Тема 3

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

КОМБИНАТОРИКА

- РАЗДЕЛ МАТЕМАТИКИ, В КОТОРОМ ИЗУЧАЮТСЯ ВОПРОСЫ О ТОМ, СКОЛЬКО РАЗЛИЧНЫХ КОМБИНАЦИЙ, ПОДЧИНЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМ УСЛОВИЯМ, МОЖНО СОСТАВИТЬ ИЗ ЗАДАННЫХ ОБЪЕКТОВ.

ВЫБОРКА

- Выборкой объемом k из множества называется всякая последовательность из k элементов множества .
- Если элементы в выборке не повторяются, то выборка называется **<u>бесповторной</u>**, иначе – **<u>выборкой с повторениями</u>** .
- При бесповторной выборке все равно, каким образом осуществляется выбор: берутся все элементы сразу, или же поочередно (по одному).

Упорядочение

- Расположение элементов выборки в определенном порядке называется **упорядочением** , при этом выборка называется **упорядоченной**, в противном случае – **неупорядоченной**.

Правило сложения

- Если выбор каждого из объектов

$$a_i \ (i = 1,2, \dots k)$$

$$a_1 \ , a_2, \dots , a_k$$

можно выполнить n_i способами, то выбор «или a_1, или a_2 …, или a_k » можно произвести $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

- **Пример.** Из пункта А в пункт В можно добраться самолетом, поездом, автобусом. При этом есть 2 авиамаршрута, 1 железнодорожный и 3 автобусных. Сколькими способами можно добраться из А в В?

Решение: $n=2+1+3=6$ способов.

Правило умножения

- Если выбор каждого из объектов

$$a_i \ (i = 1,2, \dots k)$$

$$a_1 \ , a_2, \dots , a_k$$

можно выполнить n_i способами, то выбор "и a_1, и $a_2 \dots$ и a_k" можно выполнить

N=$n_1 n_2 \dots n_k$

способами

- **<u>Пример.</u>** Пусть требуется составить набор из ручки, карандаша и линейки. Имеется:
- 5 различных ручек,
- 7 различных карандашей,
- 10 различных линеек.
- Сколькими способами можно составить требуемый набор?

- **Решение. В**ыбрать ручку – можно 5 способами, выбрать карандаш – 7 способами, выбрать линейку – можно 10 способами. Тогда все действие можно выполнить

$$N = 5 \cdot 7 \cdot 10 = 350 \text{ способами.}$$

- Т.е. возможно 350 вариантов такого набора.

Факториал числа *n*

- (*factorialis* — действующий, производящий, умножающий) — произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Из определения факториала следует соотношение

$$n! = n(n-1)!$$

Отсюда вытекает, что

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}.$$

Если взять n=1, то получится, что

$$0!=1$$

Рекуррентная формула для факториала

- $$n! = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0 \\ n(n-1)!, & \text{если } n > 0 \end{cases}$$

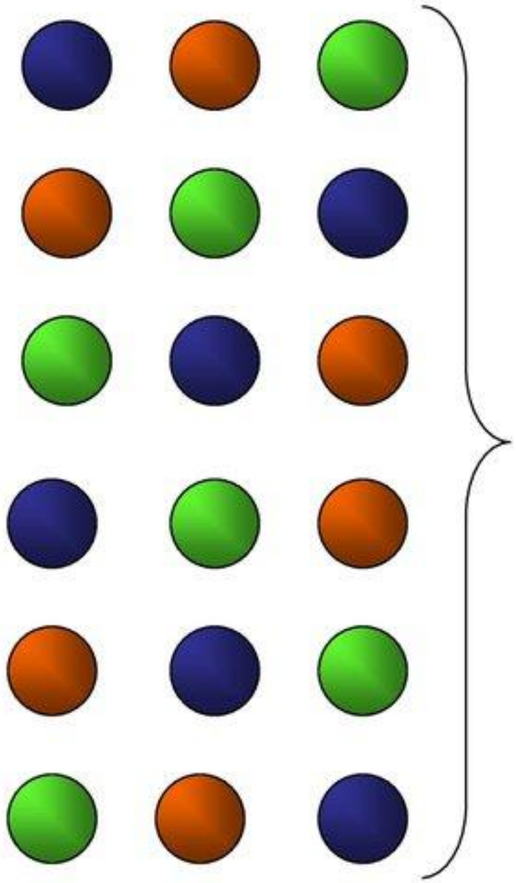
Выборки без повторений

- Перестановки
- Размещения
- Сочетания

- Расположение n различных элементов в определенном порядке называется **перестановкой без повторений** из n элементов.
- Например, на множестве из трех элементов {a,b,c} возможны следующие перестановки: abc, acb, bca, bac, cab, cba.
- Число различных перестановок без повторений из элементов обозначается P_n и равно n!, т.е.

$$P_n = n!$$

Перестановки без повторений



6 различных перестановок

$$n = 3$$

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Пример.

