Физические основы механики

Семестр 1

Лекция № 6

1. Модель абсолютно твёрдого тела.

2. Кинематика движения свободного тела. Вектор угловой скорости. Мгновенная ось вращения.

3. Момент импульса частицы, момент силы относительно точки и оси. Уравнения моментов относительно точки и оси для частицы и системы частиц.

4. Закон сохранения момента импульса. Орбитальный и собственный момент импульса тела. Спин элементарных частиц.

5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

6. Момент инерции относительно оси. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

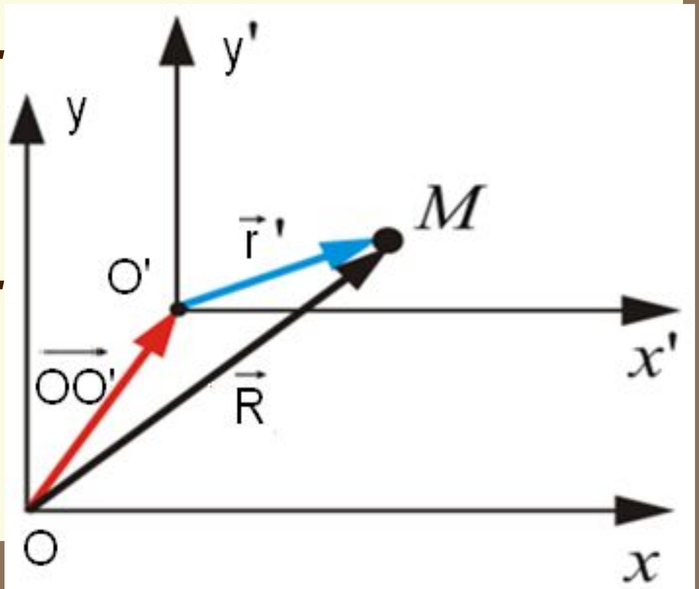
Абсолютно твёрдое тело - это система материальных точек, где все расстояния между ними сохраняются постоянными независимо от внешних воздействий. Иными словами, отсутствует относительное движение частиц.

Для полного и однозначного определения положения тела в трёхмерном пространстве необходимо задать 6 скалярных параметров: три координаты центра масс тела и три угла, фиксирующие ориентацию тела. Число независимых скалярных параметров, полностью и однозначно определяющих положение системы в пространстве, называется числом степеней свободы. Частица имеет три степени свободы, абсолютно твёрдое тело - шесть, а система из n частиц - $3n$ степеней свободы.

Для описания движения тела удобно использовать две прямоугольные декартовы системы координат. Неподвижная система координат K, с началом в точке 0, применяется для задания положения центра масс тела с помощью радиус – вектора $\overrightarrow{00}$,

где точка 0' соответствует центру масс.

Вторая система координат K' движется вместе с центром масс 0', сохраняя неизменной свою ориентацию в пространстве. Начало системы координат K' находится в точке 0'. С помощью подвижной системы координат задаётся пространственная ориентация тела.



Радиус - вектор произвольной точки тела записывается в виде

$$\vec{r}\,' = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{00'} + \vec{r}\,'$$ где

$\vec{r}\,'$ - радиус-вектор точки в движущейся системе координат K', имеющей $\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'$ орты.

Скорость произвольной точки тела с помощью запишется следующим образом

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{00'}}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{V}_{0'} + [\vec{\omega}\vec{r}\,']$$

где

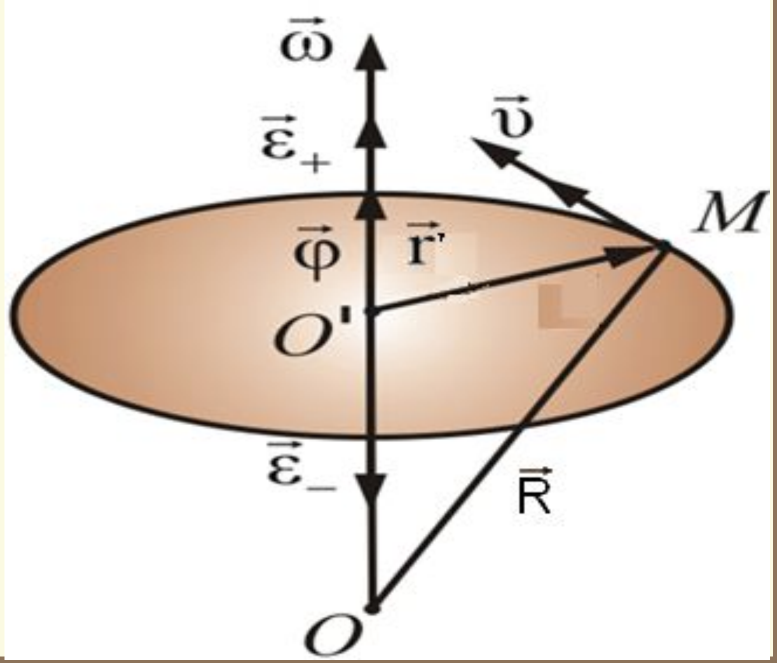
$\vec{V}_{0'}$ - скорость движения центра масс тела и

$\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости тела.

Произвольное движение свободного тела есть сумма поступательного движения со скоростью движения центра масс тела и вращения тела вокруг некоторой мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс.

Линейная скорость $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ любой точки на оси вращения равна нулю, поскольку вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения. При наблюдении с конца вектора $\vec{\omega}$ вращение тела должно происходить против хода часовой стрелки.

Величина угловой скорости определяется формулой: $|\vec{\omega}| = \left|\dfrac{d\varphi}{dt}\right|$



где φ - угол поворота тела вокруг оси вращения.

При движении тела мгновенная ось вращения может менять свою ориентацию, а вместе с ней меняет свою ориентацию вектор угловой скорости. Величина

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

называется **угловым ускорением**.

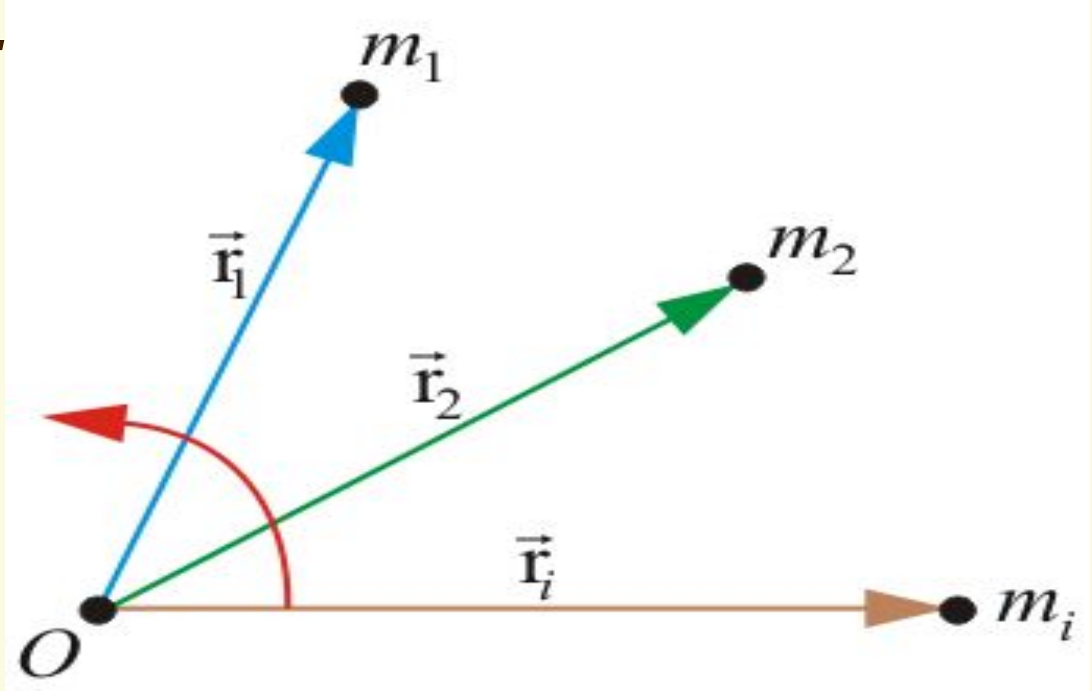
Ускорение любой точки тела описывается выражением

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{0'}}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\,'\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{r}\,'}{dt}\right] = \vec{a}_{0'} + \left[\vec{\varepsilon}\vec{r}\,'\right] + \left[\vec{\omega}\vec{V}\,'\right]$$

где $\vec{a}_{0'}$ - ускорение центра масс тела и

$\vec{V}\,'$ - линейная скорость относительного движения рассматриваемой точки в движущейся системе координат K'.

Рассмотрим систему частиц состоящую из n точек (m_1 m_2 … m_n); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-ой точки, проведенный из точки O – центра неподвижной инерциальной системы отсчета.



Обозначим $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i-ю точку, $\vec{F}_{ik}$ – сила действия со стороны k-ой точки на i-ю.

