Высказывания

Глава 1.
§ 1.1. Высказывания и операции над ними

Алгебра высказываний – раздел математической логики, в котором изучаются операции над высказываниями.
Под высказыванием будем понимать повествовательное предложение, которое однозначно характеризуется как истинное или ложное.
Таким образом, каждое высказывание имеет только одно из двух значений – истина или ложь. Для их обозначения будем использовать буквы «И», «Л» соответственно, а сами значения называть истинностными значениями.
Рассмотрим следующие предложения:
1) все студенты математических факультетов педвузов должны изучать математическую логику;
2) $7 \times 7 = 47$;
3) $7 \times 7 = ?$ (Чему равно 7×7?);
4) $7 \times x = 21$.

Конъюнкцией высказываний А и В называют высказывание «А и В». Его считают истинным тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания А и В. (От лат. conjunctio - «соединение, союз, связь», А□В).

Дизъюнкцией высказываний А и В называют высказывание «А или В». Его считают истинным тогда и только тогда, когда истинно по крайней мере одно из высказываний А и В.(От лат. disjunctio - «разъединение, разобщение». А□В)

Отметим, что союз или в дизъюнкции высказываний носит не взаимоисключающий характер

.

Импликацией высказываний А и В называют высказывание «Если А, то В». Его считают ложным тогда и только тогда, когда высказывание А истинно, а высказывание В ложно. При этом высказывание А называют посылкой, а В – заключением. Обозначают импликацию «Если А, то В» так: $A \rightarrow B$. (От лат. implico - «тесно связывать»)

Отрицанием высказывания А называют высказывание «Неверно, что А (не А)». Это высказывание считают истинным тогда и только тогда, когда высказывание А ложно . $\neg A$

Операция **эквиваленции** $A \sim B$ определяется так: $A \sim B$ истинно т. и т. т., когда А и В или оба истинны или оба ложны.

Часто для обозначения операций над высказываниями используют символы

/\ (&),v, ¬, →,~(↔)

Примеры:

1. «2 - простое число, и 2 - четное число» - истинное высказывание, как конъюнкция двух истинных высказываний.
2. «2 - простое число, или 2 - четное число» - истинное высказывание, как дизъюнкция двух истинных высказываний.
3. «2 меньше 3, или 2 равно 3» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным первым членом.
4. «2 меньше 2, или 2 равно 2» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным вторым членом.
5. «Если 2 - простое число, то 2 - четное число» - истинное высказывание, как импликация, посылка и заключение которой - истинные высказывания.
6. «Неверно, что 2 - простое число» - ложное высказывание, как отрицание истинного высказывания.

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста.

При формальной записи сложного высказывания всегда нужно исходить из его содержания. До тех пор пока не определена логическая структура сложного высказывания, его нельзя формально описывать. Правила исполнения логических операций над сложными высказываниями. на основе заданных логических связок и пропозициональных переменных формирует алгебру высказываний.

Часто для обозначения операций над высказываниями используют символы

/\ (&),v, ¬, →,~(↔)

Примеры:

1. «2 - простое число, и 2 - четное число» - истинное высказывание, как конъюнкция двух истинных высказываний.
2. «2 - простое число, или 2 - четное число» - истинное высказывание, как дизъюнкция двух истинных высказываний.
3. «2 меньше 3, или 2 равно 3» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным первым членом.
4. «2 меньше 2, или 2 равно 2» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным вторым членом.
5. «Если 2 - простое число, то 2 - четное число» - истинное высказывание, как импликация, посылка и заключение которой - истинные высказывания.
6. «Неверно, что 2 - простое число» - ложное высказывание, как отрицание истинного высказывания.

Логическая связка указывает на необходимость исполнения логической операции над пропозициональными переменными или формулами, окружающими логическую связку.
Логические операции бывают унарные (или одноместные) и бинарные (или двухместные). Этому отвечает наличие одного или двух операндов у данной операции.
Значение формулы полностью определяется значениями входящих в нее пропозициональных переменных.
Значения логических операций также принадлежат множеству {и; л}.
Все значения логической формулы в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть полностью описаны с помощью таблицы истинности.

Часто для обозначения операций над высказываниями используют символы

/\ (&),v, ¬, →,~(↔)

Примеры:

1. «2 - простое число, и 2 - четное число» - истинное высказывание, как конъюнкция двух истинных высказываний.
2. «2 - простое число, или 2 - четное число» - истинное высказывание, как дизъюнкция двух истинных высказываний.
3. «2 меньше 3, или 2 равно 3» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным первым членом.
4. «2 меньше 2, или 2 равно 2» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным вторым членом.
5. «Если 2 - простое число, то 2 - четное число» - истинное высказывание, как импликация, посылка и заключение которой - истинные высказывания.
6. «Неверно, что 2 - простое число» - ложное высказывание, как отрицание истинного высказывания.

Часто для обозначения операций над высказываниями используют символы

/\ (&),v, ¬, →,~(↔)

Примеры:

1. «2 - простое число, и 2 - четное число» - истинное высказывание, как конъюнкция двух истинных высказываний.
2. «2 - простое число, или 2 - четное число» - истинное высказывание, как дизъюнкция двух истинных высказываний.
3. «2 меньше 3, или 2 равно 3» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным первым членом.
4. «2 меньше 2, или 2 равно 2» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным вторым членом.
5. «Если 2 - простое число, то 2 - четное число» - истинное высказывание, как импликация, посылка и заключение которой - истинные высказывания.
6. «Неверно, что 2 - простое число» - ложное высказывание, как отрицание истинного высказывания.