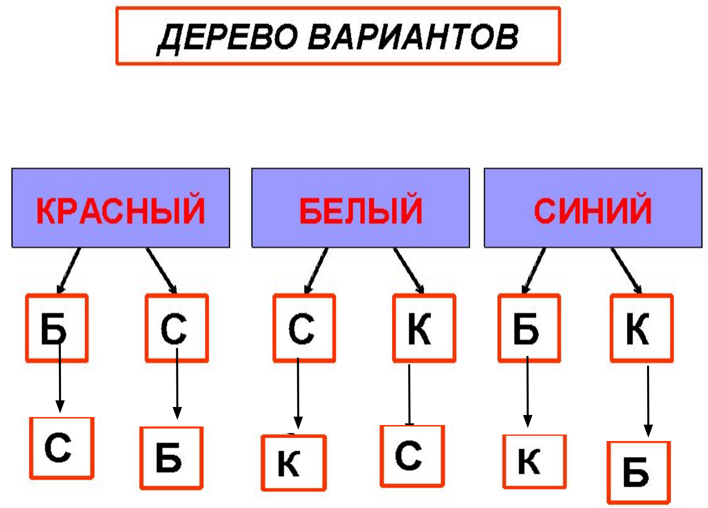
Флаг можно составить из 3 горизонтальных полос синего, красного и белого цветов. Сколько разных флагов можно составить?

ФЛАГ РОССИИ

Таблица вариантов

КБС	КСБ
БСК	БКС
СБК	СКБ

Дерево вариантов



Правило умножения

1 полоса 3 способа

2 полоса 2 способа

3 полоса 1 способ

3 · 2 · 1 = 6

Ответ: 6 способов

Подсчет перестановок

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

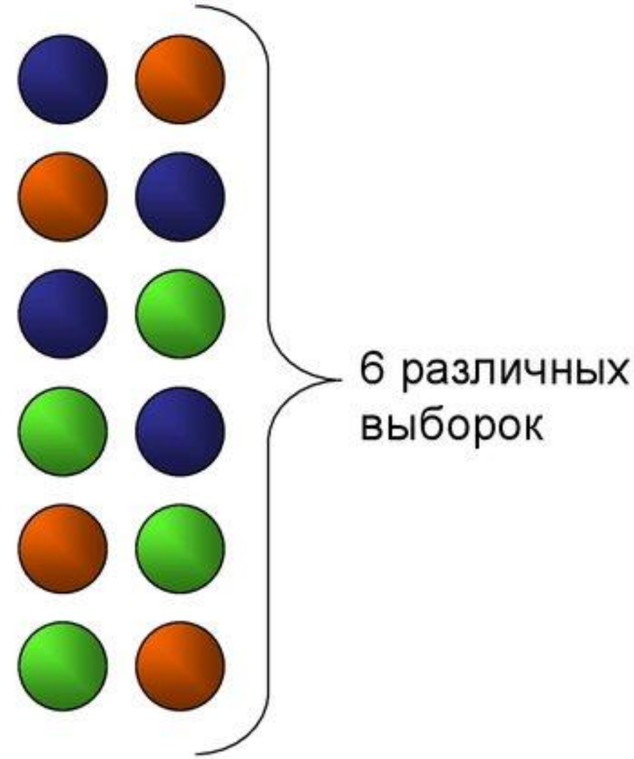
Размещением

- без повторений из n элементов по k называется упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества.
- Число размещений без повторений из элементов по   равно:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещения без повторений



$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

- <u>**Пример.**</u> В чемпионате по футболу участвуют десять команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

Размещением

- без повторений из n элементов по k называется упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества.
- Число размещений без повторений из элементов по равно:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетанием

