# ТЕПЛОМАССООБМЕН

## Теплопроводность при нестационарном тепловом режиме

**Лекция № 6**

**2016 год**

# План

- 1. Основные положения.
- 2. Нестационарная теплопроводность. Описание процесса.
- 3. Нагрев тел с равномерным температурным полем.
- 4. Нагрев тел с неравномерным температурным полем. Применение теории подобия для исследования задач нестационарной теплопроводности.

# 1. Основные положения

Если температурное поле меняется во времени, то тепловые процессы, протекающие в таких условиях, называются ***нестационарными***.

Нестационарные процессы теплопроводности встречаются при охлаждении металлических заготовок, нагревание стальных слитков в промышленных печах, в прокаливании твердых тел, в производстве стекла, обжиге кирпича и т.д.

- Передачу теплоты при нестационарном режиме можно определить, если найти **закон изменения температурного поля** и **теплового потока** во времени и в пространстве:

$$t = f(x, y, z, \tau)$$

- и

$$Q = \varphi(x, y, z, \tau)$$

- где $x$, $y$, $z$ – координаты точки; τ – время.

- Указанные зависимости могут быть найдены из решения дифференциального уравнения теплопроводности Фурье:

- $$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) = a\nabla^2 t \quad (1)$$

- При решении уравнения (1) необходимо знать граничные условия и начальное распределение температуры в теле.

- Граничные условия задаются уравнением

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{\text{пов}} = -\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\lambda}_{\text{ст}}}\right)\left(t_{\text{пов}} - t_{\text{среды}}\right), \quad (2)$$

- где $\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_{\text{пов}}$ – градиент температуры на поверхности;
- α – коэффициент теплоотдачи между средой и поверхностью твердого тела;
- $\lambda_{\text{ст}}$ – теплопроводность стенки;
- $t_{\text{пов}}$ – температура поверхности стенки;
- $t_{\text{среды}}$ – температура окружающей среды.
- **Физические величины** λ, *c*, ρ считаются постоянными.

- Температура рассматриваемого тела в начальный момент времени $\tau = 0$ и распределена равномерно, т.е. $t_0$**=const**.

- Решение уравнений (1) и (2) с учетом граничных и временных условий дает уравнение температурного поля вида

$$t = f(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}, a, \boldsymbol{\tau}, x, y, z, t_0, t_{\text{ср}}, l_0, l_1, ..., l_n). \quad (3)$$

- Из уравнения (3) показывает, что температура зависит от большого числа переменных и постоянных параметров.

- Решение уравнения (3) представляет собой очень сложную математическую задачу.

- Анализ уравнения (3) показывает, что переменные можно сгруппировать в три безразмерных комплекса:

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda}$$ **– число Био**

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{l^2}$$ **– число Фурье**

$$\frac{x}{l}$$ **– безразмерная координата**

# Число Био (критерий Био)

$$\mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

- где $l$ – характерный размер тела (м); λ – коэффициент теплопроводности твердого тела; α – коэффициент теплоотдачи между средой и поверхностью твердого тела.

- ***Критерий Био*** характеризует соотношение между внутренним и внешним термическими сопротивлениями.

- $\dfrac{\lambda}{l}$ – внутреннее термическое сопротивление;
- $\dfrac{1}{\alpha}$ – внешнее термическое сопротивление.

# Число Фурье (критерий Фурье)

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\boldsymbol{\tau}}{l^2}$$

- где $l$ – характерный размер тела (м);
- $a$ – температурапроводность;
- τ – время.

- ***Критерий Фурье*** характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими константами и размерами тела.

- Искомая функция в виде безразмерной температуры $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_1}$

может быть представлена следующим уравнением:

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_1} = f\left(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi}, \frac{x}{l}\right)$$

- $\vartheta$ – избыточная температура тела, т.е. температура отсчитанная от температуры окружающей среды

$$\vartheta = t_{\text{тела}} - t_{\text{о. ср}}.$$

# 2. Нестационарная теплопроводность. Описание процесса

Рассмотрим нестационарные тепловые процессы при которых температурное поле изменяется во временем, т.е. является функцией от времени.

