Исследование расположения корней квадратного уравнения в задачах с параметрами

Выполнил*: Галкин Сергей Андреевич*
Руководитель: *Малей Н.И.*

МКОУ Ермоловская СОШ
Лискинский район
2013г.

Цель: Сформулировать и обосновать утверждения о расположении корней квадратного уравнения и показать применение полученных утверждений для решения задач с параметрами.

Задачи:

- Изучить литературу по данной теме.
- Сформулировать утверждения и дать геометрическую интерпретацию.

В последнее время в материалах выпускных экзаменов, ЕГЭ в задачах повышенной сложности предлагаются задания по теме «Уравнения с параметрами»

Особую роль среди уравнений с параметрами играют задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения.

Рассмотрим два наиболее распространённых типа таких задач

1-ый тип задачи в которых изучается расположение корней относительно заданной точки.

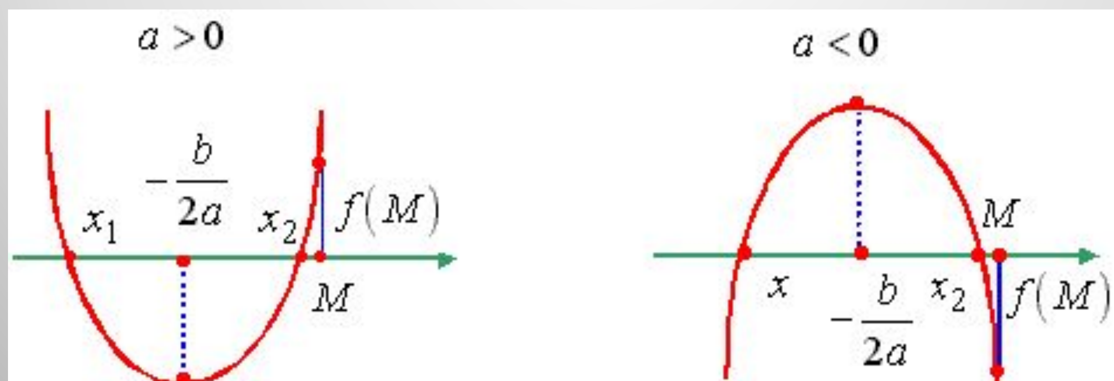
2-ой тип задачи в которых исследуется расположение корней относительно числового промежутка

Утверждение 1.

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) > 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < M, \\ f(M) < 0. \end{cases}$$



Пример 1:

Найти все значения параметра а, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2+4ax+(1-2a+4a^2)=0$ меньше -1.

Решение:

Рассмотрим функцию $y=x^2+4ax+1(1-2a+4a^2)$

$$\begin{cases} 16a^2-4+8a-16a^2>0 \\ -4a/2<-1 \\ 1-4a+(1-2a+4a^2)>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>1/2 \\ 2a^2-3a+1>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+8a>0 \\ a>1/2 \\ 4a^2-6a+2>0 \end{cases}$$

Ответ: $(1; +\infty)$.

Утверждение 2.

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0; \end{cases}$$

Пример 2:

Найти все значения параметра m $(m \neq 0)$, при каждом из которых один корень уравнения $2mx^2-2x-3m-2=0$ больше 1,а другой меньше 1.

Решение:

$2mf(1)<0.$

$2m(2m-2-3m-2)<0$

$-2m^2-8<0$

$-2m(m+4)<0$

$m(m+4)>0$

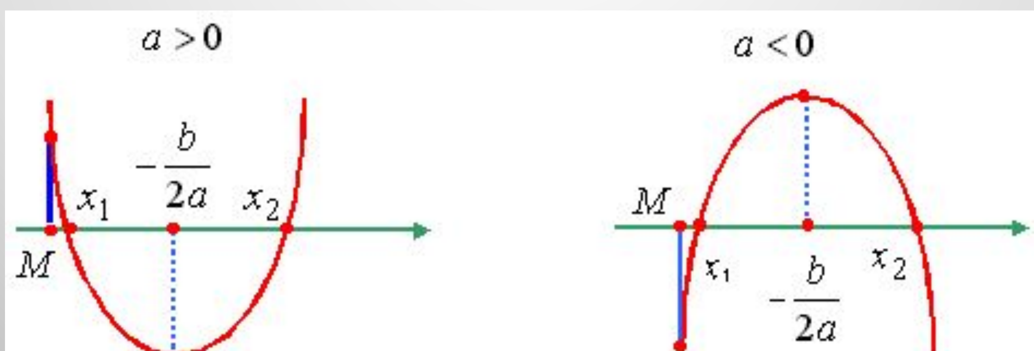
Ответ: $(-\infty; -4)U(0; +\infty)$.

