Высшая математика

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия:

1. Матрицы
2. Определители
3. Системы линейных уравнений
4. Аналитическая геометрия

Математический анализ:

1. Предел функции
2. Дифференциальное исчисление
3. Интегральное исчисление
4. Дифференциальные уравнения
5. Ряды

Линейная алгебра

Матрицы и операции над ними

Линейные операции над матрицами

Матрицей называется прямоугольная числовая таблица A

$$=\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots. \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Число m ее строк и число n ее столбцов называют размерами матрицы A; при этом пишут $\boldsymbol{dim\ A = m \times n}$.

M_{mxn} – множество всех матриц размера $m \times n$.

- **Матрица** – это прямоугольная таблица чисел.
- A_{m*n} – матрица размера m*n (m строк, n столбцов)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

- $b_{i\,j}$ – элемент матрицы, стоящии на пересечении $i^{той}$ строки и $j^{того}$ столбца.

$$b_{12} = -2$$

Виды матриц:

- **Матрица-строка** (вектор-строка) – матрица, состоящая из одной строки.

$$A_{1*n} = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n})$$

- **Матрица-столбец** – матрица, состоящая из одного столбца.

$$B_{m*1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

- **Квадратная матрица** – матица, у которой число строк равно числу столбцов (m=n)

Квадратная матрица 2-го порядка

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Элементы квадратной матрицы, у которых i=j, называются элементами главной диагонали.

$c_{11},\ c_{22}$ – элементы главной диагонали

- **Диагональная матрица** – матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

- **Единичная матрица** – это диагональная матрица, у

которой элементы главной диагонали равны единице.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Нулевая матрица** – матрица, у которой все элементы равны нулю.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Определение</u>. Суммой матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц A и B, стоящих на тех же местах:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n.$

Пусть A= (a_{ij}), B = $(b_{ij}) \in M_{mxn.}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1} + b_{m1} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Свойства сложения:

1. A + B = B + A.
2. (A + B) + C = A + (B + C).
3. Если O – нулевая матрица, то A + O = O + A = A

Замечание 1. Справедливость этих свойств следует из определения операции сложения матриц.

Умножение матрицы на число

Определение. Произведением матрицы A на число α называется матрица αA с элементами (αa_{ij}); $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} \dots \alpha a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha a_{m1} \dots \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$

Свойства умножения матрицы на число:

1. (km)A=k(mA).
2. k(A + B) = kA + kB.
3. (k + m)A = kA + mA.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называют линейными операциями.

Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. C = A + B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3+1 \\ 2+3 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = ?$$

$$3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Замечание 2. Отметим еще раз, что складывать можно только матрицы **одинаковой размерности.**

Умножение матриц

<u>Определение.</u> Произведением матрицы A размерности m×p и матрицы B размерности p×n называется матрица C размерности m×n, такая что

$$(*) \qquad c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\, b_{sj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ \dots \ + a_{in}\, b_{jn}$$

$$\overline{i = 1, m}\ ;\ \overline{j = 1, k}$$

Нетрудно заметить, что число столбцов A равно числу строк B. Только для таких матриц определено произведение AB.

<u>Примеры</u>:

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Размерность матрицы C=AB составляет 2×3. Найдем элементы матрицы C:

$c_{11} = 2 \cdot 3 + (-1)(-2) = 8, c_{12} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 1, c_{13} = 2 \cdot (-5) + (-1) \cdot 4 = -14,$

$c_{21} = 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 2, c_{22} = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 9, c_{23} = 4 \cdot (-5) + 5 \cdot 4 = 0.$

$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -14 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$

Число c_{ij}, определенное равенством (*), представляет собой произведение i-ой строки матрицы A и j столбца матрицы B.

Транспонирование матрицы – осуществляется в результате замены строк матрицы на соответствующие столбцы с сохранением порядка элементов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов

$\dim A = n \times n$, n – порядок матрицы А.