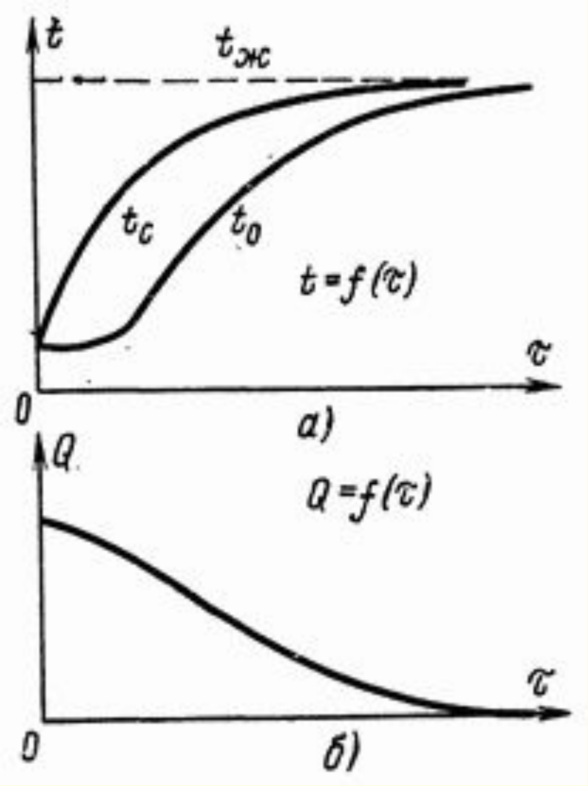
Нестационарность тепловых процессов обусловлена изменением энергии тела и всегда связана с явлениями прогрева или охлаждения тела.

# Тело внесли в среду с более высокой температурой

- Сразу возникает процесс теплообмена между средой и телом.
- Тело начинает прогреваться.
- Сначала нагреваются поверхностные слои, постепенно процесс прогрева распространяется в глубь тела.

## **Тело внесли в среду с более высокой температурой**.

- О характере изменения температуры тела за время прогрева дают представление кривые на **рисунке а**.




$t_с$ – температура на поверхности тела;

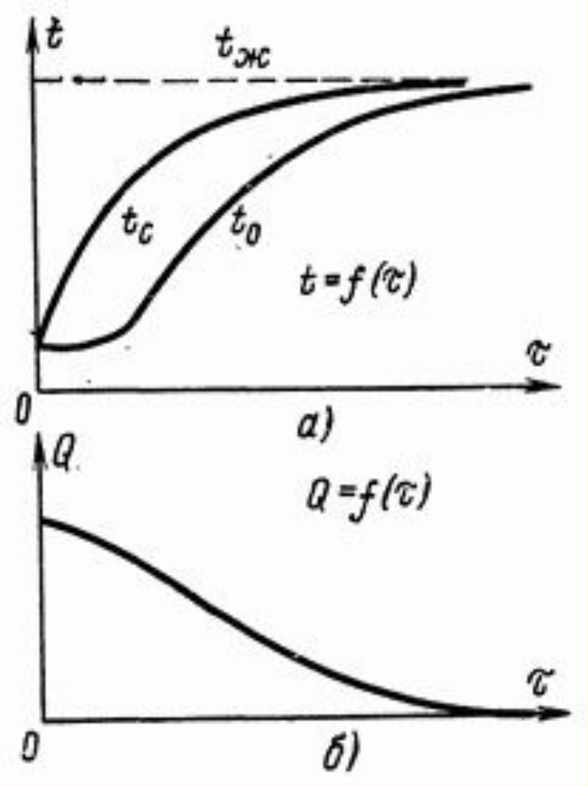
$t_о$ – температура в центре тела;

$t_ж$ – температура окружающей среды.

