ЛЕКЦІЯ 14. ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ. ПАРНА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

План

14.1 Основні задачі економетрії.

14.2 Парна лінійна регресія. Метод найменших квадратів.

14.3 Випадкові збудники в рівнянні лінійної регресії.

14.4 Умови Гауса-Маркова. Гомоскедастичні та гетероскедастичні моделі (самостійна робота).

14.5 Специфікація моделі (самостійна робота).

Парна лінійна регресія. Метод найменших квадратів

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad (14.1)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1, \\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_2 + \varepsilon_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (14.2) \\
y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n,
\end{aligned}$$

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \qquad (14.3)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 * + \beta_1 * x_1 + \varepsilon_1, \\
y_2 &= \beta_0 * + \beta_1 * x_2 + \varepsilon_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_i &= \beta_0 * + \beta_1 * x_i + \varepsilon_i, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= \beta_0 * + \beta_1 * x_n + \varepsilon_n,
\end{aligned}
\tag{14.4}
$$

$$y = X\vec{\beta}^* + \varepsilon \qquad (14.5)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + e \qquad (14.6)$$

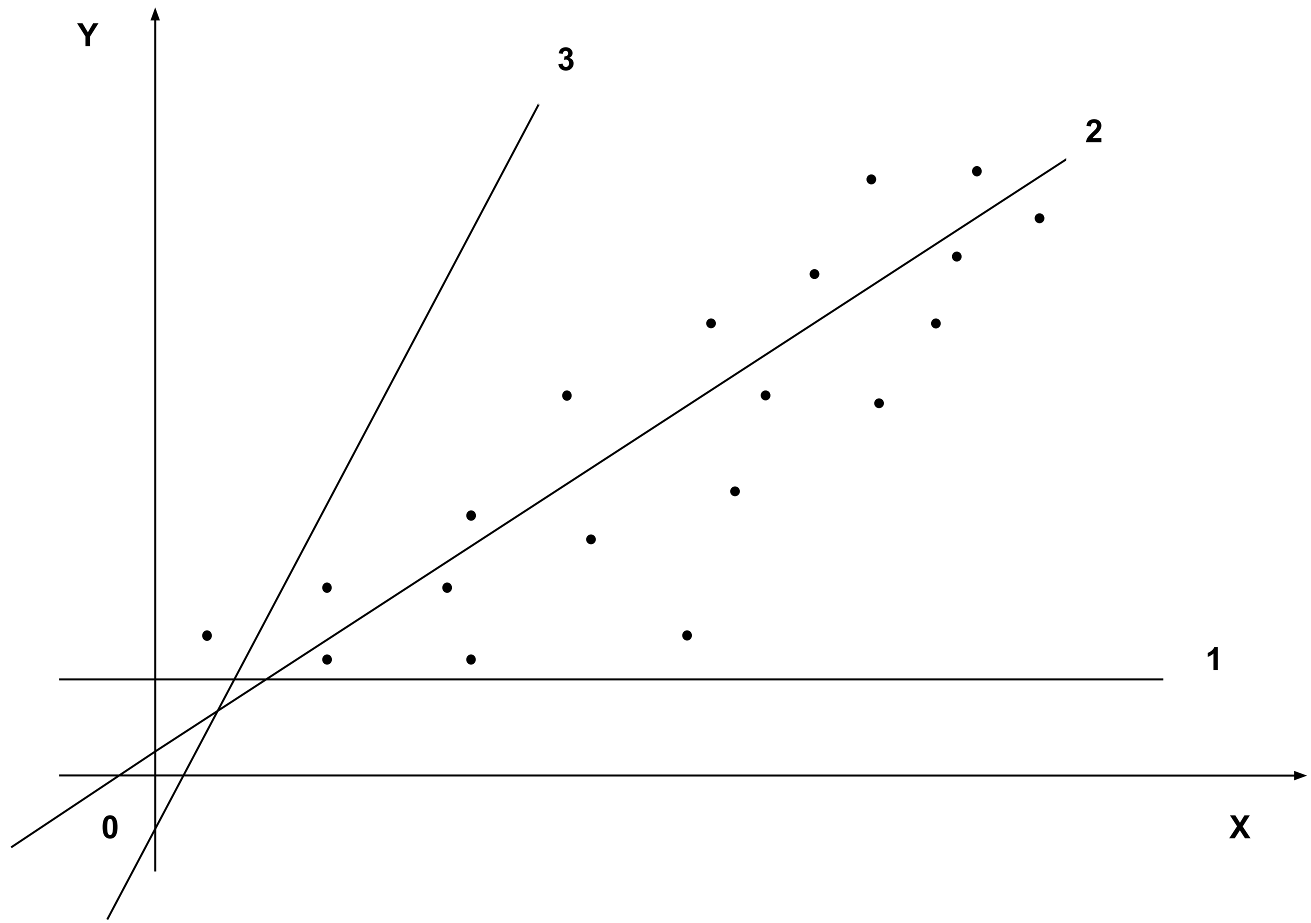
$$y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

ПРИКЛАД : залежність між обсягами виданих банком кредитів та витратами на рекламу

