Уральский федеральный университет

Дифференциальные уравнения и ряды

Лекция 10

§ 3. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Ряды с комплексными членами

Знакочередующимся рядом называется ряд вида:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (*)$$

где a_i − положительны ($i \in N$).

Теорема 1 (признак Лейбница).

Если члены знакочередующегося ряда (*) убывают по абсолютной величине (т.е. $\forall n$: $a_n > a_{n+1}$) и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. При этом сумма ряда S положительна и не превосходит первого члена: $0 < S < a_1$ $(a_1 > 0)$.

Уральский федеральный университет

Следствие. Абсолютная погрешность при приближенном вычислении суммы <u>сходящегося</u> знакочередующегося ряда по абсолютной величине не превышает абсолютной величины первого отброшенного члена: $|S - S_n| \le |a_{n+1}|$.

В случае выполнения признака Лейбница говорят, что знакочередующийся ряд ***сходится условно***.

Исследование знакочередующегося ряда вида $-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (с отрицательным первым членом) сводится путем умножения всех его членов на (-1) к исследованию ряда **(*)**.

Пример 1. Вычислить приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 3^n}$, заменив ее суммой четырех членов; оценить абсолютную погрешность.

Решение.

Находим сумму первых четырех членов ряда

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 27}-\frac{1}{4\cdot 81}=\frac{4\cdot 27-2\cdot 9+4-1}{4\cdot 81}=\frac{93}{324}\approx 0,28704.$$

Оценим остаток:

$$\left|R_4\right|=\left|S-S_4\right|\le\left|a_5\right|=\frac{1}{5\cdot 243}\approx 0,0008<0,001=10^{-3}=\varepsilon.$$

Таким образом, $S\approx 0{,}287$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Пример 2. Вычислить с точность $\varepsilon = 0{,}001$ сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Решение.

Вычисляем значения членов ряда до тех пор, пока не получим $|a_{n+1}| < \varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
n &= 1: \quad 1 > \varepsilon,\\
n &= 2: \quad 1/2 > \varepsilon,\\
n &= 3: \quad 1/6 > \varepsilon,\\
n &= 4: \quad 1/24 > \varepsilon,\\
n &= 5: \quad 1/120 > \varepsilon,\\
n &= 6: \quad 1/720 > \varepsilon,\\
n &= 7: \quad 1/5040 < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $S \approx S_6 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{120} - \dfrac{1}{720} = \dfrac{455}{720} \approx 0{,}632$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, члены которого имеют произвольный знак ($a_n > 0$ либо $a_n < 0$), называется ***знакопеременным.***

Знакочередующийся ряд есть частный случай знакопеременного ряда.

Например, $\overset{0}{\overset{\wedge}{\sin 1}} + \dfrac{\overset{0}{\overset{\wedge}{\sin 2}}}{4} + \dfrac{\overset{0}{\overset{\wedge}{\sin 3}}}{9} + \dfrac{\overset{0}{\overset{\vee}{\sin 4}}}{16} + \ldots + \dfrac{\sin n}{n^2} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ знакопеременный ряд.

Теорема 2 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

В этом случае говорят, что знакопеременный ряд ***сходится абсолютно***.

Пример 3. Исследовать сходимость знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Решение.

Проверим ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ т.к. } |\sin n| \le 1.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ обобщенный гармонический ряд с $\alpha=2>1$, поэтому сходится. По признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ так же сходится.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ сходится абсолютно.

Пример 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Решение.

Составляем ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

(Эквивалентность рядов следует из предельного признака сравнения).
Т.к. гармонический ряд расходится, то и ряд из абсолютных величин так же расходится.
Проверим на условную сходимость (по признаку Лейбница).

1. Члены ряда убывают по абсолютной величине

$a_n = \frac{1}{2n-1}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$, очевидно, что $a_n > a_{n+1}$ и первое условие признака Лейбница выполнено.

2. Общий член ряда (по абсолютной величине) стремится к 0

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \Rightarrow$ второе условие выполнено.

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ сходится условно (но не абсолютно).

Задание для самоконтроля

Доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно, но не обладает абсолютной сходимостью.

Основные свойства абсолютно сходящихся рядов:

1. Если ряд сходится абсолютно и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, так же сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (теорема Дирихле).

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1 + S_2$ (или соответственно $S_1 - S_2$).

В случае условно сходящихся рядов соответствующие свойства, в общем случае, не выполняются.

Пример 5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно (по признаку Лейбница).

Переставляя члены условно сходящегося ряда, можно добиться того, что сумма ряда измениться.

Пусть сумма данного ряда равна S.

Перепишем его члены так, что после одного положительного члена будут идти два отрицательных. Получим ряд:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Сумма ряда уменьшилась вдвое!

Теорема 3 (Римана).

В результате перестановки членов условно сходящегося ряда можно получить сходящийся ряд с заранее заданной суммой.

Кроме того, можно переставить слагаемые так, чтобы последовательность частичных сумм сходилась к $+\infty$ или к $-\infty$.

Поэтому действия над рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости. Для проверки ряда на абсолютную сходимость используют все признаки сходимости знакоположительных рядов, заменяя общий член ряда его модулем.

Рассмотрим ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R}).$$

Комплексный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды из действительных частей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и мнимых частей $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, при этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Следствие. Если расходится хотя бы один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то и весь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

Решение.

Преобразуем общий член ряда

$$c_n = \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}} = \frac{n-i}{(n^2+1)\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}_{a_n} - i\underbrace{\frac{1}{(n^2+1)\sqrt{n}}}_{b_n}.$$

Ряд из действительных частей

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

сходится (эквивалентен обобщенному гармоническому ряду с α > 1).

Ряд из мнимых частей

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$$

сходится аналогично.