Запишем основное уравнение динамики для точки:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \vec{\mathrm{F}}_{ik} + \vec{\mathrm{F}}_i.$$

Умножим обе части векторно на $\vec{\mathrm{r}}_i$

$$\left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}\right)\right] = \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \sum_k \vec{\mathrm{F}}_{ik}\right] + \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_i\right].$$

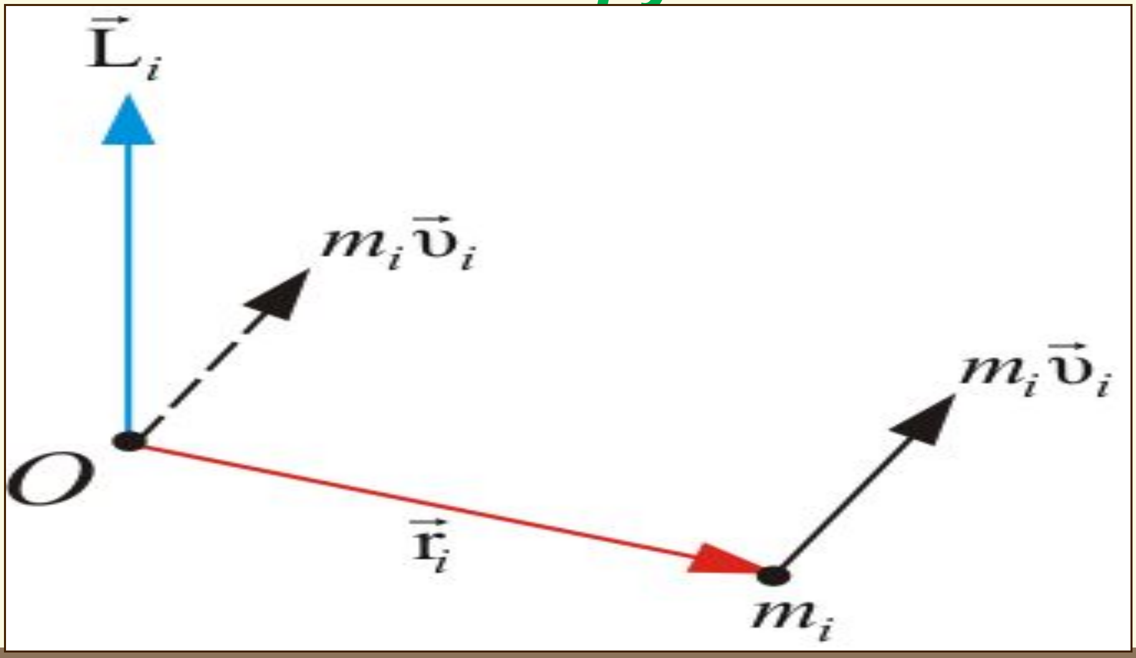
Знак производной можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathrm{r}}_i \times m_i \vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}\right] = \sum_k \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_{ik}\right] + \left[\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_i\right].$$

Векторное произведение $\vec{r}_i$ точки на её импульс называется **моментом импульса** $\vec{L}_i$ этой точки относительно точки О:

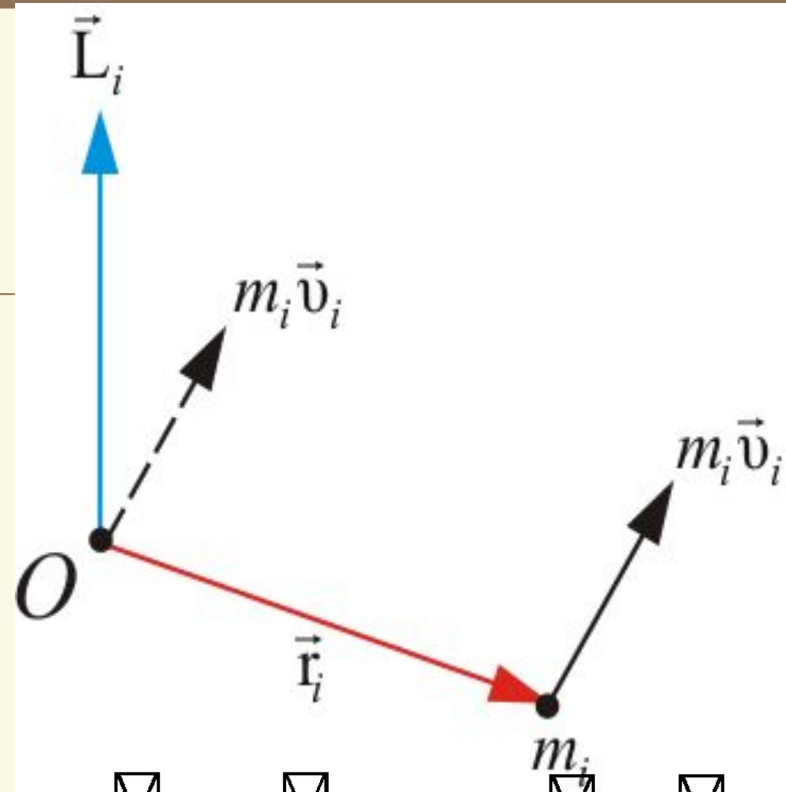
$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i\right]$$

Эти три вектора образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика» или «левой руки»:



$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{\upsilon}_i].$$

Или $$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}].$$



$$\vec{\mathbf{L}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = [\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathrm{p}}] = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Модуль $\mathrm{L} = \mathrm{r} \cdot \mathrm{p} \cdot \sin\alpha$

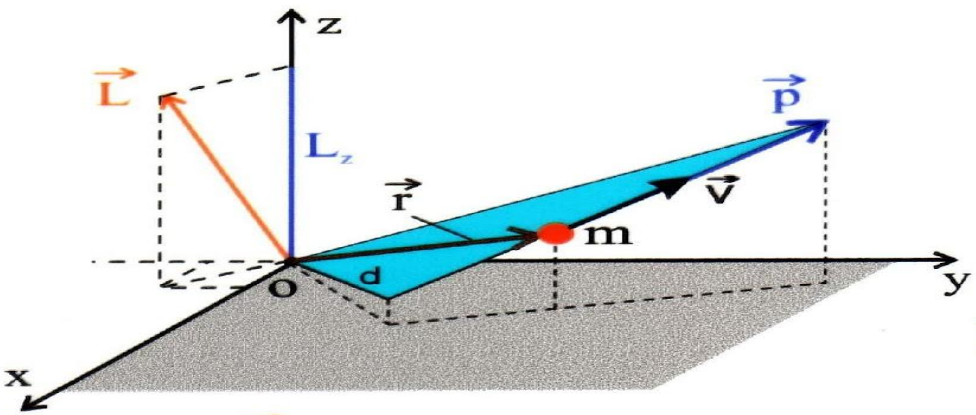
Здесь **L** − трехмерный момент импульса относительно центра вращения *O*.

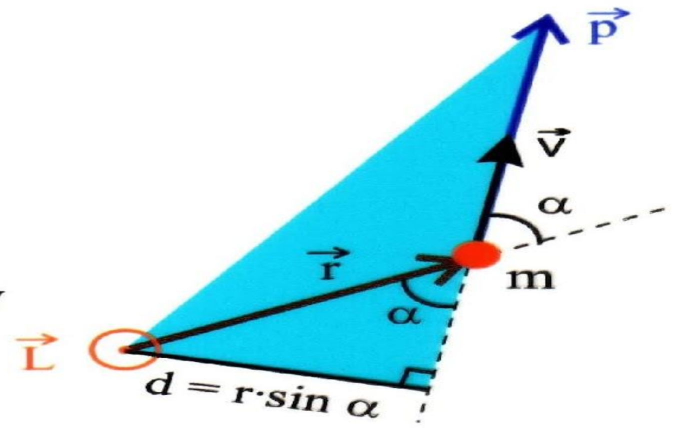
Момент импульса

Момент импульса $\vec{L}$ материальной точки m относительно точки O есть *псевдовектор:* $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$

$\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки m

Момент импульса есть есть мера механического движения





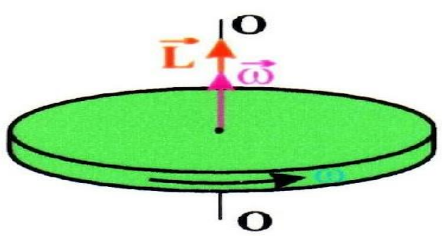
Вектор $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{p}$ и $\vec{r}$

$$L = r \cdot p \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{p}}) = p \cdot d \qquad d = r \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{p}})$$ - плечо импульса

Проекция вектора $\vec{L}$ на некоторую ось Z называется моментом импульса L_z относительно оси

Для системы материальных точек полный момент $\vec{L}$ относительно точки O:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

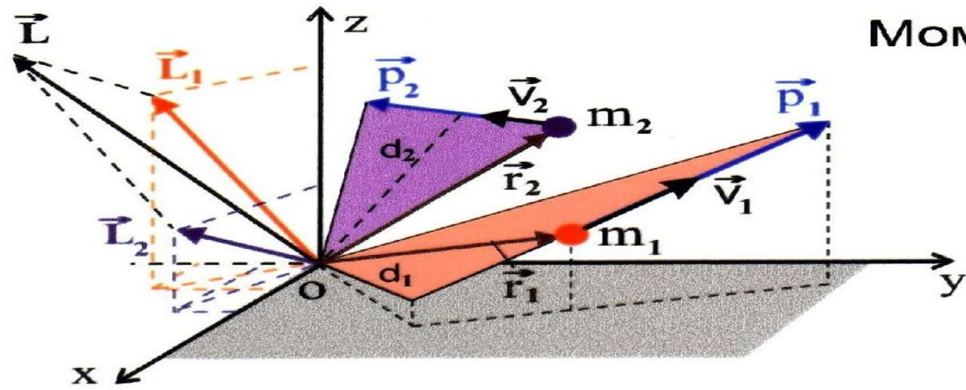


Момент импульса абсолютно твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно главной оси OO