Утверждение 3.

$$\begin{cases} a>0 \\ D\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}>M, \\ f(M)>0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a<0 \\ D\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}>M, \\ f(M)<0. \end{cases}$$



Пример 3:

Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-6ax+(2-2a+9a^2)=0$ больше 3

Решение: $f(x)=x^2-6ax+(2-2a+9a^2)$

$$\begin{cases} f(3)>0 \\ D>0 \\ -b/2a>3 \end{cases} \quad \begin{cases} 9a^2-20a+11>0 \\ 8a-8>0 \\ a>1 \end{cases} \quad \begin{cases} a>11/9; a<1 \\ a>1 \end{cases}$$

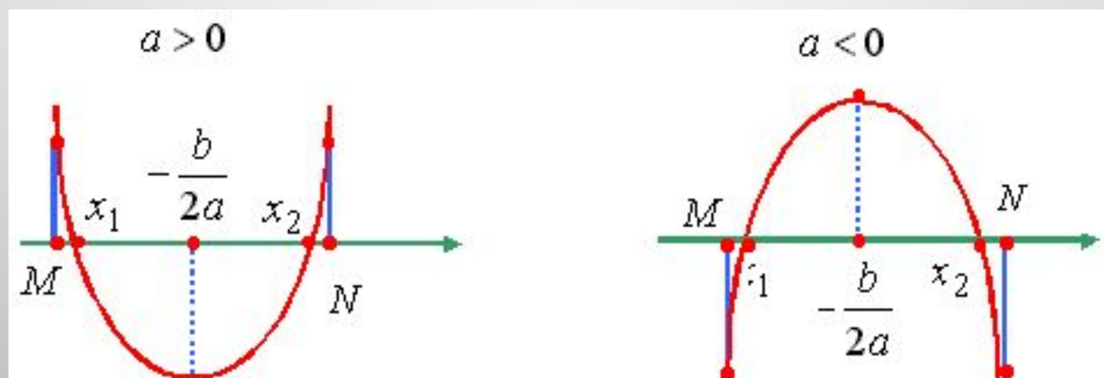
Ответ: a>11/9

Утверждение 4.

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$



Пример 4:

При каких значениях m корни уравнения $4x^2-(3m+1)x-m-2=0$ лежат в промежутке между -1 и 2?

Решение:

$$\begin{cases} D > 0 \\ -1 < (3m+1)/8 < 2 \\ f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9m^2+22m+33 \triangleright 0 \\ -9 < 3m < 15 \\ 2m+3 > 0 \\ -7m+12 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 < m < 5 \\ m > -3/2 \\ m < 12/7 \end{cases}$$

$-3/2<m<12/7$

Ответ: $(-3/2;\ 12/7)$.

Утверждение 5.

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

(при этом меньший корень лежит вне отрезка [M, N]).

5.Найти все значения а, для которых при каждом х из промежутка (-3; -1] значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2 \neq ax^2$ (задача С3 из ЕГЭ).

Решение:

1.Значения указанных выражений не равны друг другу тогда и только тогда,когда выполнено условие:

$$x^4 - 8x^2 - 2 \neq ax^2$$

Обозначим $t=x^2$, тогда $t^2-8t-2 \neq at$.

$t^2-8t-at-2=t^2-(a+8)t-2 \neq 0$

$f(t)=t^2-(a+8)t-2 \neq 0$

Следовательно, в задаче требуется, чтобы уравнение $f(t)=0$ не имело корней на промежутке [1;9).

2.График функции y=f(t) есть парабола, ветви которой направлены вверх и f(0)=-2. Поэтому квадратный трёхчлен f(t) имеет 2 корня t1<0, t2>0

Больший корень уравнения лежит [1;9)

Значит

$$\begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(9) \square 0 \end{cases}$$

3.Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 1 \ -(a+8)-2 \le 0 \\ 9^2 - 9(a+8) - 2 \square 0 \end{cases}$$

решением системы является промежуток [-9; 7/9), поэтому решением данного уравнения также является [-9; 7/9).

Следовательно, уравнение f(t) не имеет корней при всех a,не принадлежащих этому промежутку, то есть когда a<-9 или a≥7/9.

Ответ: a<-9, a≥7/9.