По истечении некоторого времени (теоретически бесконечно большого) температура всех частей тела выравнивается и становится равной температуре окружающей среды и наступает тепловое равновесие.

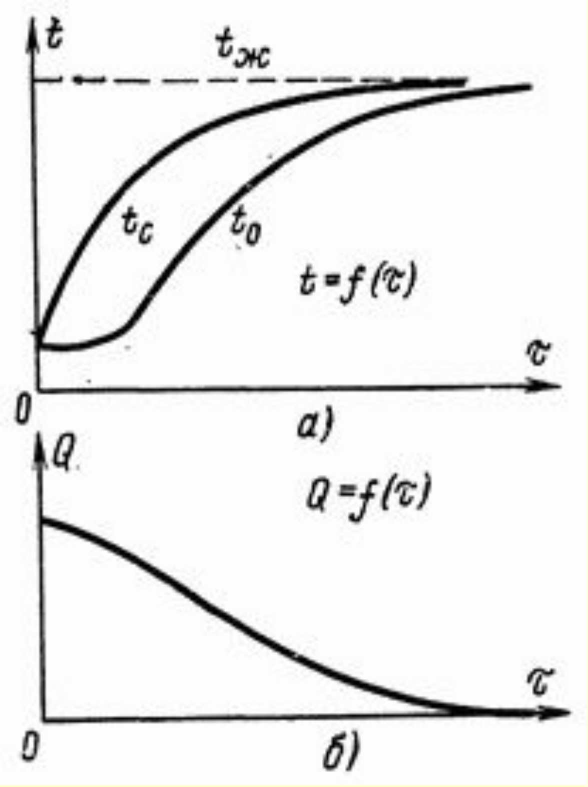
**При нестационарном процессе** интенсивность подвода теплоты также ***не постоянна во времени***.

- О характере изменения подвода теплоты дает представление кривая на **рисунке б**.




По мере прогрева тела интенсивность передачи теплоты постепенно уменьшается и в пределе становится равной нулю.

Площадь, заключенная между осями и кривой, определяет **полное количество теплоты**, переданное за время τ.

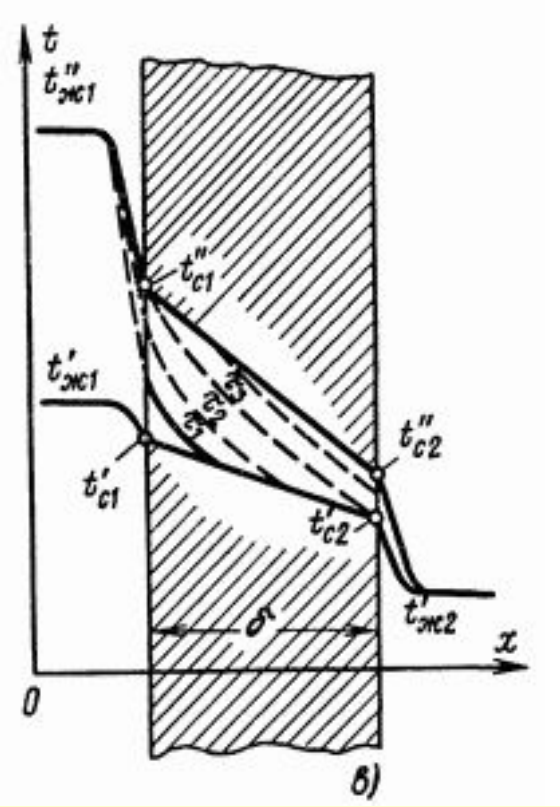



Эта теплота аккумулируется телом и идет на повышение его энергии.

Аналогичным образом протекает процесс охлаждения тела.

При этом энергия тела уменьшается, а выделенная теплота передается в окружающую среду.