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

I - момент инерции тела относительно оси OO

Свойства момента импульса



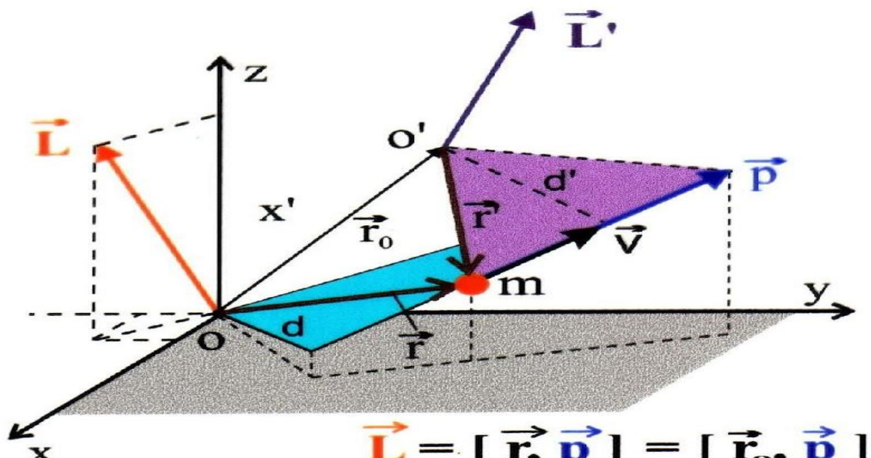
Момент импульса системы N материальных точек

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

$\vec{L}$ - величина аддитивная

Момент импульса зависит от выбора точки **O** в данной системе отсчета: $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$, $\vec{L}' = [\vec{r}', \vec{p}]$

$$\vec{L} \neq \vec{L}'$$



$\vec{L}$ - момент импульса относительно точки **O**

$\vec{L}'$ - момент импульса относительно точки **O′**

Преобразование момента импульса при переходе от точки **O** к точке **O′**

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}_0, \vec{p}] + [\vec{r}', \vec{p}] = [\vec{r}_0, \vec{p}] + \vec{L}'$$

$$\vec{L}' = \vec{L} - [\vec{r}_0, \vec{p}]$$

Так как импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ зависит от выбора системы отсчета, момент импульса тоже зависит от выбора системы отсчета

Векторное произведение $\vec{r}_i$ проведенного в точку приложения сил, на эту силу называется <u>моментом силы</u> $\vec{M}_i$:

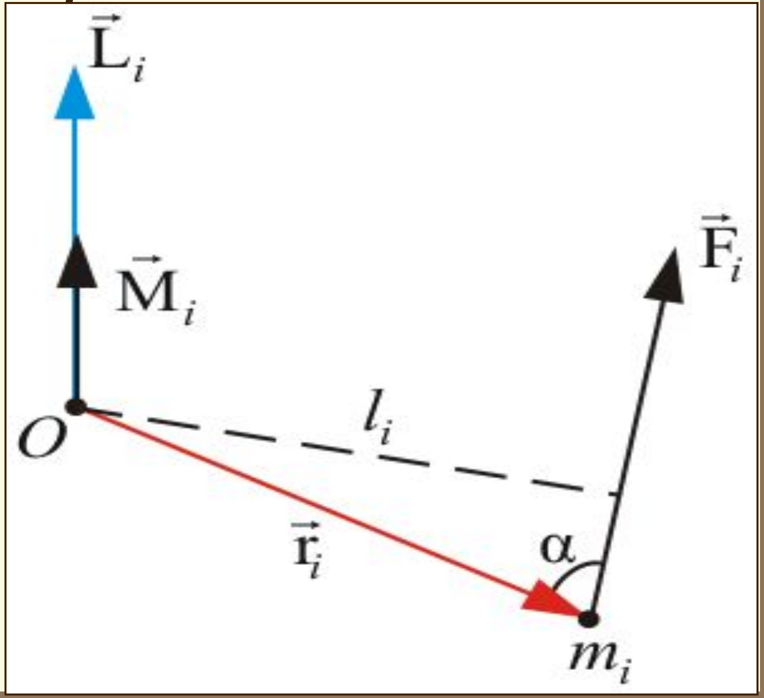
$$\boxed{\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]}$$

Обозначим l_i – плечо силы F_i,

Модуль момента силы:

$$\left|\vec{M}_i\right| = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i,$$

$$l_i = r_i \cdot \sin\alpha$$ **- плечо силы.**



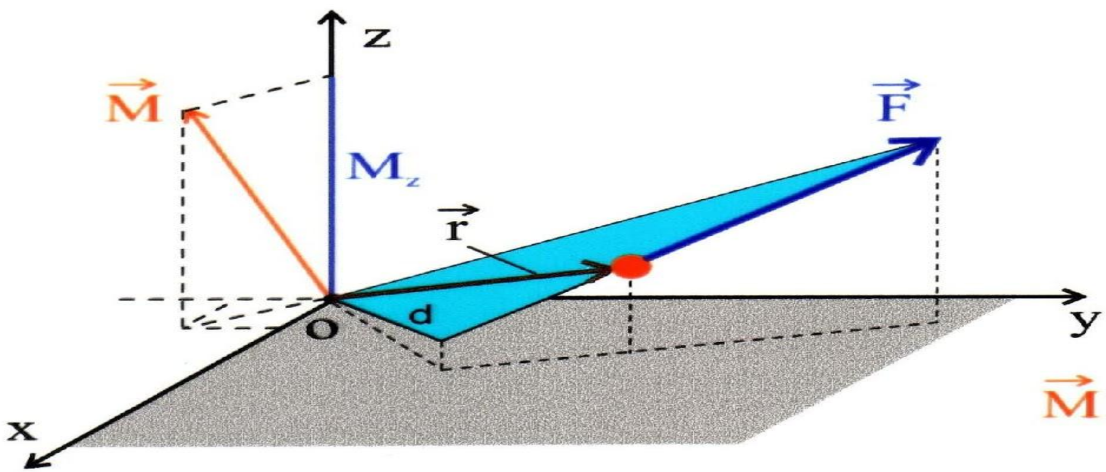
Момент силы

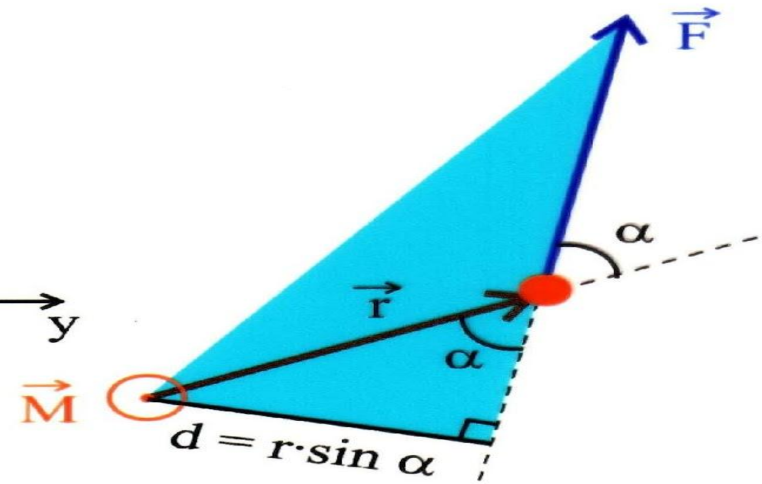
Момент силы $\vec{F}$ относительно точки О есть *псевдовектор:*

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$\vec{r}$ - радиус-вектор точки приложения силы

Момент силы есть величина, характеризующая вращательный эффект силы





Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{F}$ и $\vec{r}$

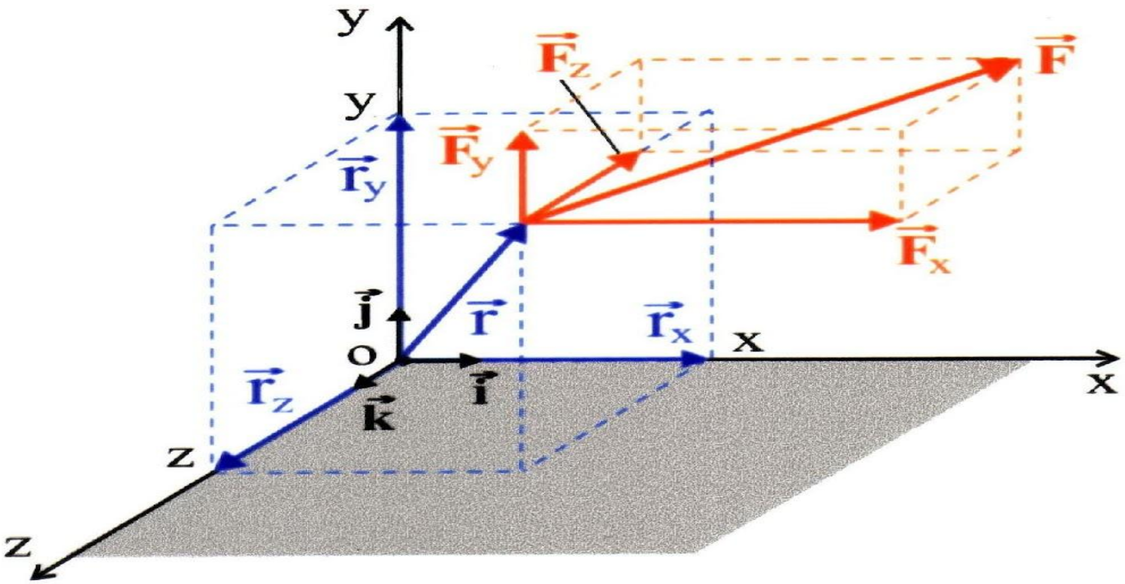
$$M = r \cdot F \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{F}}) = F \cdot d \qquad d = r \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{F}})$$ - плечо силы