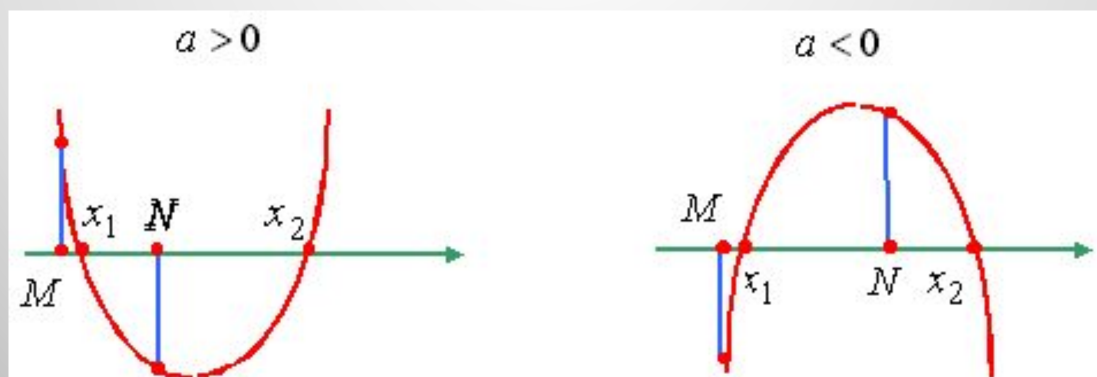
Утверждение 6.

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$$

(при этом больший корень лежит вне отрезка [M, N]).



Пример 6:

Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-6ax+(2-2a+9a^2)=0$ больше 3

Решение:

$$\begin{cases} Af(M)>0 \\ D>0 \\ -b/2a>M \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(9-18a^2+(2-2a+9a^2) \\ 36a^2-4(2-2a+9a^2)>0 \\ \dfrac{6a}{2}>3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a-20a+11>0 \\ 8a-8>0 \\ a>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>11/9; a<1 \\ a>1 \end{cases}$$

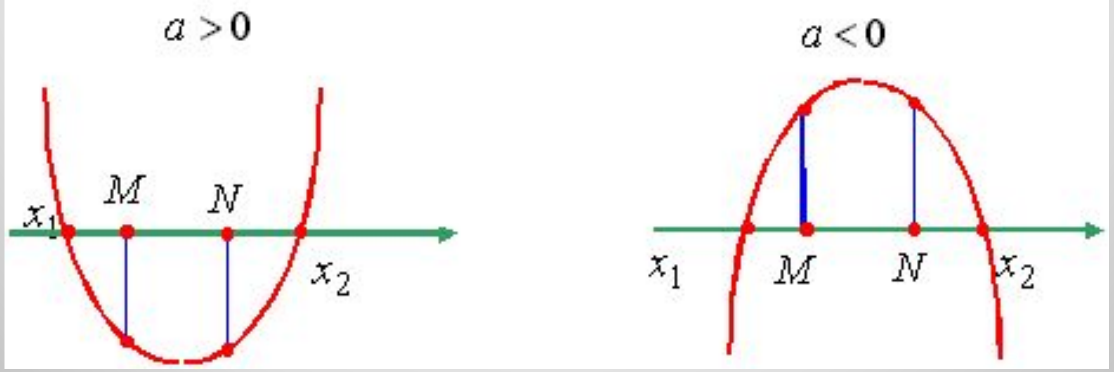
Ответ: a>11/9

Утверждение 7.

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$$



Пример 7 : При каких значениях параметра а один корень уравнения $x^2-(3a+2)x+2a-1=0$ меньше -1, а другой больше 2.

Решение:

$$\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(2)<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+3a+2+2a-1<0 \\ 4-6a-4+2a-1<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a<-2 \\ -4a<1 \end{cases} \quad \begin{cases} a<-2/5 \\ a>-1/4 \end{cases}$$

Ответ: решений нет.

Заключение

В процессе исследования были рассмотрены основные случаи расположения корней квадратного уравнения приведены утверждения, к которым даны иллюстрации, помогающие понять, как выводятся эти утверждения. Данный материал облегчит понимание решений заданий, содержащих параметры о расположении корней квадратного уравнения. Он может быть использован для индивидуального обучения, а также на внеклассных и факультативных занятиях по математике.

Литература

1. Задачи с параметрами П.И. Горнштейн, .Б. Полонский, М.С. Якир
2. Тетрадь-конспект по алгебре, авторы Ершова А.П., Голобородько В.В. и др.
3. Рабочая тетрадь для подготовки к итоговой аттестации по математике в новой форме (Негосударственное образовательное учреждение «Интернациональные коммуникации»)
4. Школа решение задач с параметрами, авторы Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н.