Квадратная матрица вида $E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной.

Операции над матрицами:

- **Сложение** – выполняется только для матриц одинакового размера.

$$A + B = C \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 12 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Умножение** матрицы на число

$$\alpha * A = B, b_{ij} = \alpha * a_{ij} \qquad -2 * \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Транспонирование** матрицы – осуществляется в результате замены строк матрицы на соответствующие столбцы с сохранением порядка элементов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & -8 \end{pmatrix} \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Свойства операций над матрицами:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ переместительное свойство
3. $\alpha * (A + B) = \alpha * A + \alpha * B$ сочетательное свойство
4. $A * (B + C) = A * B + A * C$
5. $A * (B * C) = (A * B) * C$
6. $A * E = E * A = A$
7. $A^0 = E$
8. $(A^T)^T = A$
9. $(\alpha * A)^T = \alpha * A^T$
10. $(A + B)^T = A^T + B^T$
11. $(A * B)^T = B^T * A^T$

Элементарные преобразования
Приведение матрицы к ступенчатому виду

1) можно менять строки (столбцы) местами;

2) можно умножать элементы строки на одно и то же число, отличное от нуля;

3) можно складывать (вычитать) строки друг с другом.

Верхнетреугольная матрица, у которой под главной диагональю все элементы равны нулю, называется приведенной к ступенчатому виду. При этом элементы, стоящие на главной диагонали называются угловыми элементами.

Ранг матрицы А – это максимальное число линейно независимых строк этой матрицы.

Утверждение. В ступенчатой матрице строки, содержащие ненулевые угловые элементы, линейно независимы. Отсюда следует, что ранг ступенчатой матрицы равен числу ее угловых элементов.

Определители

- ***Определитель*** – это число, характеризующее квадратную матрицу.
- Обозначение: $\Delta; \ |A|$
- Правила вычисления:

$$\Delta_1 = |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 * (-2) - 2 * (-1) = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

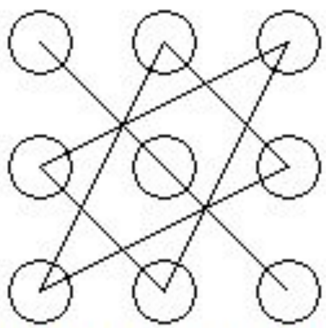
$$= a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{23} * a_{12} * a_{31} + a_{32} * a_{21} * a_{13} - a_{13} * a_{22} * a_{31} - a_{12} * a_{21} * a_{33} - a_{23} * a_{32} * a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 1 * (-1) * (-4) + (-2) * 4 * 5 + 2 * (-3) * 3 - 5 * (-1) * 3 - 2 * (-2) * (-4) - 4 * (-3) * 1 = -43$$

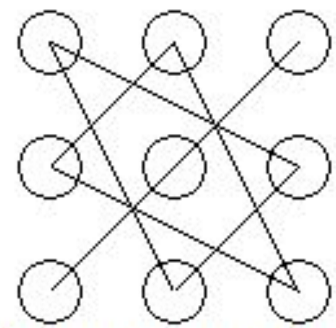
Определителем матрицы третьего порядка, или определителем третьего порядка, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу нахождения определителя третьего порядка можно определить, пользуясь приведенной схемой, которая называется правилом треугольников или правилом Сарруса. Первые три слагаемые берутся со знаком плюс и определяются из левого рисунка, а последующие три слагаемые берутся со знаком минус и определяются из правого рисунка.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 3\cdot5\cdot7 - 2\cdot4\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0$$

Определитель матрицы можно вычислить, разложив определитель третьего порядка по какой-либо строке или столбцу. В частности, разложение по первой строке выглядит так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка A называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Алгебраическим дополнением элементов a_{ij} матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — миноры элементов a_{ij} матрицы A.

Разложение по строке или столбцу

Формулы разложения по строке или столбцу:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Первые n формул называются формулами разложения определителя по строке, а вторые n формул называются формулами разложения определителя по столбцу.