Проекция вектора $\vec{M}$ на некоторую ось Z называется моментом силы M_z относительно оси

Для системы м.т. полный момент $\vec{M}_{системы}$ относительно точки О:

$$\vec{M}_{системы} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

Момент силы относительно оси



$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z =$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z =$$
$$= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки О

$$\vec{M} = [\, \vec{r}, \vec{F}\,]$$

$$\vec{M} = [(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),(\vec{F}_x i + \vec{F}_y j + \vec{F}_z k)] =$$
$$= \vec{i}\,(\, yF_z - zF_y) + \vec{j}\,(\, zF_x - xF_z) + \vec{k}\,(\, xF_y - yF_x)$$

Моментом силы F относительно оси z называется проекция момента М относительно точки О на эту ось

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

С учетом новых обозначений:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i$$

Запишем систему n уравнений для всех точек системы и сложим, левые и правые части уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i .$$

Так как $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ то $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} = 0.$

Здесь сумма производных равна производной суммы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$

где $\vec{L}$ – момент импульса системы, $\vec{M}$ – результирующий момент всех внешних сил относительно точки О.

Окончательно получим для одной материальной точки уравнение моментов имеет вид

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i}$$

где $\vec{M}_i$ - момент всех сил действующих на материальную точку

Для **системы материальных точек** **уравнение моментов** (относительно точки) имеет вид:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}}$$

где $\vec{M}^{\text{внеш}}$ -момент всех внешних сил действующих на систему относительно точки О.

Проведём через точку О произвольную неподвижную ось Z. Проекция векторного уравнения моментов на ось Z -есть **уравнение моментов относительно данной оси**:

$$\boxed{\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}}}$$

Для замкнутой системы тел момент внешних сил всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему.

Тогда:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}} \equiv 0$$

и

$$\boxed{\vec{L} = \text{const}}$$

Закон сохранения момента импульса – момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.

Аналогично для замкнутой системы частиц вращающихся вокруг оси Z :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}} \equiv 0,$$ отсюда $$L_z = \text{const}$$

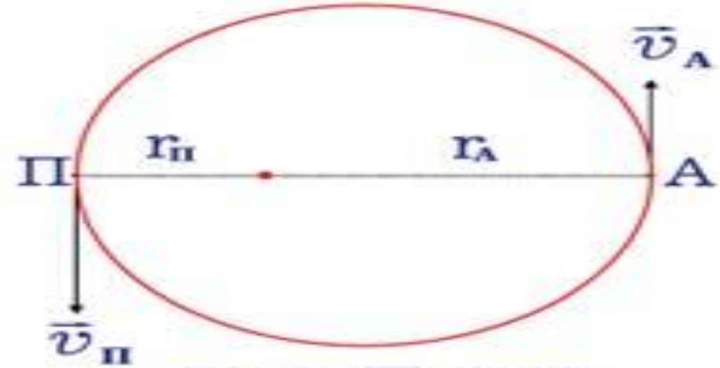
Если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тождественно равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения.

Момент импульса и для незамкнутых систем постоянен, если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

$J_1 < J_2$

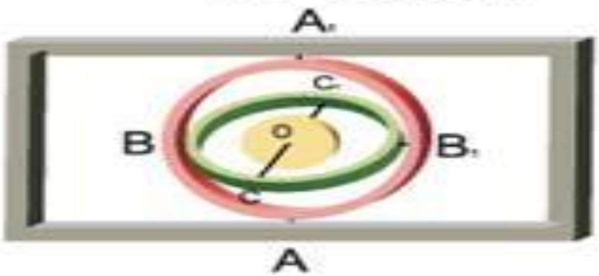
$\omega_1 > \omega_2$



$v_A r_A = r_П v_П$

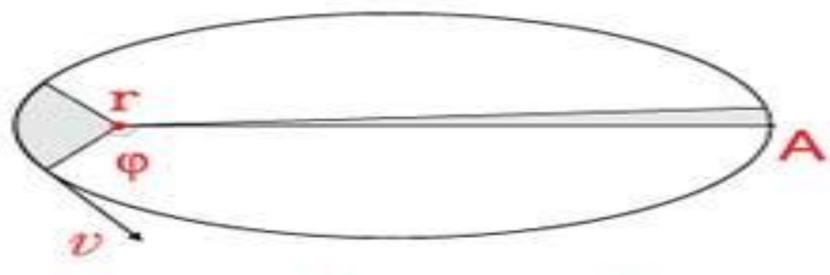
$$\boxed{L = J\omega = const}$$

ГИРОСКОП



АВТОГОРИЗОНТ

ВЕРТОЛЕТ

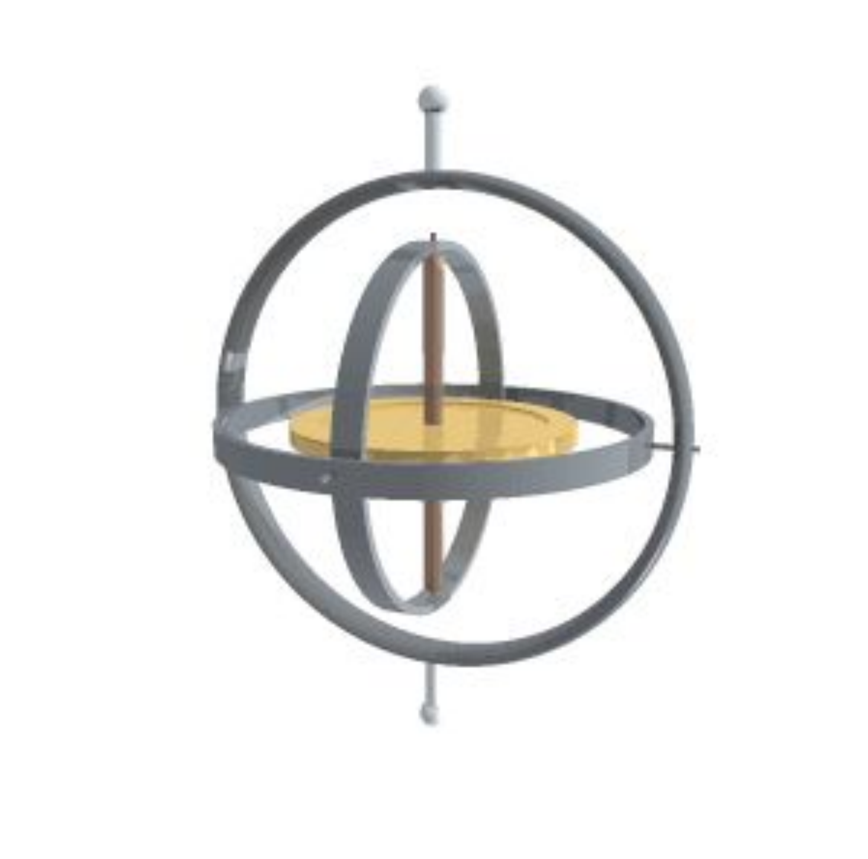


$L = m v r \sin\varphi = const$

Уравновешенный гироскоп – быстро вращающееся тело, имеющее три степени свободы

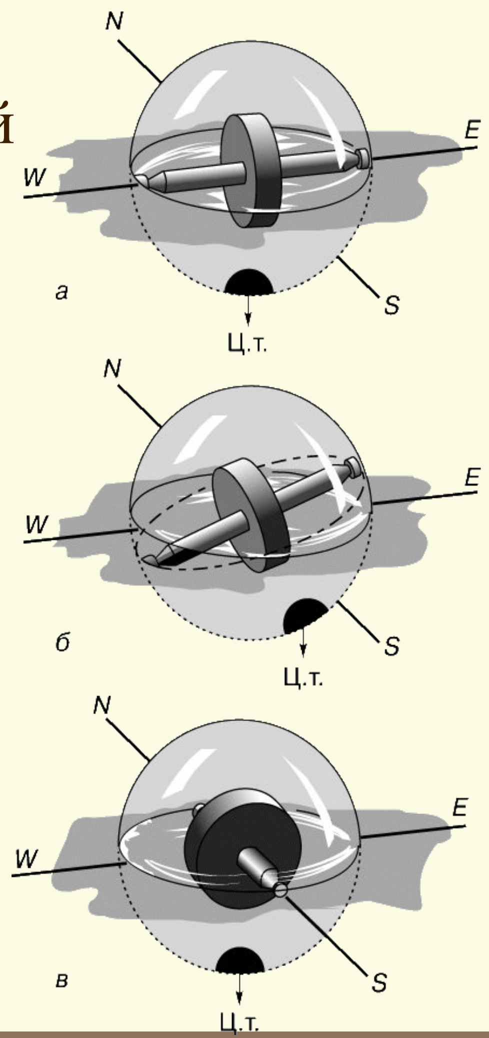
Используется гироскоп в различных навигационных устройствах кораблей, самолетов, ракет (гирокомпас, гирогоризонт).

