ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Общее уравнение плоскости
- Уравнение плоскости в отрезках
- Уравнение плоскости, проходящей через три точки
- Угол между двумя плоскостями
- Расстояние от точки до плоскости

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Если в пространстве фиксирована произвольная декартова система координат *Oxyz*, то всякое уравнение первой степени с тремя переменными *x y z* определяет относительно этой системы плоскость.

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad \textbf{(1)}$$

Общее уравнение плоскости

A; B; C; D – некоторые постоянные, причем из чисел *A; B; C* хотя бы одно отлично от нуля.

Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит плоскости:

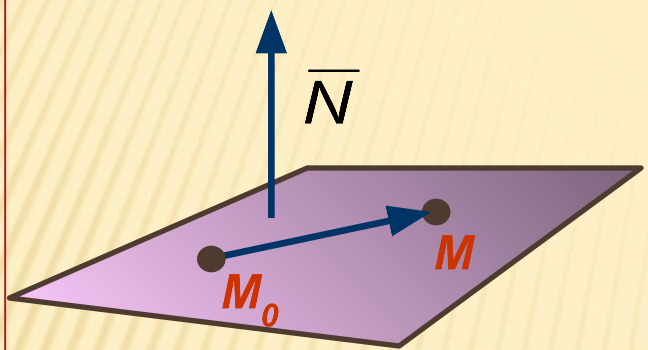
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Вычтем из уравнения *(1)* тождество *(2)*:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \quad \textbf{(3)}$$

Общее уравнение плоскости

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ



Произвольная точка $M(x;\, y;\, z)$ лежит на плоскости, если ее координаты удовлетворяют уравнению (3):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Уравнение (3) является условием перпендикулярности двух векторов:

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0;\, y - y_0;\, z - z_0\} \quad \text{и} \quad \boxed{\overline{N} = \{A; B; C\}}$$

Нормальный вектор плоскости

Таким образом, точка M лежит в плоскости, если $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$.

Значит $\overline{N}$ перпендикулярен любому вектору, лежащему в плоскости и, следовательно, самой плоскости.

Общее уравнение плоскости называется <u>полным</u>, если все коэффициенты $A;\, B;\, C;\, D$ отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется <u>неполным</u>.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Виды неполных уравнений:

1) $D = 0;$ $Ax + By + Cz = 0$ Плоскость проходит через точку O.

2) $A = 0;$ $By + Cz + D = 0$ $\parallel (OX)$

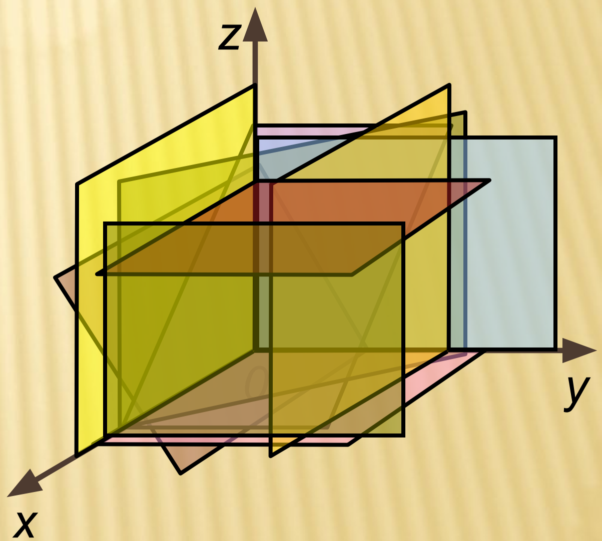
3) $B = 0;$ $Ax + Cz + D = 0$ $\parallel (OY)$

4) $C = 0;$ $Ax + By + D = 0$ $\parallel (OZ)$

5) $A = 0; B = 0$ $Cz + D = 0$ $\parallel (XOY)$

6) $B = 0; C = 0$ $Ax + D = 0$ $\parallel (YOZ)$

7) $A = 0; C = 0$ $By + D = 0$ $\parallel (XOZ)$



8) $B = 0; C = 0; D = 0$ $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ (YOZ)