Правила вычисления определителя любого порядка

- ***Теорема Лапласа***:

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Вычислим определитель *A* разложением по i*-той* строке:

$$\Delta_n = a_{i1} * A_{i1} + a_{i2} * A_{i2} + \cdots + a_{in} * A_{in}$$

Вычислим определитель разложением по j*-тому* столбцу:

$$\Delta_n = a_{1j} * A_{j1} + a_{2j} * A_{2j} + \cdots + a_{nj} * A_{nj}$$

Свойства определителей

Свойство (1)

Определитель не изменится, если все строки заменить соответствующими столбцами и наоборот.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \Delta .$$

Свойство (2)

При перестановке двух каких-либо строк или столбцов местами определитель изменяет знак.

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{11}a_{22}) = -\Delta .$$

Свойство (3)

Определитель равен нулю, если он имеет две равные строки (столбца).

Свойство (4)

Множитель, общий для всех элементов строки или столбца, можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} a_{22} - \lambda a_{12} a_{21} = \lambda(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство (5)

Если к элементам какой-либо строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, то определитель не изменится.

Если к элементам какой-либо строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на некоторое число, то определитель не изменится.

Свойство (6)

Преобразование Ж-Г с разрешающим элементом 1 не меняет определителя.

Обратная матрица

Определение. Квадратная матрица В называется **обратной** к квадратной матрице А того же порядка, если $AB = BA = E$. При этом В обозначается A^{-1}.

Рассмотрим условие существования матрицы, обратной к данной, и способ ее вычисления.

Определение. Квадратная матрица А называется **невырожденной**, если ее ранг равен числу строк (столбцов). Это означает, что строки (столбцы) матрицы линейно независимы.

Теорема. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной.

Алгоритм нахождения обратной матрицы

1. Приписать справа к матрице А единичную матрицу соответствующих размеров $(A|E)$.

2. Элементарными преобразованиями строк матриц $(A|E)$ преобразовать к виду $(E|B)$.

3. Получившаяся в правой половине матрица В и будет обратной для А.

$$\left(\overbrace{\begin{matrix}0&1&3\\1&2&5\\1&3&9\end{matrix}}^{A}\left|\overbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}^{E}\right.\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&3&1&0&0\\1&2&5&0&1&0\\0&1&4&0&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&3&1&0&0\\1&0&-1&-2&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&4&3&-3\\1&0&0&-3&0&1\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{E}\left|\underbrace{\begin{matrix}-3&0&1\\4&3&-3\\-1&-1&1\end{matrix}}_{A^{-1}}\right.\right)$$

Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется **обратной** матрицей, если

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$$

Алгоритм вычисления обратной матрицы А:

- Вычисляем определить матрицы : $\Delta = |A|.$
- Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A и составляем из них присоединенную матрицу: $A_{ij}, \widetilde{A}.$
- Транспонируем присоединенную матрицу: $\widetilde{A^T}$
- Вычисляем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \widetilde{A^T}.$$

Решение систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + a_{13} * x_3 = b_1, \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + a_{23} * x_3 = b_2, \\ a_{31} * x_1 + a_{32} * x_2 + a_{33} * x_3 = b_3. \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 - переменные

a_{ij} - коэффициенты при переменных

b_j - свободные коэффициенты

Решить систему уравнений – это значит найти значения переменных, при которых каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство.

Если система имеет решение, то она называется **совместной**.

Если не имеет решений, то – **несовместной**.

Если совместная система имеет единственное решение, то она называется **определенной**.

Если бесконечно много, то – **неопределенной**.

Матричная форма СЛУ

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными с невырожденной основной матрицей A:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \dots \dots . \\ a_{n1}x_1 \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Ей соответствует матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2),$$

которое можно записать в виде:

$$AX = B, \qquad (3)$$

A=(a_{ij}) – основная матрица, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов.