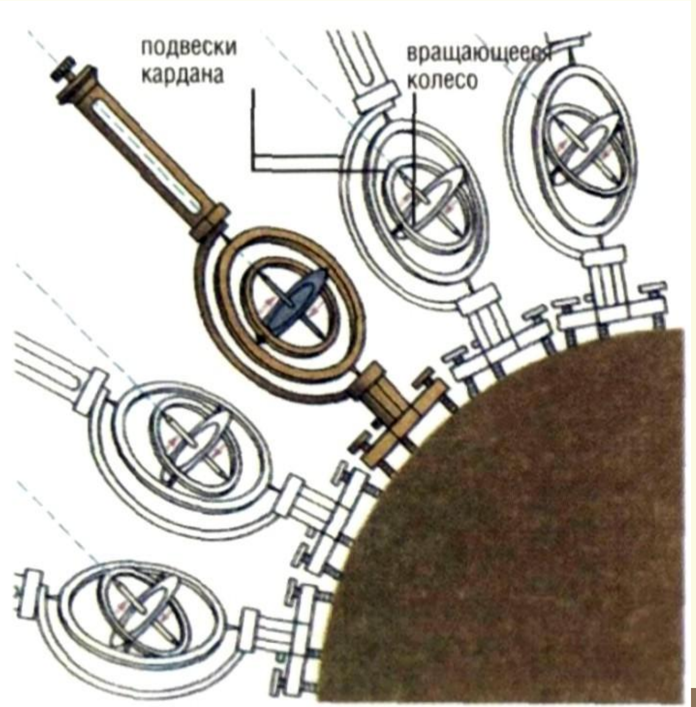
УСТРОЙСТВО ГИРОСКОПА



ГИРОКОМПАС

Гироскопическим компасом (гирокомпасом) называется гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости под влиянием суточного вращения Земли.





В **классической механике** полный момент импульса тела относительно неподвижной точки можно всегда рассматривать как сумму двух моментов импульса:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0\,орб.} + \vec{L}_{0\,соб.}$$

где $\vec{L}_{0\,орб.}$ - **орбитальный момент импульса**, связанный с движением центра масс тела относительно точки О,

$\vec{L}_{0\,соб.}$ - **собственный момент импульса тела** относительно его центра масс

Согласно законам **квантовой механики** элементарные частицы могут обладать орбитальным и **собственным моментом импульса**, который называют **спином**. Спин не связан с вращением частицы как целого вокруг оси, проходящей через центр масс частицы. **Спин** частицы измеряется в единицах $\hbar$, где

$\hbar = h/2\pi$ и h = 6,62·10^{-34}Дж·с - постоянная Планка, и равен S

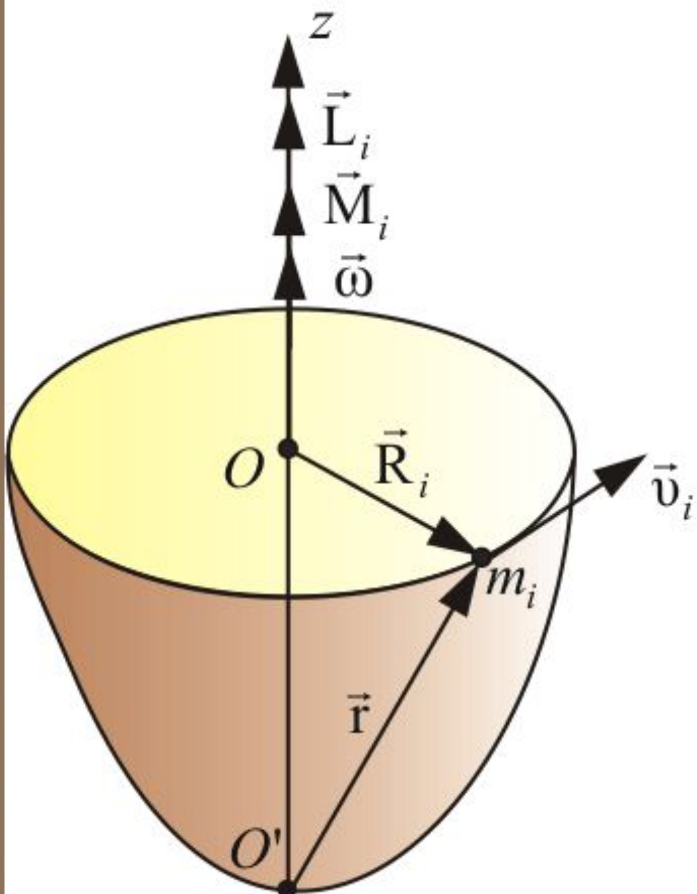
S -целое(в т.ч. нулевое) положительное число для бозонов или полуцелое положительное число для фермионов. Спин π - и K - мезонов равен 0, спин электрона, протона, нейтрона и нейтрино равен $1/2$, спин фотона равен 1 и спин гравитона (кванта гравитационного поля) равен 2.

Существование закона сохранения момента импульса вытекает из изотропности пространства, свойства которого не зависят от выбора направления наблюдения.

Динамика вращательного движения твердого тела относительно оси

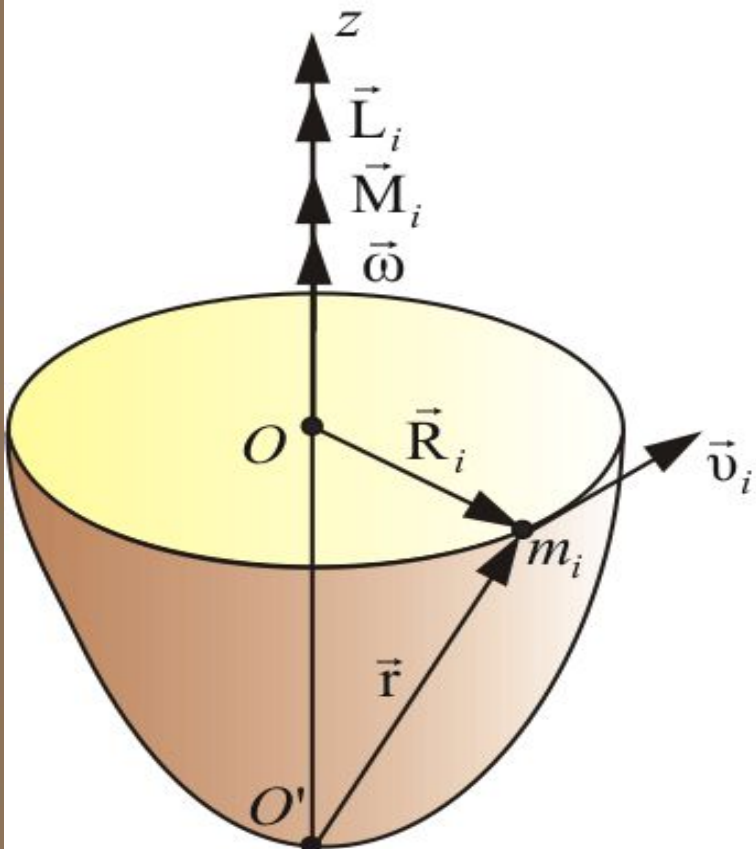
Описанное нами движение твердого тела относительно неподвижной точки является основным видом движения. Однако вычислить вектор $\vec{L}$ - момент импульса системы относительно произвольной точки не просто: надо знать шесть проекций (три задают положение тела, три задают положение точки).

Значительно проще найти момент импульса $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (z) .



ь некоторое тело вращается вокруг оси z. Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела находящегося на расстоянии $\boldsymbol{R_i}$ от оси вращения. При этом помним, что $\vec{L}_{iz}$ и $\vec{M}_{iz}$ направлены вдоль оси вращения z, поэтому в дальнейшем опустим значок z.