9) $A = 0; C = 0; D = 0$ $By = 0 \Rightarrow y = 0$ (XOZ)

10) $A = 0; B = 0; D = 0$ $Cz = 0 \Rightarrow z = 0$ (XOY)

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ОТРЕЗКАХ

Рассмотрим полное уравнение плоскости:

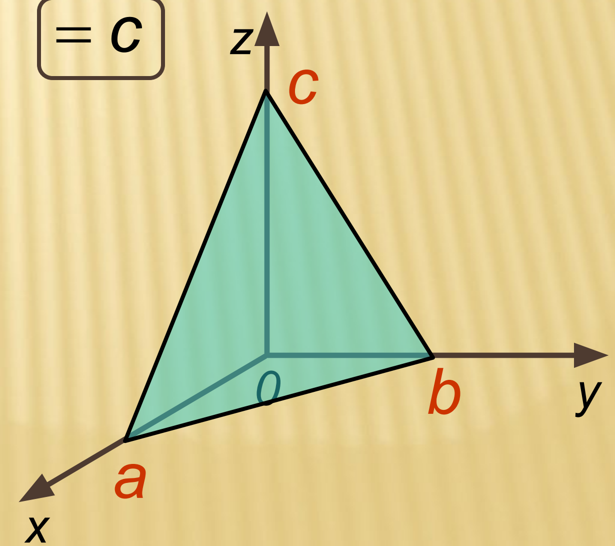
$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz = -D \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

$$\boxed{=a} \qquad \boxed{=b} \qquad \boxed{=c}$$

Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение в отрезках используется для построения плоскости, при этом a, b и c – отрезки, которые отсекает плоскость от осей координат.



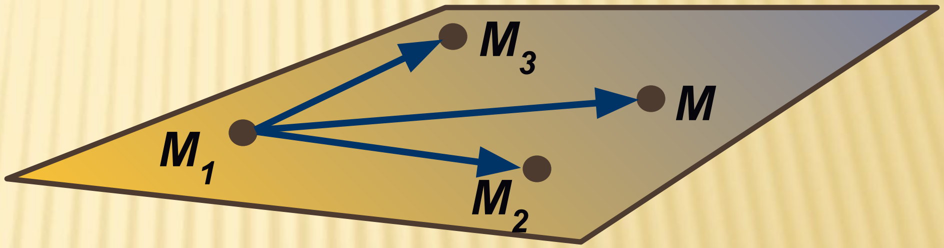
Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть точки ***$M_1(x_1; y_1; z_1)$***, ***$M_2(x_2; y_2; z_2)$*** и ***$M_3(x_3; y_3; z_3)$*** не лежат на одной прямой.

Тогда векторы: $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и

$\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ не коллинеарны.

Точка ***$M(x; y; z)$*** лежит в одной плоскости с точками ***M_1***, ***M_2*** и ***M_3*** только в том случае, если векторы:



$\overline{M_1M_2}; \overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ компланарны.

$$\left(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2}\right) \cdot \overline{M_1M_3} = \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

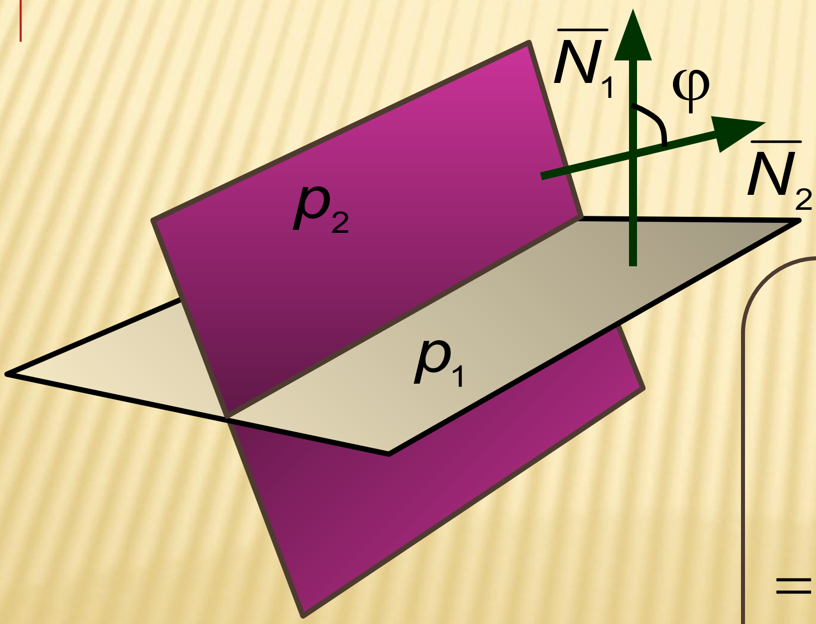
Угол между двумя плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Углом между этими плоскостями называется угол между нормальными векторами к этим плоскостям.