**Рассмотрим процесс теплопередачи через стенку**.



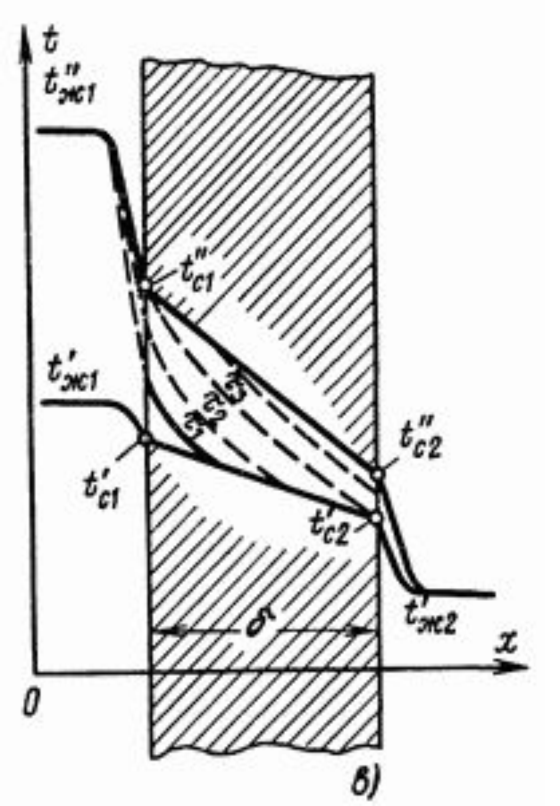
**Вначале процесс был стационарным**.

- Температура горячей среды $t'_{ж1}$,
- холодной – $t'_{ж2}$,
- температуры поверхностей стенки $t'_{c1}$ и $t'_{c2}$ (**рисунок в**).

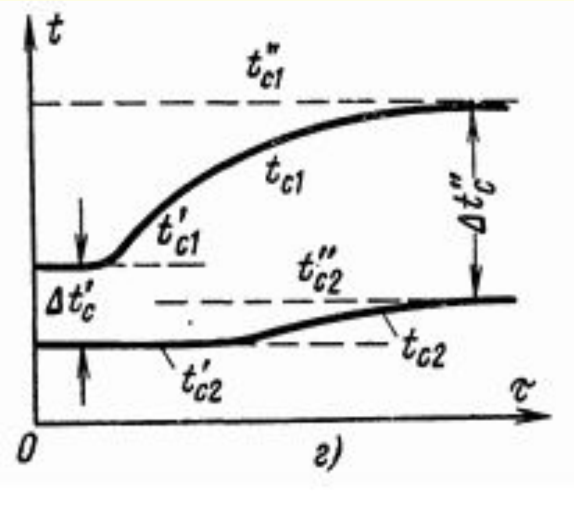
- Если изменить режим теплопередачи, например, сразу резко повысить температуру горячей среды до $t''_{ж1}$, то на некоторое время процесс становится нестационарным.

# **Рассмотрим процесс теплопередачи через стенку.**

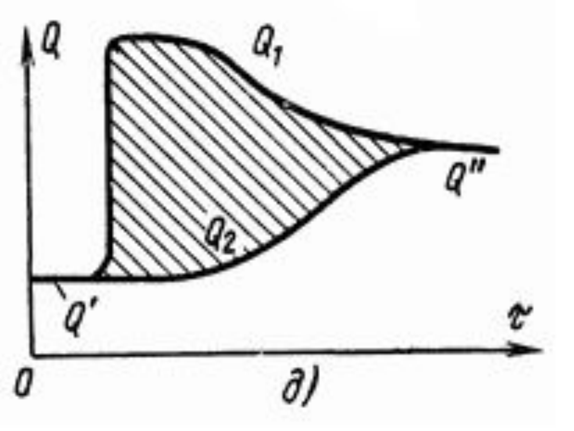
Температурная кривая $t'_{ж1} - t'_{с1} - t'_{с2} - t'_{ж2}$ будет изменяться до тех пор, пока снова не установится стационарный режим $t''_{ж1} - t''_{с1} - t''_{с2} - t''_{ж2}$.