Часто для обозначения операций над высказываниями используют символы

/\ (&),v, ¬, →,~(↔)

Примеры:

1. «2 - простое число, и 2 - четное число» - истинное высказывание, как конъюнкция двух истинных высказываний.
2. «2 - простое число, или 2 - четное число» - истинное высказывание, как дизъюнкция двух истинных высказываний.
3. «2 меньше 3, или 2 равно 3» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным первым членом.
4. «2 меньше 2, или 2 равно 2» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным вторым членом.
5. «Если 2 - простое число, то 2 - четное число» - истинное высказывание, как импликация, посылка и заключение которой - истинные высказывания.
6. «Неверно, что 2 - простое число» - ложное высказывание, как отрицание истинного высказывания.

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л								
Л	Л	Л	И								
Л	Л	И	Л								
Л	Л	И	И								
Л	И	Л	Л								
Л	И	Л	И								
Л	И	И	Л								
Л	И	И	И								
И	Л	Л	Л								
И	Л	Л	И								
И	Л	И	Л								
И	Л	И	И								
И	И	Л	Л								
И	И	Л	И								
И	И	И	Л								
И	И	И	И								

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И							
Л	Л	Л	И	И							
Л	Л	И	Л	Л							
Л	Л	И	И	Л							
Л	И	Л	Л	И							
Л	И	Л	И	И							
Л	И	И	Л	Л							
Л	И	И	И	Л							
И	Л	Л	Л	И							
И	Л	Л	И	И							
И	Л	И	Л	Л							
И	Л	И	И	Л							
И	И	Л	Л	И							
И	И	Л	И	И							
И	И	И	Л	Л							
И	И	И	И	Л							

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л						
Л	Л	Л	И	И	Л						
Л	Л	И	Л	Л	Л						
Л	Л	И	И	Л	Л						
Л	И	Л	Л	И	Л						
Л	И	Л	И	И	Л						
Л	И	И	Л	Л	Л						
Л	И	И	И	Л	Л						
И	Л	Л	Л	И	Л						
И	Л	Л	И	И	И						
И	Л	И	Л	Л	Л						
И	Л	И	И	Л	И						
И	И	Л	Л	И	Л						
И	И	Л	И	И	И						
И	И	И	Л	Л	Л						
И	И	И	И	Л	И						

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л	Л					
Л	Л	Л	И	И	Л	Л					
Л	Л	И	Л	Л	Л	И					
Л	Л	И	И	Л	Л	И					
Л	И	Л	Л	И	Л	И					
Л	И	Л	И	И	Л	И					
Л	И	И	Л	Л	Л	И					
Л	И	И	И	Л	Л	И					
И	Л	Л	Л	И	Л	Л					
И	Л	Л	И	И	И	Л					
И	Л	И	Л	Л	Л	И					
И	Л	И	И	Л	И	И					
И	И	Л	Л	И	Л	И					
И	И	Л	И	И	И	И					
И	И	И	Л	Л	Л	И					
И	И	И	И	Л	И	И					

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	И				
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И				
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И				
Л	Л	И	И	Л	Л	И	И				
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И				
Л	И	Л	И	И	Л	И	И				
Л	И	И	Л	Л	Л	И	И				
Л	И	И	И	Л	Л	И	И				
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л				
И	Л	Л	И	И	И	Л	Л				
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И				
И	Л	И	И	Л	И	И	И				
И	И	Л	Л	И	Л	И	И				
И	И	Л	И	И	И	И	И				
И	И	И	Л	Л	Л	И	И				
И	И	И	И	Л	И	И	И				

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	И	И			
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И			
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И			
Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И			
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л			
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И			
Л	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л			
Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И			
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	И			
И	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И			
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И			
И	Л	И	И	Л	И	И	И	И			
И	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л			
И	И	Л	И	И	И	И	И	И			
И	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л			
И	И	И	И	Л	И	И	И	И			

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	И	И	И		
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И		
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И		
Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И		
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И		
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И	И		
Л	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И		
Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И	И		
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И		
И	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	И		
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И		
И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	Л		
И	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И		
И	И	Л	И	И	И	И	И	И	И		
И	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И		
И	И	И	И	Л	И	И	И	И	Л		

A	B	C	D	¬ C	4/\1	2v3	1→7	2→4	6→5	8/\9	11/\12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	И	И	И	И	
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	
Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	И	
Л	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	
Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л	
И	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	И	Л	
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	
И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И	
И	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	
И	И	Л	И	И	И	И	И	И	И	И	
И	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	
И	И	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И	

A	B	C	D	¬ C	4∧1	2v3	1→7	2→4	6→5	8∧9	11∧12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	И	И
Л	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	И	И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И	Л

Логические связки по силе и значимости могут быть упорядочены так: отрицание, коньюнкция, дизьюнкция, импликация, эквиваленция. То есть самой сильной связкой является отрицание, затем коньюнкция, дизьюнкция, импликация и, наконец, эквиваленция. Зная правила о силе логических связок, можно опускать те пары скобок, без которых ясен порядок исполнения логических операций.