Поэтому данный комплексный ряд так же сходится.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+in}{1+n}$.

Решение.

Преобразуем общий член ряда $c_n=\frac{(-1)^n+in}{1+n}=\underbrace{\frac{(-1)^n}{1+n}}_{a_n}+i\underbrace{\frac{n}{1+n}}_{b_n}$.

Ряд из действительных частей

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n}$ знакочередующийся ряд, который сходится условно, но не абсолютно (проверить самостоятельно).

Ряд из мнимых частей

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+n}$ расходится по критерию расходимости,

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=1\neq 0$.

Значит, данный комплексный ряд расходится.

Замечание. Тот же результат можно получить быстрее, если начать исследование с выполнения необходимого условия сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + in}{1+n} = i \neq 0.$$

Необходимое условие сходимости не выполняется, поэтому ряд расходится.

§4. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функционального ряда

Ряд, членами которого являются функции, называется ***функциональным рядом***:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x).$$

Придавая аргументу x определенное значение x_0, получаем числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0),$$

который может как сходиться, так и расходиться.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда; если ряд расходится, то x_0 – ***точка расходимости*** ряда. Совокупность тех значений x_0, при которых функциональный ряд сходится, называется его ***областью сходимости***.

В области сходимости ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$.

Она определяется равенством $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, где

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ – частичная сумма ряда.

Пример 1. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{n\,2^n x^n}\right)$.

Решение.

Преобразуем данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{n\,2^n x^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n x^n}$ и найдем область сходимости для каждого из двух полученных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ – сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$. Такой ряд сходится при $|x|<1$ (см. Лекция 9, §1, Пример 1).

Область сходимости первого ряда $x\in(-1;\ 1)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n x^n}$. Для определения области сходимости используем признак Даламбера.

$$u_n=\frac{1}{n\,2^n x^n},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}x^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,\cancel{2^n}\,\cancel{x^n}}{(n+1)\,2^{\cancel{n+1}}\,x^{\cancel{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)|x|}=\frac{1}{2|x|}.$$

Ряд сходится, если $\frac{1}{2|x|}<1 \;\Rightarrow\; |x|>\frac{1}{2} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(-\infty;-1/2)\cup(1/2;+\infty).$

При $x\in(-1/2;1/2)$ ряд расходится.

В точках $x=\pm 1/2$ признак Даламбера ответа не дает, поэтому отдельно исследуем сходимость в этих точках.

Если $x = 1/2$, то получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,2^n(1/2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится.

Если $x = -1/2$, то получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\,2^n(-1/2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ – условно сходящийся ряд (см. §3, задание для самоконтроля).

Значит область сходимости 2го ряда

$x \in (-\infty;\, -1/2] \cup (1/2;\, +\infty).$

Областью сходимости исходного ряда являются такие точки x, в которых сходятся оба ряда (1) и (2). Найдем это множество из системы

$$\begin{cases} x \in (-1;\, 1) \\ x \in (-\infty;\, -1/2] \cup (1/2;\, +\infty) \end{cases} \Rightarrow\ x \in (-1;\, -1/2] \cup (1/2;\, 1).$$

Пусть дан функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

который сходится на некотором множестве X, тогда его сумма $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, для каждого $x\in X$.

При $x=x_1$ ($x_1\in X$) можно решать задачу приближенного нахождения $S(x_1)\approx S_n(x_1)$, а именно $\forall\,\varepsilon>0$ (ε−погрешность приближения) можно указать номер $n_1=n_1(\varepsilon)$ такой, что при $n\geq n_1$ $|S(x_1)-S_n(x_1)|<\varepsilon$, т.е. $S(x_1)\approx S_n(x_1)$ с погрешностью ε.

В другой точке $x = x_2$ ($x_2 \in X$), по той же погрешности ε приближение $S(x_2) \approx S_n(x_2)$, реализуется (в общем случае) для другого n_2 ($n_1 \neq n_2$).

Множество X может содержать бесконечное множество точек $\{x_1, x_2, x_3 \ldots\}$, для каждой из них по одному и тому же $\varepsilon > 0$ находится свой номер n_k с указанными свойствами.

Это означает, что функция $S_n(x)$ не является приближением суммы функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X с погрешностью ε.

Сходящийся на множестве X функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** на множестве X, если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\; n_\varepsilon = n(\varepsilon)$ такой, что $\forall\, n > n_\varepsilon \;\; \forall\, x \in X$ $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Поэтому, для равномерно сходящегося на X функционального ряда $S(x) \approx S_n(x)$ с одной и той же погрешностью (значение n находится по погрешности).

Критерий Коши (для равномерной сходимости функционального ряда)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ на множестве X.

Тогда функциональный ряд равномерно сходится к $S(x)$ на X $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0 \ \exists \ n_\varepsilon=n(\varepsilon) \quad \forall p\in N \quad \forall x\in X$

$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$

Теорема (признак Вейерштрасса)

Если для $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $x \in X$, существует числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что 1) $\forall n$: $a_n > 0$; 2) $\forall n$, $\forall x \in X$: $|u_n(x)| \le a_n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X, где

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***мажорантой*** для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, а сам функциональный ряд называется ***мажорируемым*** на X.

Пример 2. Доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Решение.

Воспользуемся признаком Вейерштрасса и подберем мажоранту.

Т.к. $|\cos nx| \le 1$, то $\forall n \in N \ \ \forall x \in R \quad \dfrac{|\cos nx|}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}.$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^2}$ сходится равномерно на всей числовой оси.

Признак Вейерштрасса определяет достаточное условие равномерной сходимости функционального ряда. Существуют равномерно сходящиеся функциональные ряды, для которых не существует мажоранты (например, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$).

Равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ можно доказать, используя критерий Коши.