Изменение во времени $t'_{c1}$ и $t'_{c2}$ представлено на **рисунке г**.




О характере изменения количества передаваемой теплоты для рассматриваемого случая дают представление кривые на **рисунке д**.



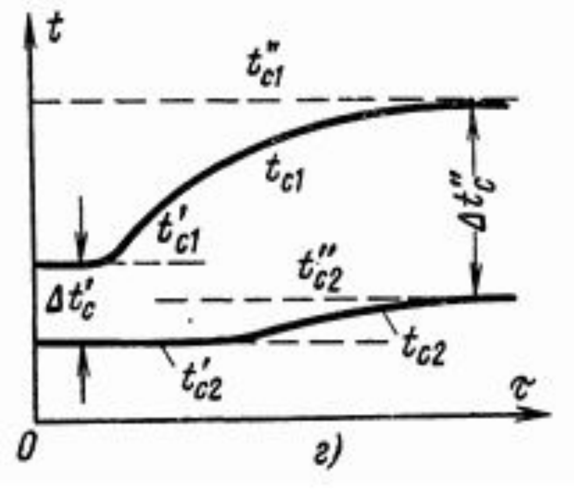

$Q'$ и $Q''$ – тепловые потоки при стационарных режимах,

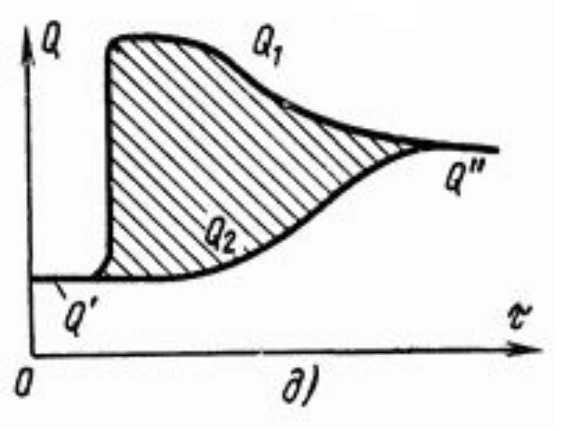
$Q_1$ и $Q_2$ – тепловые потоки через горячую и холодную поверхности стенки при нестационарном режиме.

$Q'$ и $Q''$ – **тепловые потоки** при стационарных режимах,

$Q_1$ и $Q_2$ – **тепловые потоки** через горячую и холодную поверхности стенки при нестационарном режиме.

Заштрихованная площадка представляет собой **количество теплоты**, затраченное на изменение энергии стенки (аккумулированная теплота).





- **Нестационарный тепловой процесс** связан с изменением энергии тела и им обуславливается.

- Скорость изменения энергии (энтальпии) тела прямо пропорциональна способности материала проводить теплоту (т.е. коэффициенту теплопроводности λ) и обратно пропорциональна его аккумулирующей способности ($c\rho$).

- В целом ***скорость теплового процесса при нестационарном режиме*** определяется ***коэффициентом температуропроводности***.

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

- Рассмотренный характер изменения температуры и количества переданной теплоты ***справедлив лишь для твердых тел***.

- **При нагреве жидких и газообразных тел в общем случае неизбежно возникает конвекция, *которая способствует выравниванию температуры.***

- В этих случаях можно говорить об изменении во времени лишь средней температуры жидкости.

- **Решить задачу нестационарной теплопроводности** – это значит найти ***зависимости изменения температуры и количества переданной теплоты*** во времени для любой точки тела.

- Такие зависимости получаются путем решения дифференциального уравнения теплопроводности.

# 3. Нагрев тел с равномерным температурным полем

А) Тепло на поверхность передается конвекцией.
Б) Тепло на поверхность передается излучением.