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}[\vec{R}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i] = \vec{M}_i$$



у всех $\vec{\upsilon}_i$ точек

, - $\vec{\omega}$

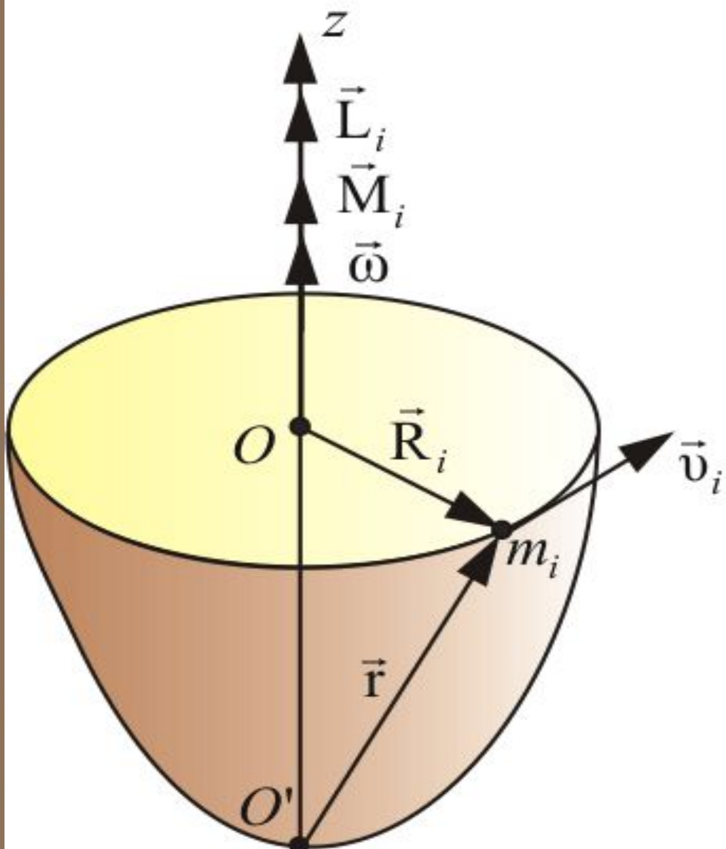
угловой скорости

$$\omega = \upsilon_i / R_i$$

Тогда $$\frac{d}{dt}\left(m_i R_i^2 \vec{\omega}\right) = \vec{M}_i$$

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения $\boldsymbol{m_i}$ и $\boldsymbol{R_i}$ останутся неизменными. Тогда:

$$m_i R_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i .$$



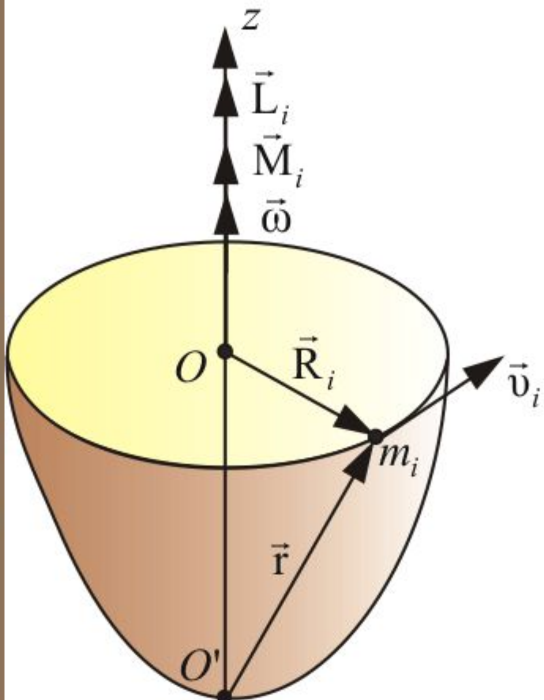
Обозначим I_i – <u>***момент инерции***</u> <u>***точки***</u> находящейся на расстоянии $\boldsymbol{R_i}$ от оси вращения:

$$I_i = m_i R_i^2$$

Так как тело состоит из громного количества точек и все они находятся на разных расстояниях от оси вращения, то ***момент инерции*** <u>***твёрдого тела***</u> равен:

$$I = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m,$$

где $\boldsymbol{R}$ – расстояние от оси z до $\mathrm{d}m$.



Просуммировав по всем i-ым точкам,

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}$$

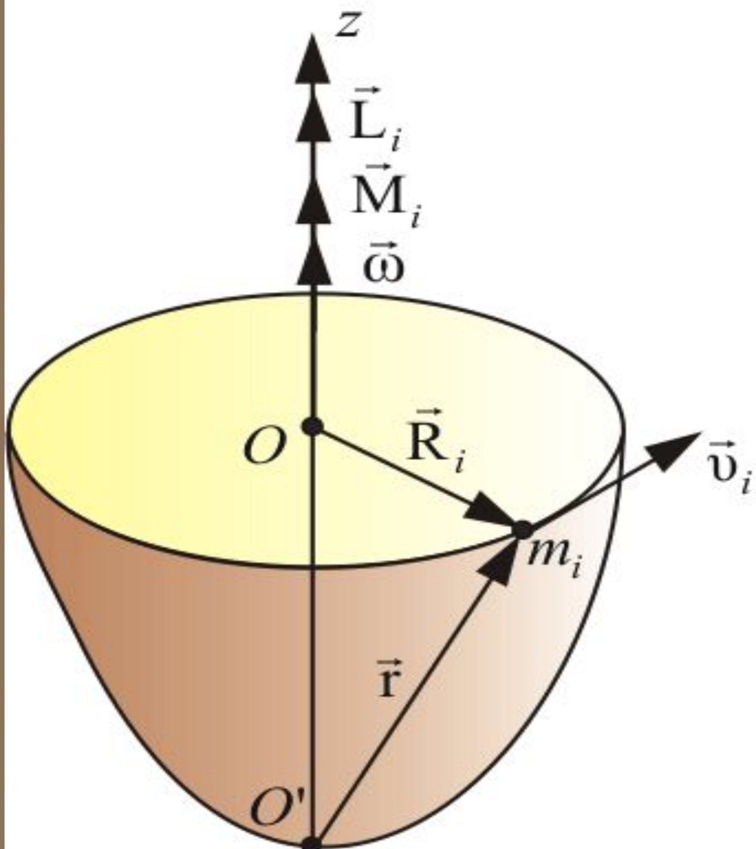
получим или

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Это ***основное уравнение динамики тела вращающегося вокруг неподвижной оси***.

(Сравним: $m\vec{a} = \vec{F}$
– основное уравнение динамики поступательного движения тела).

$$I d\vec{\omega} = \vec{M} dt; \qquad I d\vec{\omega} = d\vec{L}$$



$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$

момент импульса $\vec{L}$

…егося вокруг оси z

поступательного $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

При этом помним, что $\vec{L}$ и $\vec{M}$ - динамические характеристики вращательного движения направленные всегда вдоль оси вращения. Причем, $\vec{L}$ определяется направлением вращения, как и $\vec{\omega}$, а $\vec{M}$ – зависит от того, ускоряется или замедляется вращение.

Повторим основные характеристики вращательного движения

Эти формулы получены для **одной точки** ***вращающегося твердого тела***

$$\vec{L}_i\Big| = I_{iz}\omega$$ **Момент импульса**

$$\vec{M}_i\Big| = I_{iz}\varepsilon$$ **Момент силы**

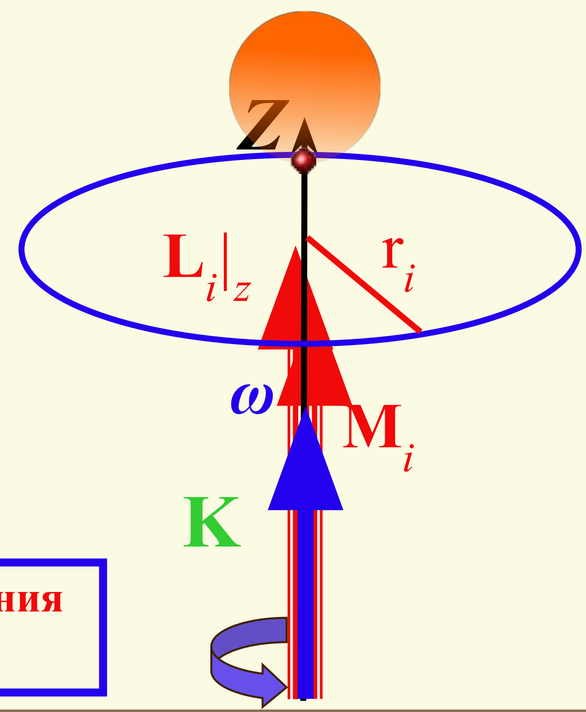
$$I_{iz} = m_i r_i^2$$ **Момент инерции**

Суммируя по **всему телу,** ***получим***

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\Big| = I_z\omega$$ **Момент импульса твердого тела**

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i\Big| = I_z\varepsilon$$ **Момент силы твердого тела**

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{iz}$$ **Момент инерции твердого тела**



Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Расчет моментов инерции некоторых простых тел.

По формуле $I = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m$ не всегда просто удается рассчитать момент инерции тел произвольной формы.