$$\overline{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

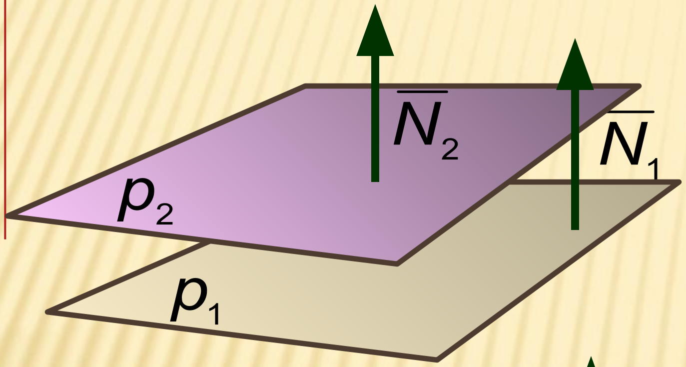
$$\overline{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} =$$

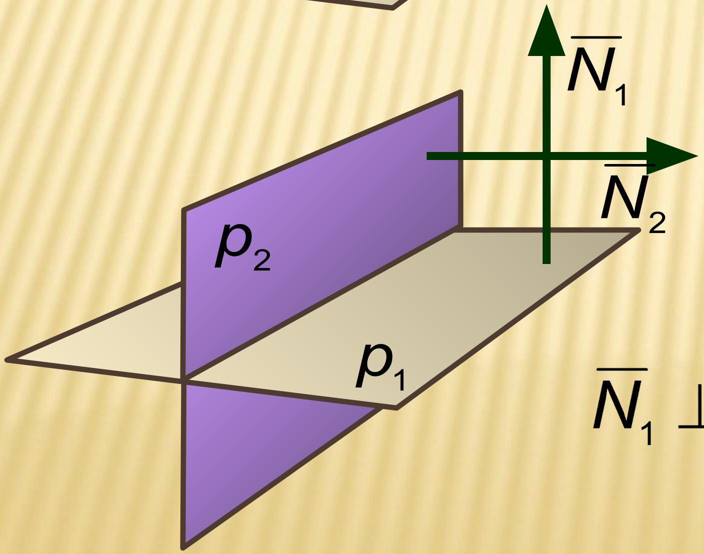
$$= \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей аналогичны условию параллельности и перпендикулярности нормальных векторов:



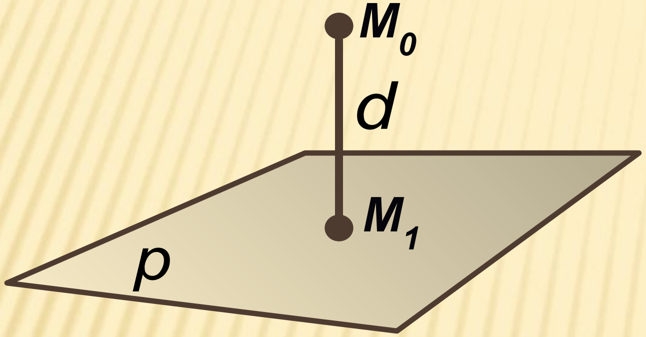
$$\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$



$$\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0}$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на плоскость $p: \; Ax + By + Cz + D = 0$