## А) Тепло на поверхность передается конвекцией

- Количество теплоты переданное от среды к поверхности тела конвекцией найдем используя закон Ньютона – Рихмана

$$\boldsymbol{\delta} Q_T = \boldsymbol{\alpha}(t_{\text{среда}} - t) F d\boldsymbol{\tau}, \qquad (1)$$

$d\tau$ – промежуток времени в течении которого передается теплота;

$t$ – температура тела (стенки).

- Теплота воспринимаемая телом:

$$\delta Q_T = Mcdt, \qquad (2)$$

- где $M$ – масса тела;
- $c$ – удельная теплоемкость тела;
- $dt$ – изменение температуры тела.

- В уравнениях (1) и (2) левые части равны, следовательно равны и правые части. Приравняем их:

$$\alpha(t_{\text{среда}} - t)Fd\tau = Mcdt$$

$$d\tau = \frac{Mc}{\alpha F} \cdot \frac{dt}{(t_{\text{среда}} - t)} \qquad (3)$$

Уравнение (3) проинтегрируем:

$$\int_{0}^{\tau} d\tau = \frac{Mc}{\alpha F} \int_{t_{\text{нач}}}^{t} \frac{dt}{(t_{\text{среда}} - t)} \qquad (4)$$

- Получаем:

$$\tau = \frac{Mc}{\alpha F} \cdot \ln \frac{t_{\text{среда}} - t_{\text{нач}}}{t_{\text{среда}} - t} \qquad (5^*)$$

Уравнение (5*) позволяет определить время $\tau$, за которое тело нагреется от начальной температуры $t_{\text{нач}}$ до конечной $t$.

- Температуру тела *t*, до которой оно будет нагрето за время τ, можно определить из формулы:

$$\frac{t_{\text{среда}} - t}{t_{\text{среда}} - t_{\text{нач}}} = e^{-\frac{\alpha F \tau}{Mc}} \qquad (6)$$

- После преобразований получаем следующее выражение:

$$t = t_{\text{среда}} + \left(t_{\text{нач}} - t_{\text{среда}}\right) \cdot e^{-\frac{\alpha F \tau}{Mc}}$$

# Б) Тепло на поверхность передается излучением

- Количество теплоты переданное от среды к поверхности тела излучением найдем используя закон Стефана - Больцмана

$$\delta Q_T = \sigma_{\text{пр}} (T_{\text{среда}}^4 - T^4) F d\tau, \quad (1)$$

- где $\sigma_{\text{пр}}$ – приведенный коэффициент излучения.

- Теплота воспринимаемая телом:

$$\delta Q_T = McdT. \quad (2)$$

- В уравнениях (1) и (2) левые части равны, следовательно равны и правые части. Приравняем их:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{пр}}(T_{\text{среда}}^4 - T^4)Fd\boldsymbol{\tau} = McdT$$

$$d\boldsymbol{\tau} = \frac{Mc}{\boldsymbol{\sigma}_{\text{пр}}F} \cdot \frac{dT}{(T_{\text{среда}}^4 - T^4)} \quad (3)$$

- Уравнение (3) проинтегрируем:

$$\int_0^{\boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} = \frac{Mc}{\boldsymbol{\sigma}_{\text{пр}}F} \cdot \int_{T_{\text{нач}}}^{T} \frac{dT}{(T_{\text{среда}}^4 - T^4)} \quad (4)$$

- При лучистой теплоотдаче на поверхность тела продолжительность нагрева определяется по формуле:

$$\tau=\frac{Mc}{\sigma_{\text{пр}}F}\cdot\frac{1}{T^3_{\text{среда}}}\left[\left(\ln\frac{1+\dfrac{T}{T_{\text{среда}}}}{1-\dfrac{T}{T_{\text{среда}}}}+2arctg\frac{T}{T_{\text{среда}}}\right)-\left(\ln\frac{1+\dfrac{T_{\text{нач}}}{T_{\text{среда}}}}{1-\dfrac{T_{\text{нач}}}{T_{\text{среда}}}}+2arctg\frac{T_{\text{нач}}}{T_{\text{среда}}}\right)\right]\cdot \quad (4а)$$

- Формулы (5*) и (4а) показывают, что время нагрева тонкого тела прямо пропорционально его массе и теплоемкости и обратно пропорционально величине тепловоспринимающей поверхности и интенсивности передачи тепла к ней.

