$$

2. Условие для осуществления ценовой дискриминации первой степени: **P=MC, P≠const**

$$Q = 52, P \in [P_{посл.}, P_{\max}) \Rightarrow P \in [64;90)$$

Дано: $TC = 120 + 12Q + 0{,}5Q^2$

$Q^D = 180 - 2P \Rightarrow P = 90 - 0{,}5Q$



$$TR = 0{,}5(90 + 64) \times 52 = 4004$$

$$\Pi = TR - TC = 4004 - 120 - 12 \times 52 - 0{,}5 \times 52^2 = 1908$$

Дано: $TC = 120 + 12Q + 0{,}5Q^2$

$Q^D = 180 - 2P \Rightarrow P=90-0{,}5Q,\ Q_Д=45$

3. Условие максимизации прибыли с учетом дотации:

$MR=MC_Д$

$$TC_Д = TC - Д = 120 + 12Q + 0{,}5Q^2 - dQ$$

$$MC_Д = TC'_Д = 12 + Q - d$$

$$MR = TR' = (PQ)' = (90Q - 0{,}5Q^2)' = 90 - Q$$

$$12 + Q - d = 90 - Q$$

$$d = -90 + 12 + 2Q = 12 \qquad Д = 45 \times 12 = 540$$

$$Q = 45, P = 90 - 0{,}5 \times 45 = 67{,}5$$

$$\prod = TR - TC = 45 \times 67{,}5 - 120 - 12 \times 45 - 0{,}5 \times 45^2 + 540 = 1972{,}5$$

Дано: $TC = 120 + 12Q + 0{,}5Q^2$

$Q^D = 180 - 2P \Rightarrow P=90-0{,}5Q,\ T=0{,}2TR$

4. Условие максимизации прибыли с учетом налога:

$MR=MC_T$

$$TC_T = TC + T = 120 + 12Q + 0{,}5Q^2 + 0{,}2PQ$$

$$MC_T = TC'_T = 12 + Q + 0{,}2P$$

$$MR = TR' = (PQ)' = (90Q - 0{,}5Q^2)' = 90 - Q$$

$$12 + Q + 0{,}2(90 - 0{,}5Q) = 90 - Q$$

$$Q = 31{,}6;\ P = 90 - 0{,}5 \times 31{,}6 = 74{,}2$$

$$T = 0{,}2(74{,}2 \times 31{,}6) = 469$$

$$\Pi = TR - TC = 74{,}2 \times 31{,}6 - 120 - 12 \times 31{,}6 - 0{,}5 \times 31{,}6^2 - 469 = 877{,}24$$

Ценовая дискриминация 3 степени

Задача №17

Монополия может продавать продукцию на двух сегментах рынка с различной эластичностью спроса: $Q_1 = 200 - 4P_1$; $Q_2 = 160 - 2P_2$. Ее функция общих затрат $TC = 10 + 12Q + 0{,}5Q^2$. Определить:

а) При каких ценах на каждом из сегментов рынка монополия получит максимум прибыли?

б) Какую цену установит монополия в случае запрета ценовой дискриминации?

Дано: $TC = 10 + 12Q + 0{,}5Q^2$,

$Q_1 = 200 - 4P_1 \Rightarrow P_1=50-0{,}25Q_1$

$Q_2 = 160 - 2P_2 \Rightarrow P_2=80-0{,}5Q_2$

Решение:

1. Условие максимизации прибыли при осуществлении ценовой дискриминации третьей степени следующее:

$$\begin{cases} MR_1 = MC \\ MR_2 = MC \end{cases}$$

$$MR_1 = TR_1' = (P_1Q_1)' = (50Q_1 - 0{,}25Q_1^{\,2})' = 50 - 0{,}5Q_1$$

$$MR_2 = TR_2' = (P_2Q_2)' = (80Q_2 - 0{,}5Q_2^{\,2})' = 80 - Q_2$$

$$MC = TC' = 12 + Q = 12 + Q_1 + Q_2$$

$$\begin{cases} 50 - 0{,}5Q_1 = 12 + Q_1 + Q_2 \\ 80 - Q_2 = 12 + Q_1 + Q_2 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_1 = \frac{76}{3} - \frac{2}{3}Q_2 \\ 80 - Q_2 = 12 + \frac{76}{3} - \frac{2}{3}Q_2 - Q_2 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_1 = 4 \\ Q_2 = 32 \end{cases} \quad \begin{cases} P_1 = 49 \\ P_2 = 64 \end{cases}$$