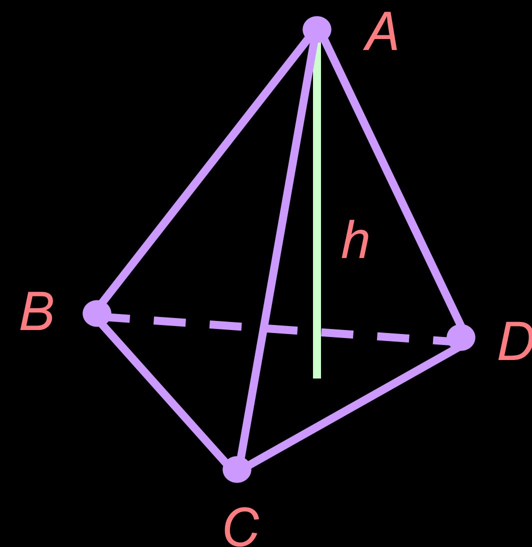
$$d = \left| M_1M_0 \right|$$

$$\boxed{d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Пример

Найти длину высоты тетраэдра *ABCD* , опущенной из точки А.

Координаты вершин: *A(1; 1; 1), B(0; 2; 5), C(3; -1; 4), D(4; 2; 1)*



Уравнение плоскости *BCD*:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-5 \\ 3-0 & -1-2 & 4-5 \\ 4-0 & 2-2 & 1-5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + (z-5) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

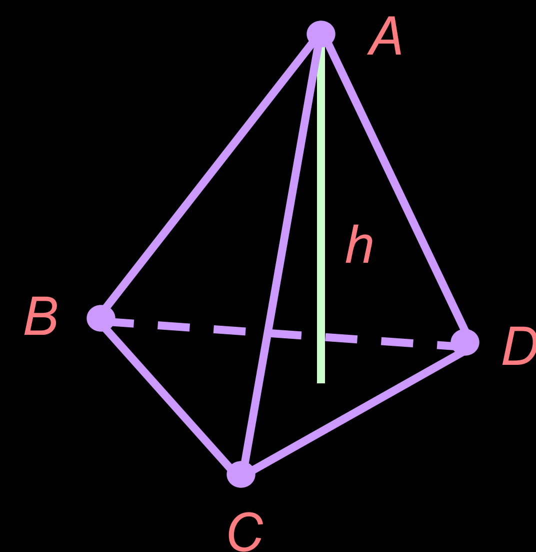
$$12x + 8(y-2) + 12(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x + 2y + 3z - 19 = 0}$$

ПРИМЕР

Расстояние от точки *A* до плоскости BCD:

$$h = \frac{|3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 19|}{\sqrt{9+4+9}} \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{11}{\sqrt{22}} \approx 2.34}$$

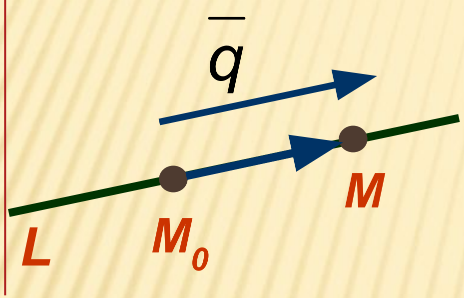


Прямая в пространстве

- Каноническое уравнение прямой
- Параметрическое уравнение прямой
- Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей
- Угол между двумя прямыми
- Угол между прямой и плоскостью
- Условие принадлежности двух прямых одной плоскости
- Точка пересечения прямой и плоскости

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая L проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору: $\overline{q} = \{m; n; p\}$



Тогда точка $M\,(x; y; z)$ лежит на прямой только в том случае, если векторы $\overline{q} = \{m; n; p\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны

По условию коллинеарности двух векторов:

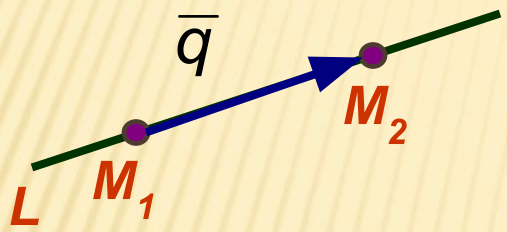
$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

Каноническое уравнение прямой

$\overline{q} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: ***$M_1(x_1; y_1; z_1)$*** и ***$M_2(x_2; y_2; z_2)$***.