Метод Крамера

Решение систем уравнений

Пусть имеется система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Обозначим через Δ определитель матрицы системы и через Δ_j определитель, который получается из определителя Δ заметой j-го столбца столбцом правых частей системы ($j=1,2,\ldots n$).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2 способ. Способ обратной матрицы

- Систему линейных уравнений можно представить в виде матричного уравнения

$$A * X = B$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$$

$$E * X = A^{-1} * B$$

$$\boxed{X = A^{-1} * B}$$

Аналитическая геометрия
Векторы на плоскости и в пространстве

Линейные операции над векторами

1. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец – с концом вектора $\bar{b}$ (правило треугольника).
2. Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, для которого $\bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$.
3. Произведением вектора $\bar{a}$ на число (скаляр) λ называется вектор, длина которого равна $|\lambda||\bar{a}|$, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположено направленный, если $\lambda<0$.
4. Скалярным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, равное произведению их длин (модулей) на косинус угла между ними:

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Утверждение. Скалярное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулю, если векторы перпендикулярны (ортогональны), и наоборот.

Операции над векторами, заданными в координатной форме

1. Два вектора равны, если их координаты равны.

2. При сложении векторов, заданных в координатной форме, их координаты складываются.

3. При вычитании векторов, заданных в координатной форме, их координаты вычитаются.

4. При умножении вектора на число надо все его координаты умножить на это число.

5. Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$, заданных в координатной форме, определяется числом вида

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

Уравнение прямой на плоскости

- **Уравнение прямой в общем виде**

$$Ax + By + C = 0$$

Где *A, B, C* – числа.

- **Уравнение прямой, проходящей через данную точку**

$$y - y_1 = k\,(x - x_1)$$

- **Уравнение прямой, проходящей через две точки**

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- **Угол между двумя прямыми**

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \pm\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 * k_1}\right|$$

Где k_2, k_1 – угловые коэффициенты прямых

Формула берётся со знаком «+», если угол между прямыми острый, т.к. тангенс острого угла – число положительное;

Формула берётся со знаком «-», если угол между прямыми тупой, т.к. тангенс тупого угла – число отрицательное.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

а, в – прямые

k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых

а II в, если $k_2 = k_1$

а $\perp$ ***в, если*** $k_2 = -\frac{1}{k_1}$

Расстояние от точки до прямой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Точка пересечения прямых

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Аналитическая геометрия в пространстве

- Уравнение плоскости в пространстве, проходящей через точку $M_0\ (x_0\,;\ y_0\,;\ z_0)$, перпендикулярно вектору $n=(A;\ B;C)$:

$$A * (x - x_0) + B * (y - y_0) + C * (z - z_0) = 0$$

- Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Уравнение плоскости в отрезках

$A\ (a;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ b;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ c)$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Уравнение прямой в пространстве

- Параметрическое:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

- Каноническое: *S (m; n; p)* – направляющий вектор, $M_0\ (x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = (t)$$

- Уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

- Общее уравнение (пересечение двух плоскостей)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Кривые второго порядка

Общее уравнение второго порядка относительно x и y члены второй степени (x^2, xy, y^2), первой степени (x, y) и нулевой степени (свободный член), имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля.

Данной уравнение является уравнением второй степени, а линии, уравнения которых описываются этими уравнениями, называются кривыми второго порядка на плоскости.

1. Окружность

Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от точки $C(a,b)$ на расстояние R.

Точка C называется центром окружности, R – радиус данной окружности.

Уравнение окружности с центром в точке $C(a,b)$ и с радиусом R имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = \mathrm{R}^2.$$

2. Эллипс

Эллипс – это геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса в выбранной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2\ (c<a)$.

Вершины эллипса имеют следующие координаты:

$A_1(a,0),\ A_2(-a,0),\ B_1(0,b),\ B_2(0,-b)$.