Дано: $TC = 10 + 12Q + 0{,}5Q^2$,

$Q_1 = 200 - 4P_1 \Rightarrow P_1 = 50 - 0{,}25Q_1 \Rightarrow P_{max} = 50$

$Q_2 = 160 - 2P_2 \Rightarrow P_2 = 80 - 0{,}5Q_2 \Rightarrow P_{max} = 80$

Определим прибыль монополии

$$\Pi = TR_1 + TR_2 - TC = 32 \times 64 + 4 \times 49 - 10 - 12(32+4) - 0{,}5(32+4)^2 = 1154$$

2. Для определения условий достижения максимума прибыли при запрете ценовой дискриминации выведем функцию суммарного спроса:

$$Q_D = \begin{cases} 160 - 2P, P \in [50,80) \\ 360 - 6P, P \in (0,50) \end{cases} \qquad P_D = \begin{cases} 80 - 0{,}5Q, Q \in (0,60] \\ 60 - \frac{1}{6}Q, Q \in (60,360) \end{cases}$$

$$MR = \begin{cases} 80 - Q, Q \in (0,60] \\ 60 - \frac{1}{3}Q, Q \in (60,360) \end{cases} \qquad MR = MC \Rightarrow \begin{cases} 80 - Q = 12 + Q \Rightarrow Q = 34, Q \in (0,60] \Rightarrow P = 63 \\ 60 - \frac{1}{3}Q = 12 + Q \Rightarrow Q = 36, Q \notin (60,360) \end{cases}$$

На втором рынке продукция продаваться не будет

$$\Pi = TR - TC = 34 \times 63 - 10 - 12 \times 34 - 0{,}5 \times 34^2 = 1146$$

Ценовой лидер

Задача №21

В отрасли функционируют 80 мелких фирм с одинаковыми функциями затрат $TC_{аут} = 2 + 8q^2_{аут}$ и еще одна крупная фирма, выступающая в роли лидера, с функцией затрат $TC_{л} = 20 + 0{,}275Q_{л}^2$. Отраслевой спрос представлен функцией $Q^D = 256 - 3P$. Какая цена сложится на рынке и как он будет поделен между лидером и аутсайдерами? Определите прибыль лидера и каждого из аутсайдеров.

Дано: $TC_a = 2 + 8q^2_a$, $n=80$, $TC_Л = 20 + 0{,}275Q_Л^2$, $Q^D = 256 - 3P$

Решение:

а) Условие максимизации прибыли лидера: $MR_Л = MC_Л$ $\quad Q_{DЛ} = Q_D - Q_{Sa}$

$$Q_{Sa} \Leftarrow P_Л = MC_a$$

$$MC_a = TC'_a = 16q_a \qquad \Rightarrow P = 16q_a \Rightarrow q_a = \frac{P}{16}$$

$$Q_{Sa} = 80 \times q_a = 80 \times \frac{P}{16} = 5P$$

$$Q_{DЛ} = Q_D - Q_{Sa} = 256 - 3P - 5P = 256 - 8P$$

$$P_Л = 32 - \frac{1}{8}Q \Rightarrow MR_Л = 32 - 0{,}25Q$$

$$MC_Л = TC'_Л = 0{,}55Q_Л$$

Дано: $TC_a = 2 + 8q_a^2$, $n=80$, $TC_Л = 20 + 0,275Q_Л^2$, $Q^D = 256 – 3P$

$MR_Л = MC_Л$

$$0,55Q = 32 - 0,25Q$$

$$Q_Л = 40, P_Л = 32 - \frac{1}{8} \times 40 = 27$$

$$\Pi_Л = TR - TC = 27 \times 40 - 20 - 0,275 \times 40^2 = 440$$

б) Аутсайдеры

$$q_a = \frac{P}{16} = 1,6875$$

$$\Pi_a = TR - TC = 27 \times 1,6875 - 2 - 8 \times 1,6875^2 = 20,78$$

в) Рынок в целом

$$Q_D = 256 - 3P = 256 - 3 \times 27 = 175$$

$$Q_S = Q_Л + Q_{Sa} = 40 + 80 \times 1,6875 = 175$$