- без повторений из n элементов по k называется неупорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества. Число сочетаний без повторений из n элементов по k :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

Сочетания без повторений

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

- **<u>Пример.</u>** Сколькими способами можно составить бригаду из трех человек для дежурства в группе из 30 человек?
- Поскольку порядок расположения людей в бригаде не фиксируется и люди не повторяются, то мы имеем случай сочетаний из 30 элементов по 3 без повторений:

$$C_{30}^{3} = \frac{30!}{3!\left(30-3\right)!} = \frac{30!}{3!\,27\,!} = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{2\cdot 3} = 10\cdot 29\cdot 14 = 4060$$

Выборки с повторениями

- Перестановки с повторениями
- Размещения с повторениями
- Сочетания с повторениями

Выборки с повторениями

- Пусть имеется выборка из n элементов, причем элементы могут повторятся.
- Из такой выборки можно составить перестановки с повторениями, размещения с повторениями, сочетания с повторениями.

Перестановки с повторениями

Число различных перестановок на выборке из n элементов, из которых k одинаковые -

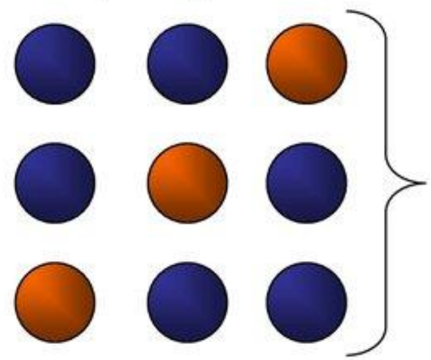
число перестановок с k повторениями на множестве из n элементов

$$\overline{P_n}(k) = \frac{n!}{k!}$$

Перестановки с повторениями

$n_1=2$ $n_2=1$

$n=n_1+n_2=2+1=3$



3 различные перестановки

$$\overline{P}_{3=2+1}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{6}{2}=3$$

- **<u>Пример</u>**. Сколько различных 4-символьных паролей можно составить из символов 0,0,a,b?
- <u>Решение.</u> Другими словами, требуется найти число перестановок с повторениями на 4 элементах выборки, в которой два элемента одинаковы:

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\begin{array}{lll} 0ab0 & a00b & b00a \\ 0a0b & a0b0 & b0a0 \\ 00ba & ab00 & ba00 \\ 00ab & & \\ 0ba0 & & \\ ob0a & & \end{array}$$

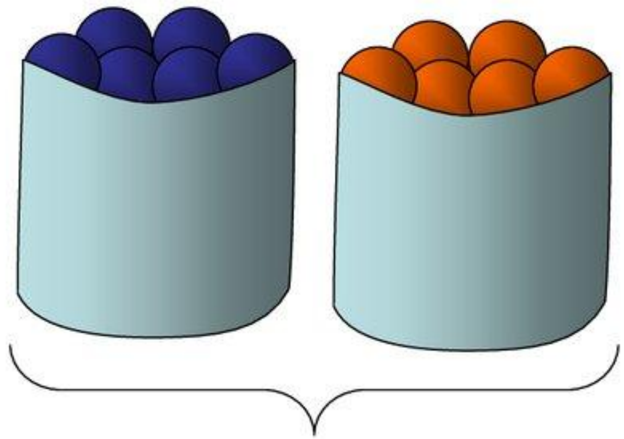
Размещения с повторениями

упорядоченный набор из k элементов, которые могут повторяться, выбираемый некоторого множества n элементов.

Число различных размещений с повторениями:

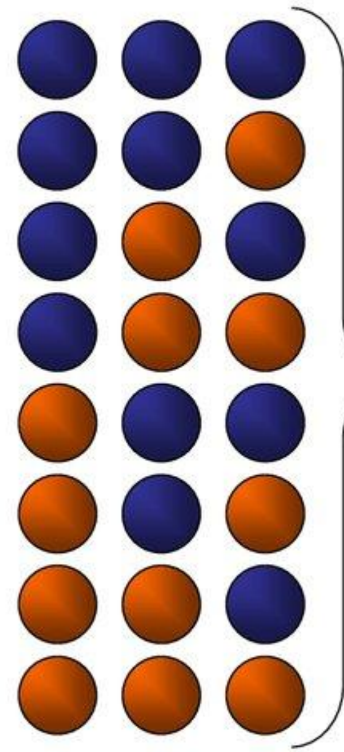
$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Размещения с повторениями



k=2

n=3



8 вариантов
выборок

$$\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$$

- **<u>Пример.</u>** Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?