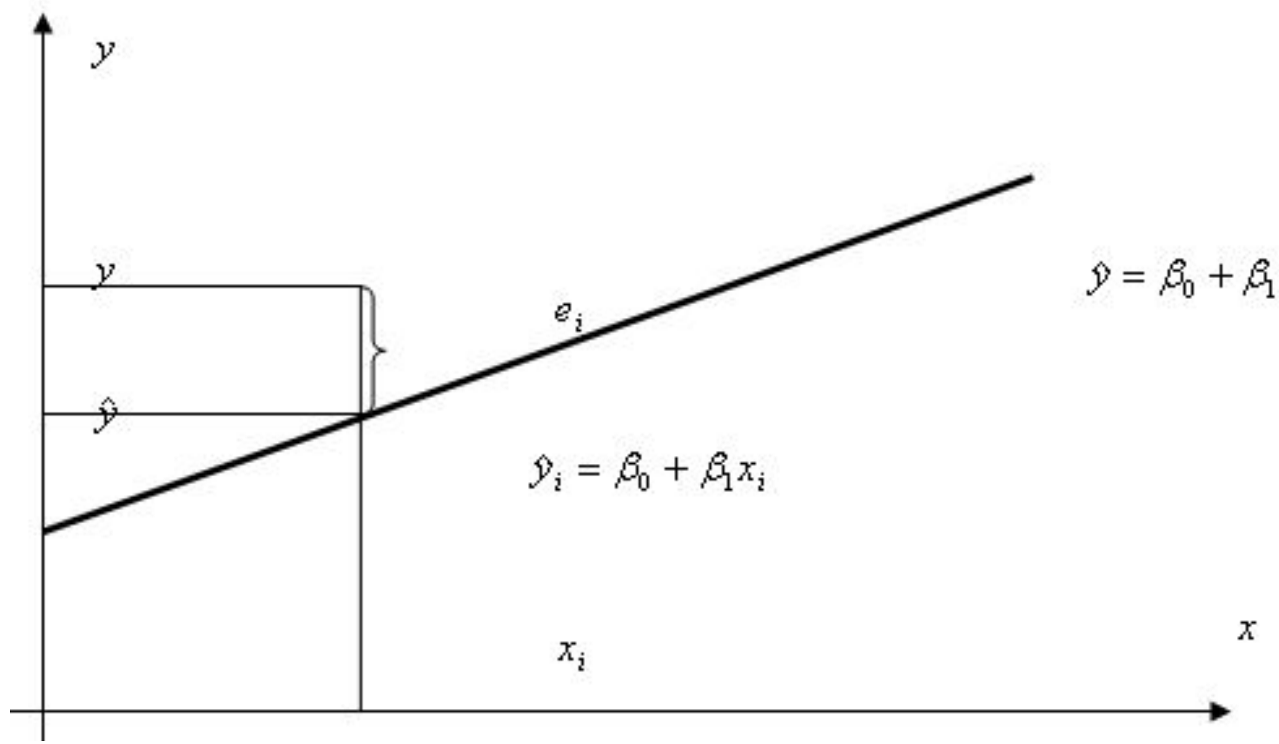
I	y_i	x_i
1	25	5
2	30	6
3	35	9
4	45	12
5	65	18



$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \beta_o - \beta_1 x, i = \overline{1,n} \quad (14.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 = f(\beta_0, \beta_1) \to \min \quad (14.8)$$

Відхилення теоретичних значень від фактичних



$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} e_i^2)}{\partial\beta_0} = \frac{\partial f(\beta_0, \beta_1)}{\partial\beta_0} = 0;$$

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2)}{\partial\beta_1} = \frac{\partial f(\beta_0, \beta_1)}{\partial\beta_1} = 0 \tag{14.9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sum_{i=1}^{n} e_i^2)}{\partial\beta_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial(\sum_{i=1}^{n} e_i^2)}{\partial\beta_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \end{cases} \tag{14.10}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i; \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases} \tag{14.11}$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad (14.12)$$

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} \qquad (14.13)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ; \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

$$\operatorname{var}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^2\right)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta_0}\left[\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right) = 0 \tag{14.14}$$

$$y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i = e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i \tag{14.15}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta_0 - \beta_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \tag{14.16}$$

$$\beta_0 = \overline{y} - \beta_1 \overline{x}$$

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x \tag{14.17}$$

$$y = \hat{y} + e = \beta_0 + \beta_1 x + e \tag{14.18}$$

ПРИКЛАД ілюстрації побудови рівняння регресії

Таблиця 14.1- Дослідження ефективності витрат на рекламу

I	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	25	5	25	125
2	30	6	36	180
3	35	9	81	315
4	45	12	144	540
5	65	18	324	1170
Сума	200	50	610	2330
Середнє значення	40	10	122	466

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{50}{5} = 10;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{200}{5} = 40;$$

$$\operatorname{var}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{610}{5};$$

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{2330}{5} - 400 = 66;$$

$$\beta_1 = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\operatorname{var}(x)} = \frac{66}{22} = 3; \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} = 40 - 3 \times 10 = 10$$

$$\hat{y} = 3x + 10$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

$$Y = \beta_0 X^{\beta_1}$$