- Скорость нагрева тонкого тела зависит только от условий подвода к нему тепла.

# 4. Неограниченная пластина

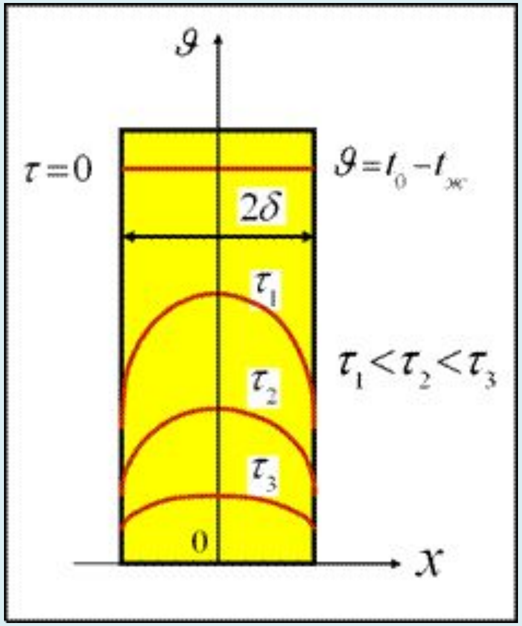
Рассмотрим охлаждение плоской пластины толщиной **2δ** (***l*** **= δ**).

Размеры пластины в направлении координатных осей ***Oy*** и ***Oz*** бесконечно велики.

Пластина омывается с обеих сторон жидкостью или газом с **α = const**.

В начальный момент времени $\tau = 0$ пластина:

- имеет во всех своих точках постоянную температуру $t_0$;
- избыточная температура $\vartheta_1 = t_0 - t_{о.\ ср.}$; будет постоянной для всех точек тела.




**Заданы**:

- ✔ коэффициент теплопроводности $\lambda_{ст}$;
- ✔ плотность тела $\rho$;
- ✔ удельная теплоемкость тела $c$.

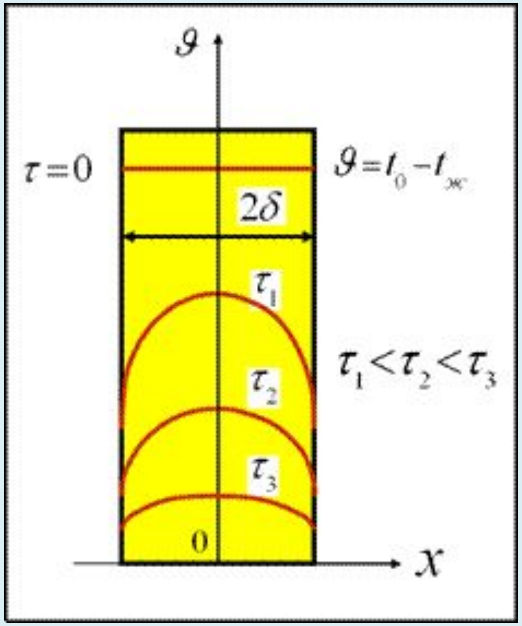
***Все эти величины постоянны***.