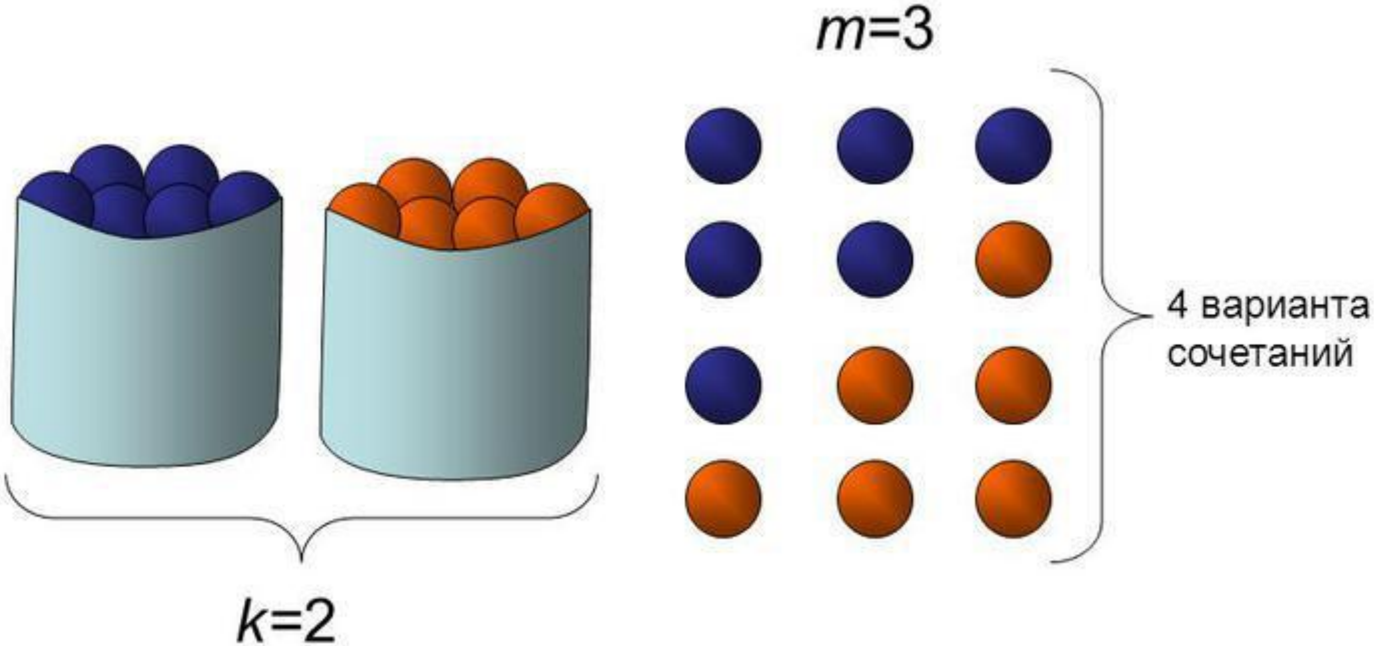
- Считаем, что в шифр может входить любая из 10 цифр, всего 6 возможных позиций (длина шифра равна 6 цифрам). Подсчитаем общее число всех возможных комбинаций шифра. Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую – также 10 (цифры могут повторяться), и так далее для всех шести цифр шифра, то есть
- $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$.
- В терминах комбинаторики это размещения с повторениями из 10 объектов по 6: $\overline{\mathrm{A}}_{10}^{6} = 10^6$.

Сочетания с повторениями

- **Сочетанием с повторениями** называются неупорядоченные наборы, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз.

$$\overline{C_n^m} = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!} = C_{n+m-1}^m$$

Сочетания с повторениями



$$\overline{C_2^3} = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

-
- **<u>Пример.</u>** В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 12 открыток для поздравлений?
- Число способов купить 12 открыток равно числу выборок 12 (k) из 10 (n) элементов (видов открыток) без учета порядка с повторениями:

$$\overline{C_{10}^{12}} = C_{10+12-1}^{12} = \frac{21!}{12!(21-12)!} = 293930.$$

ВЫБОР ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