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Параметрическое уравнение прямой

При решении многих практических задач используют параметрическое уравнение прямой, которое получается из канонического уравнения:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \\ \dfrac{z-z_0}{p}=t \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}}$$

Параметрическое уравнение прямой

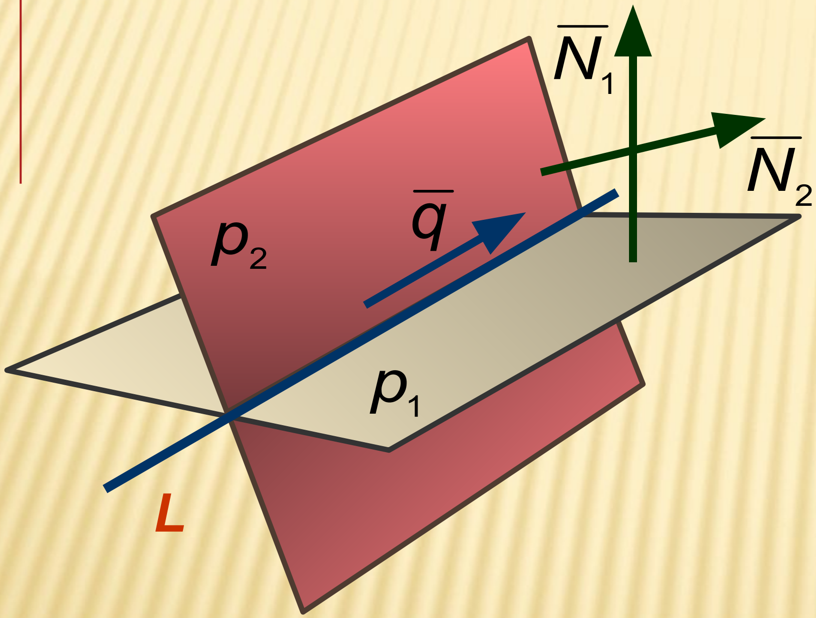
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, КАК ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Пусть две непараллельные плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Эти плоскости определяют единственную прямую в пространстве:



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей

$$\left.\begin{aligned} \overline{q} \perp \overline{N}_1 \\ \overline{q} \perp \overline{N}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \overline{q} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2$$

ПРИМЕР

Написать каноническое уравнение прямой: $\begin{cases} 2x+3y-z+2=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$

Найдем точку, принадлежащую прямой, то есть удовлетворяющую системе уравнений.

Пологая z равному любому числу, например, z = 0, получим:

$$\begin{cases} 2x+3y+2=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow$$

Точка $M_0(11; -8; 0)$ – принадлежит прямой

Найдем координаты направляющего вектора прямой:

$$\bar{q} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$$

$$\boxed{\frac{x-11}{4} = \frac{y+8}{-3} = \frac{z}{-1}}$$

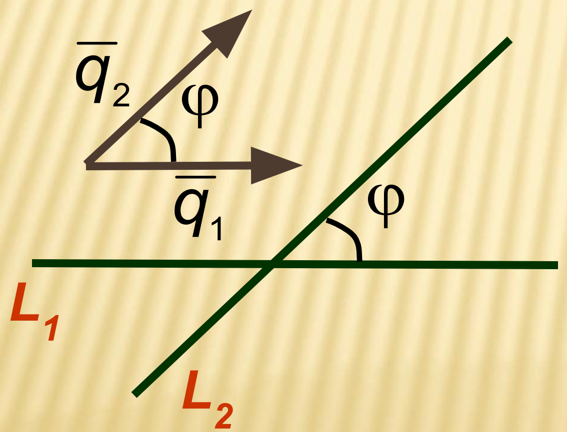
УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Углом между этими прямыми называется угол между направляющими векторами к этим прямым.