Отрезок $A_1A_2=2a$ **- большая ось эллипса, отрезок** $B_1B_2=2b$ **- малая ось эллипса, соответственно** a **и** b **- большая и малая полуоси эллипса.**

Фокуса эллипса имеют следующие координаты:

$F_1(c,0), F_2(-c,0)$. **Ось симметрии эллипса, на которой находятся фокусы, называется фокальной осью.**

Замечание 1. Если $a=b\ (c=0)$, **тогда каноническое уравнение эллипса примет вид** $x^2+y^2=a^2$ **и определяет окружность, а значит, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса с равными полуосями.**

Замечание 2. Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ **называется эксцентриситетом эллипса.**

Замечание 3. Если фокусы эллипса расположены на оси OY, то эллипс «вытягивается» вдоль оси OY, тогда фокусы имеют координаты $F_1(0,c), F_2(0,-c)$, $c^2=b^2-a^2;\ \varepsilon=\dfrac{c}{b}$.

3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы в выбранной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ $(c > a)$.

Вершины эллипса имеют следующие координаты:

$A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$.

Отрезок $A_1A_2 = 2a$ - большая ось эллипса, отрезок $B_1B_2 = 2b$ - малая ось эллипса, соответственно a и b - большая и малая полуоси эллипса.

Фокуса эллипса имеют следующие координаты:

$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$.

Асимптоты гиперболы – это прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

При $a = b$ гипербола называется равносторонней.

Замечание 1. Если мнимая ось гиперболы равна $2a$ и расположена на оси OX, а действительная ось равна $2b$ и расположена на оси OY, то уравнение такой гиперболы имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Замечание 2. Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

4. Парабола

Парабола есть геометрическое место точек на плоскости, равноотстоящих от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.
Каноническое уравнений параболы в выбранной системе координат имеет вид:

$$y^2 = 2px.$$

Уравнение директрисы имеет вид:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Фокус имеет координаты $F(\frac{p}{2},0)$.

Замечание 1. Уравнение $y^2 = -2px$ определяет параболу, область определения которой x<0.
Замечание 2. Парабола $x^2 = 2py$ имеет вершину в начале координат, фокус $F(0,\frac{p}{2})$, директрису $y = -\frac{p}{2}$, ветви параболы направлены в положительную сторону оси OY, и ветви направлены в отрицательную сторону оси OY, если уравнение параболы $x^2 = -2py$.

Математический анализ

Функции

Функцией (числовой функцией) называется отображение числового множества D в числовое множество E.

Функцию записывают так: $y=f(x)$.

Множество D называется областью определения функции, а его элемент - аргументом. Множество E называется областью значений функции, а его элемент - функцией (значением функции, зависимой переменной).

Графиком функции $y=f(x)$ называют множество точек на плоскости, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента , а ординаты – соответствующими значениями функции.

Предел переменной величины

Предел – одно из основных понятий математического анализа. Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.

Пусть переменная величина x в процессе своего изменения неограниченно приближается к числу 5, принимая при этом следующие значения: 4,9; 4,99;4,999;…или 5,1; 5,01; 5,001;… В этих случаях модуль разности стремится к нулю: = 0,1; 0,01; 0,001;…

Число 5 в приведенном примере называют пределом переменной величины x и пишут lim x = 5.

Определение. Постоянная величина a называется пределом переменной x, если модуль разности при изменении x становится и остается меньше любого как угодно малого положительного числа e.

Предел функции в точке

Определение. Число b называется пределом функции в точке a, если для всех значений x, достаточно близких к a и отличных от a, значения функции сколь угодно мало отличаются от числа b.