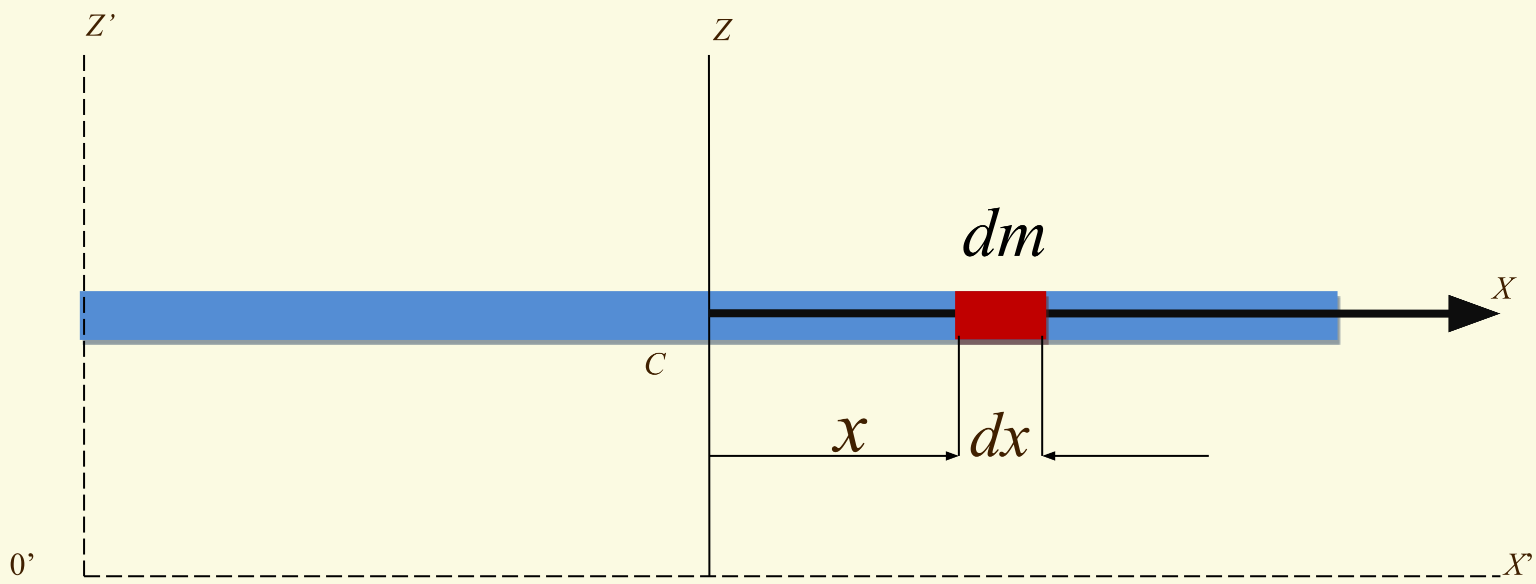
Наиболее легко эта задача решается **для тел простых форм**, вращающихся вокруг оси, проходящей через центр инерции (центр масс) тела I_c.

В этом случае I_c вычисляется по формуле:

$$I_c = kmR^2$$

Интегрирование проводится по всему объёму тела V. В качестве примера вычислим момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси z, проходящей через его центр масс — точку C. Длина стержня — l, его масса — m.

На расстоянии x от оси вращения выделим элемент dx, масса которого $dm = \frac{m}{l}dx$



Момент инерции этой частицы стержня равен:

$dI_z = dm \cdot x^2 = \frac{m}{l} dx \cdot x^2$***. Вычислив подобным образом, момен-ты инерции всех элементов стержня, сложим их, а в пределе проинтегрируем:***

$$I_z = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{3l} \left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right] = \frac{ml^2}{12}$$

Таким образом:

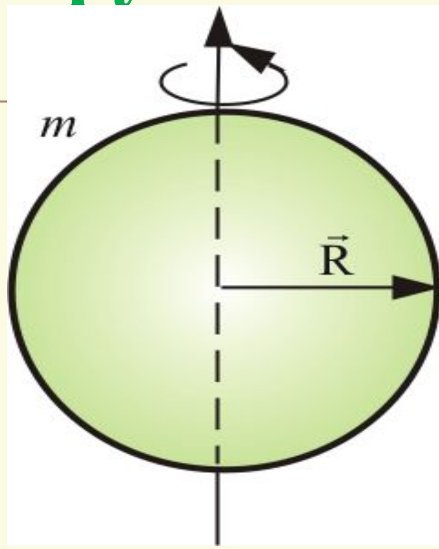
$$I_z = \frac{ml^2}{12}$$

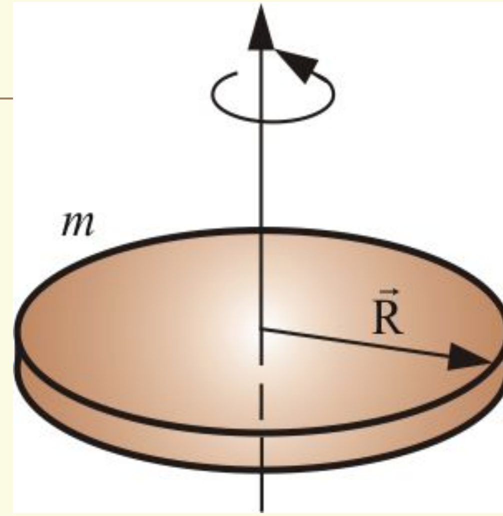
Как изменится момент инерции этого стержня, если ось вращения перенести в другое место? Провести её, например, через край стержня?

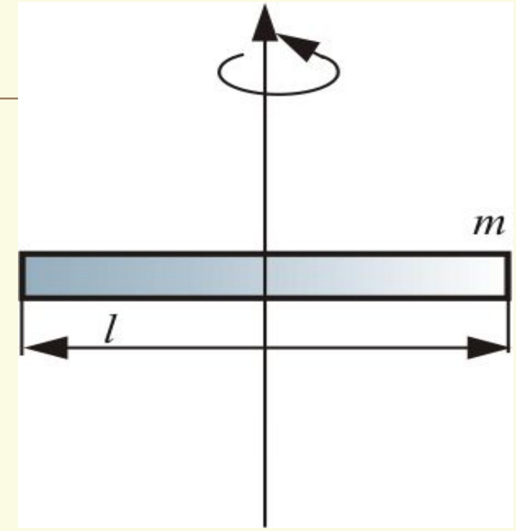
В этом случае прежний интеграл нужно рассмотреть в пределах от 0 до l:

$$I_{z'} = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^l = \frac{ml^2}{3}$$

Моменты инерции **шара, сферы, диска, обруча и стержня**.