$$\overline{q}_1=\{m_1; n_1; p_1\} \qquad \overline{q}_2=\{m_2; n_2; p_2\}$$



$$\cos\varphi=\frac{|\overline{q}_1\cdot\overline{q}_2|}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_2|}=$$

$$=\frac{|m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$$L_1 \parallel L_2 \iff \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

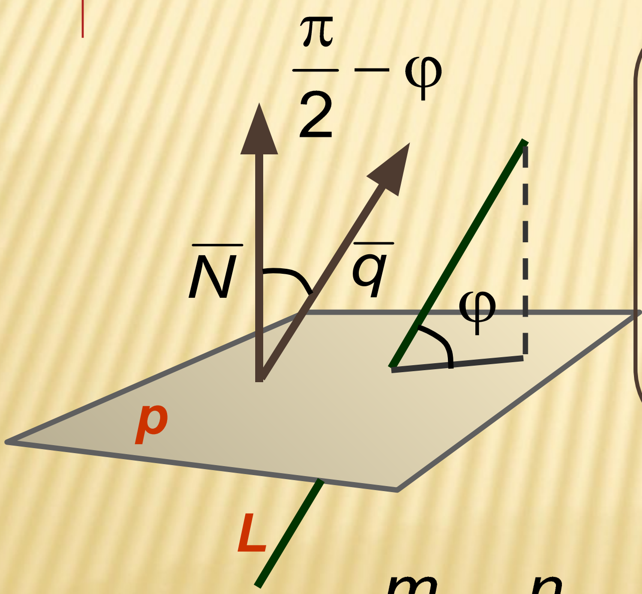
$$L_1 \perp L_2 \iff m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть прямая **L** задана каноническим уравнением: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$

Плоскость **p** задана общим уравнением: $Ax+By+Cz+D=0$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и проекцией этой прямой на плоскость.



$$\cos(\overline{q},\overline{N})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\left|\overline{q}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{q}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|}=$$

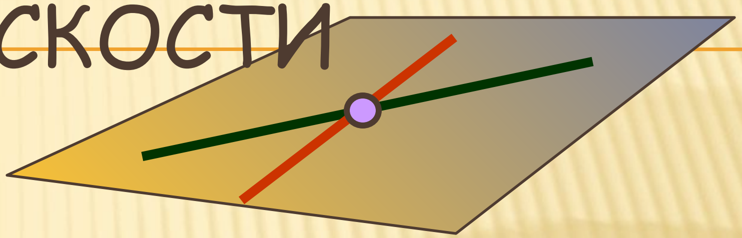
$$=\frac{\left|m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$L\perp p\;\Leftrightarrow\;\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

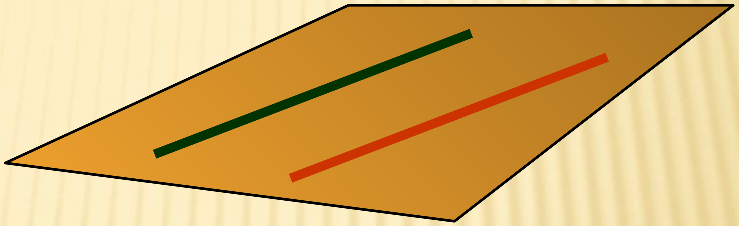
$$L\,\|\,p\;\Leftrightarrow\;m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C=0$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

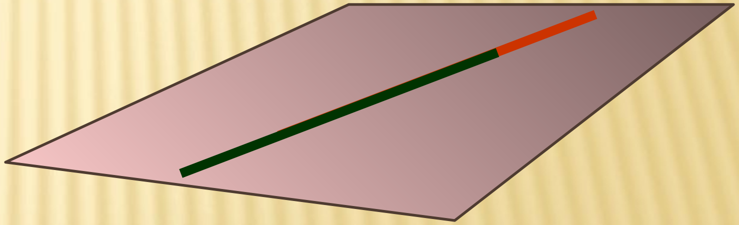
Две прямые в пространстве могут пересекаться,