Коэффициент температуропроводности а определяется по уравнению:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

Пластина не ограничена по высоте и ширине. Дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

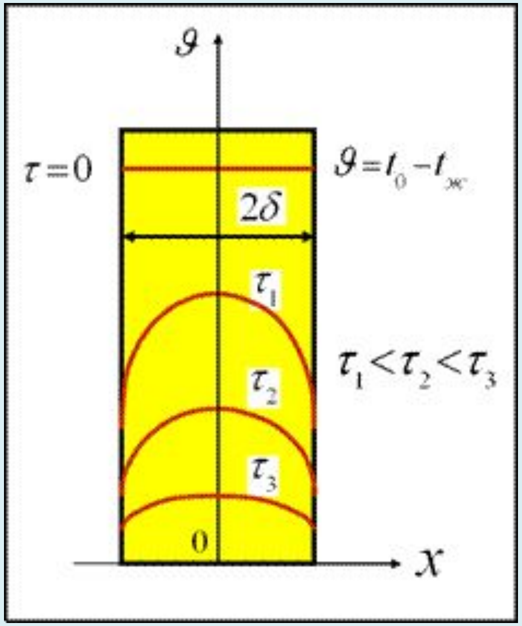


Граничное условие при $x = \pm\,\delta$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\pm\delta} = \pm\frac{\alpha \vartheta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}}$$

И начальное условие при $\tau = 0$

$$\vartheta = \vartheta_1$$




Температуры поверхности стенки и в ее средней плоскости сечения определяются из соотношения

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \frac{t_{\text{ст}} - t_{\text{о. ср}}}{t_0 - t_{\text{о. ср}}} = f\left(\frac{\alpha l}{\lambda_{\text{ст}}}, \frac{a\tau}{l^2}\right) = f(\text{Bi}, \text{Fo}) \qquad \boxed{(1)}$$

- Безразмерная координата ***x*/*l*** в средней плоскости и на поверхности пластины становится постоянной величиной

 при $x = 0$   $x/l = 0$;

 при $x = \delta$   $x/l = 1$;

и поэтому отсутствует в уравнении (1).

- Для средней плоскости надо заменить $t_{ст}$ на температуру в середине $t_{центр}$.

$$\frac{\vartheta_{ц}}{\vartheta_1} = \frac{t_{центр} - t_{о.ср}}{t_0 - t_{о.ср}} = f_1(\mathrm{Bi}, \mathrm{Fo}) \quad \boxed{(2)}$$

•**Количество теплоты**, отдаваемой пластиной в окружающую среду за время $\tau$, должно быть равным изменению внутренней энергии тела за период полного его охлаждения (нагревания).

•Начальная внутренняя энергия пластины, отсчитанная от внутренней энергии при температуре среды $t_{\text{о. ср.}}$, окружающей стену, как от нуля, равна

$$Q_0 = 2Fc\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\delta}\left(t_0 - t_{\text{о. ср}}\right) = 2Fc\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\vartheta}_1 \qquad \boxed{(3)}$$

- **Количество теплоты**, выделяющейся при охлаждении пластины, определяется также безразмерными числами Bi и Fo:

$$\frac{Q_\tau}{Q_0} = f_2(\mathrm{Bi}, \mathrm{Fo}) \qquad \boxed{(4)}$$

$$Q_\tau = 2Fc\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\delta}\left(t_0 - t_{\text{ср. ст}}\right)$$

где $Q_\tau$ – количество теплоты, переданное в окружающую среду за время τ;

$t_{\text{ср. ст}}$ – средняя температура стенки по истечению промежутка времени τ.

- Зависимости (1), (2) и (4) даются в виде графиков (номограммы Будрина) или в виде таблиц.

- Таблицы позволяют решать задачи с большей точностью.

- Сначала вычисляются числа Bi и Fo.

- Затем определяют $\dfrac{\vartheta_{ц}}{\vartheta_1}, \dfrac{\vartheta_{ст}}{\vartheta_1}, \dfrac{Q_\tau}{Q_0}$.

- Поскольку $t_0 - t_{о.\ ср.}$ и начальное теплосодержание известны, то легко вычисляются $t_{ст}$, $t_{ц}$ и $Q_\tau$.