Шар

$$k = 2/5;$$

$$I_c = 2/5 \cdot m \cdot R^2;$$

Диск

$$k = 1/2;$$

$$I_c = 1/2 \cdot m \cdot R^2;$$

Стержень

$$k = \frac{1}{12}$$

$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

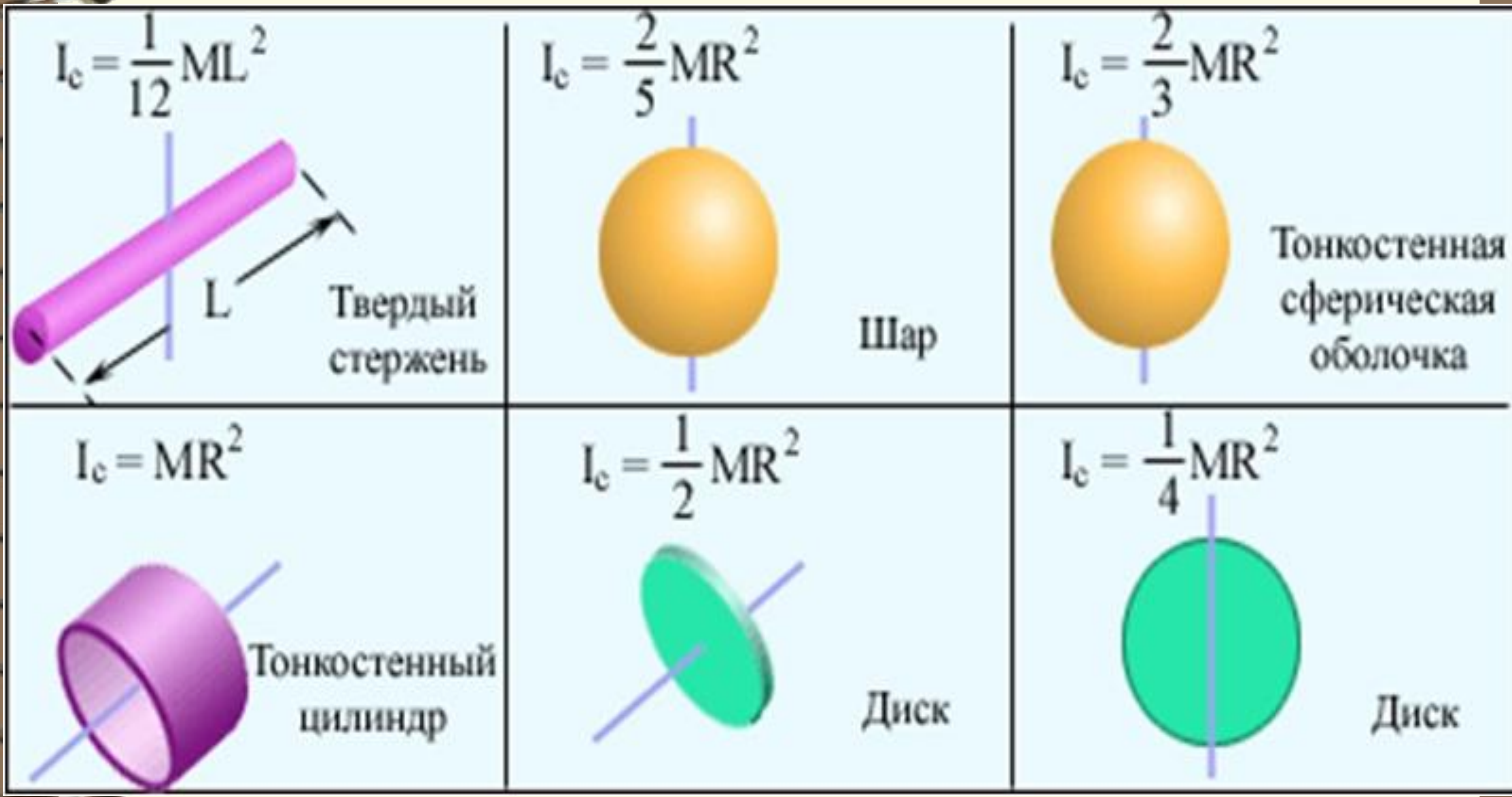
Сфера

$$I_c = 2/3 \cdot m \cdot R^2;$$

Обруч

$$I_c = m \cdot R^2$$

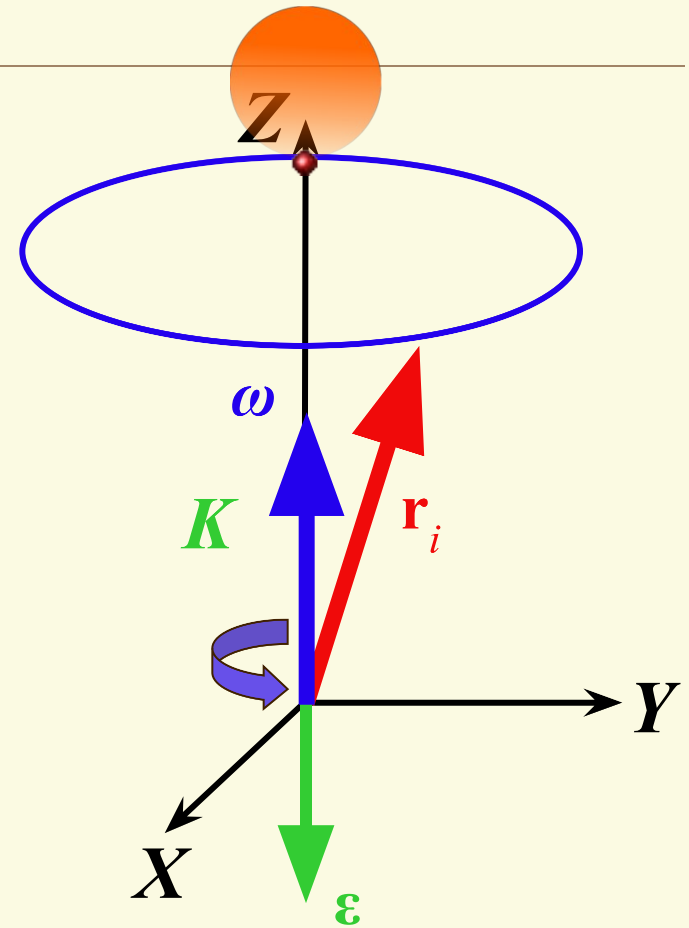
Моменты инерции некоторых тел



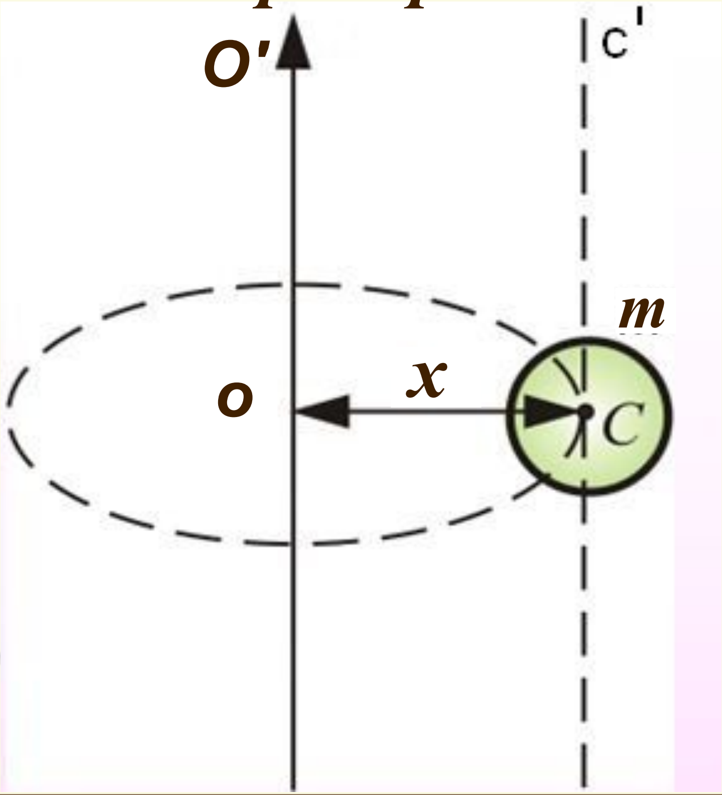
Теорема Гюйгенса-Штейнера

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции, следует пользоваться ***теоремой о параллельном переносе осей или <u>теоремой Гюйгенса-Штейнера</u>***

$$\boxed{I = I_c + mx^2}$$

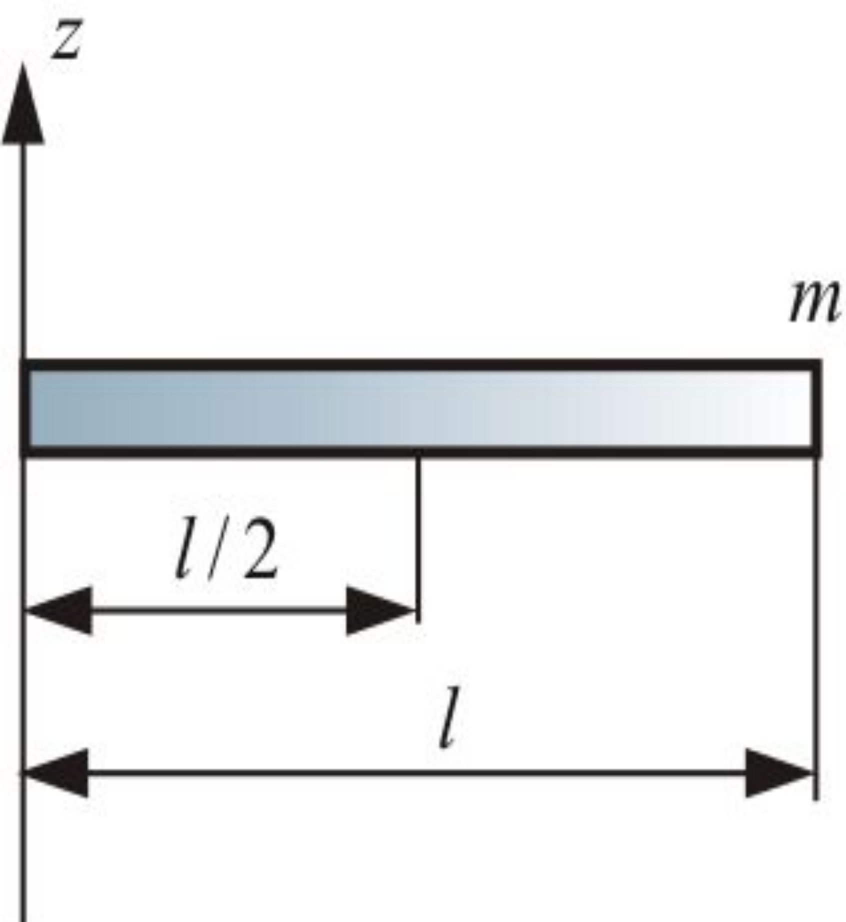


Теорема Гюйгенса-Штейнера: *Момент инерции тела относительно произвольной оси I равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями:*



$$I = I_c + mx^2,$$

где x — расстояние между осями.



Пример: стержень массой *m*, длиной *l*, вращается вокруг оси, проходящей **<u>через конец</u>** стержня .

$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_z = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

$$\boxed{\varepsilon = \frac{M}{J}}$$

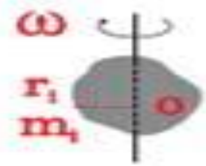
$\varepsilon \sim M$

$\varepsilon \sim \frac{M}{J}$

МОМЕНТ СИЛЫ

$$M = Fr\sin\alpha = F_2 r = Fd$$

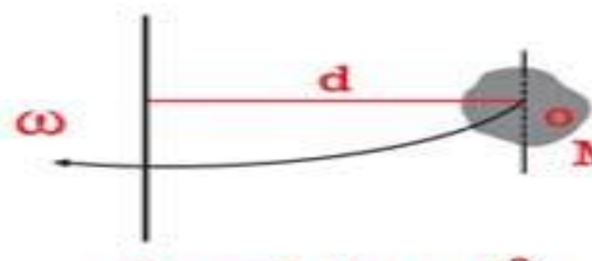
МОМЕНТ ИНЕРЦИИ



$$J_O = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

O - центр масс

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА



$$J_d = J_o + md^2$$


ЛЕКЦИЯ ЗАКОНЧЕНА!