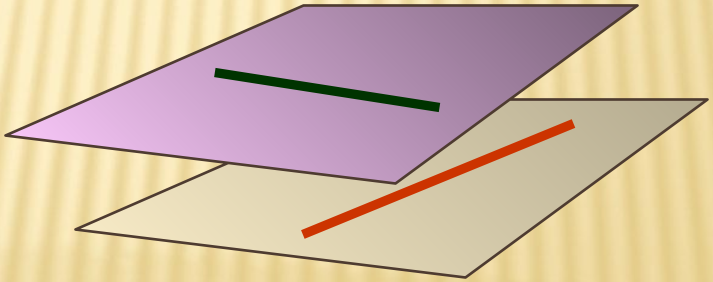
быть параллельными,



совпадать,



и скрещиваться.

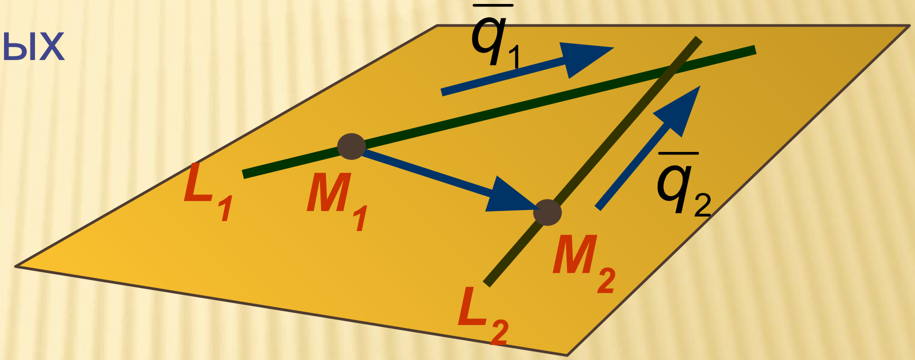


В первых трех случаях прямые лежат в одной плоскости.

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$



Для принадлежности двух прямых одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора:

$$\overline{q}_1=\{m_1; n_1; p_1\}$$

$$\overline{q}_2=\{m_2; n_2; p_2\}$$

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$$

были компланарны.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

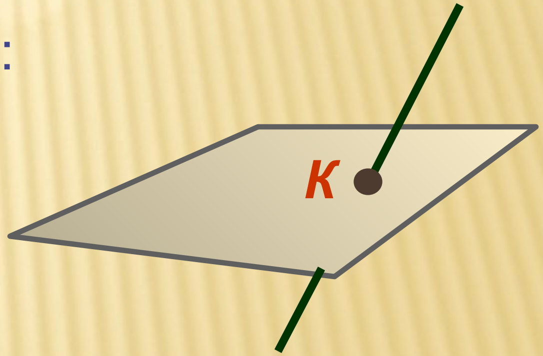
Точка пересечения прямой и плоскости

При вычислении координат точки пересечения прямой и плоскости

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad p: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

следует совместно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \end{cases}$$



При этом необходимо:

- Записать уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Точка пересечения прямой и плоскости

- Подставить в уравнение плоскости вместо ***x; y; z***:

$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0$$

- Решить полученное уравнение относительно ***t***:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

- Подставить t_0 в параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x_K = mt_0 + x_0 \\ y_K = nt_0 + y_0 \\ z_K = pt_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow \quad K(x_K; y_K; z_K)$$

ПРИМЕР

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1} \qquad y+5z+6=0$$

Напишем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=5t \\ z=t+2 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости:

$$5t+5(t+2)+6=0 \quad \Rightarrow \quad 10t+16=0 \quad \Rightarrow \quad t_0=-1.6$$

Подставим в уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=3\cdot(-1.6)+1 \\ y=5\cdot(-1.6) \\ z=-1.6+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3.8 \\ y=-8 \\ z=0.4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(-3.8;-8;0.4)}$$