Основные свойства пределов

1. Предел алгебраической суммы конченного числа переменных величин равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$\lim(x + y + \ldots + t) = \lim x + \lim y + \ldots + \lim t.$

2. Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению их пределов:

$\lim(x \cdot y \ldots t) = \lim x \cdot \lim y \ldots \lim t.$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$\lim(cx) = \lim c \cdot \lim x = c \lim x.$

Например, $\lim(5x + 3) = \lim 5x + \lim 3 = 5 \lim x + 3.$

$\neq 0$

4. Предел отношения двух переменных величин равен отношению пределов, если предел знаменателя не равен нулю

5. Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной:

Замечательные пределы

В математике важную роль играют два специальных предела, которые ввиду их важности названы «замечательными»:

$$\lim_{x \leftarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ - первый замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$ - второй замечательный предел

Пример 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 5$$

Пример 2. $\lim_{x \to \infty} (1 - \frac{1}{x})^x$ $\quad x = -y,\ при\ x \to \infty, y \to \infty$

$$\lim_{y \to \infty} (1 + \frac{1}{y})^{-y} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{y})^y} = \frac{1}{\lim_{y \to \infty} (1 + \frac{1}{y})^y} = \frac{1}{e}$$

Раскрытие неопределенностей

Иногда правила предельного перехода непосредственно неприменимы.

Например, при отыскании $\lim \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$

когда f(x)→0, φ(x) →0 или f(x)→∞, φ(x) → ∞.

В этом случае надо проделать над дробью некоторые преобразования. Чтобы обозначить такие ситуации, говорят, что имеем дело с неопределенностью $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

Дифференциальное исчисление

Производной функции *y=f (x)* называется скорость изменения функции в данный момент времени (мгновенная скорость)

Таблица производных

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

$$(\sqrt[n]{x^m})' = (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \times \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(c') = 0$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Правила дифференцирования

$$(cf)' = cf'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad g \neq 0$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пример. Вычислите производную функции

$$y = x + (1-x)\ln(1-x)$$

$$y' = 1 + (1-x)'\ln(1-x) + (1-x)(\ln(1-x))' = 1 - \ln(1-x) + \frac{1-x}{1-x}\cdot(-1) = -\ln(1-x)$$

Применение производной к построению графика функции.
Возрастание и убывание функции. Экстремумы.

Функция $y=f(x)$ возрастает на некотором интервале [a;b], если производная функции на этом интервале больше нуля $f'(x)>0$.

Если $f'(x)<0$, то функция убывает.

Точка x_0 называется точкой экстремума функции, если:

1) $f'(x)$ в этой точке равна нулю или не существует
2) функция в этой точке должна существовать
3) $f'(x)$ при переходе через точку меняет свой знак:
   - с «+» на «–» точка максимума max
   - с «–» на «+» точка минимума min

Промежутки выпуклости функции. Точки перегиба

Функция $y=f(x)$ на промежутке [a; b]

Если вторая производная $f''(x)>0$, то функция на промежутке [a; b] является выпуклой вниз.

Если $f''(x)<0$, то функция выпукла вверх.

Точка x_0 является точкой перегиба функции, если:

1) $f''(x)=0$ или $f''(x)$ не существует;
2) $f(x)$ в этой точке существует;
3) $f''(x)$ при переходе через эту точку меняет свой знак.

Пример.
Исследовать функцию f(x) и построить ее график

$$f(x) = \frac{1}{10}(2x^3 - 3x^2 - 12x - 7)$$

1) Область определения R.

2) Функция непериодическая.

3) Четность/нечетность - функция общего вида.

$$f(-x) = \frac{1}{10}(-2x^3 - 3x^2 + 12x - 7) \neq -f(x) \neq f(x)$$

4) Точки пересечения с осью ОХ:
$y = 0$

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = 0$$

$$2x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 5x - 7x - 7 = 0$$

$$2x^2(x+1) - 5x(x+1) - 7(x+1) = 0$$

$$x_1 = -1;$$

$$2x^2 - 5x - 7 = 0 \quad D = 25 + 56 = 81$$

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm 9}{4} = \frac{7}{2}; -1;$$

$$A(-1;\,0),\ B\left(\frac{7}{2};\,0\right)$$

с осью OY: x = 0 ; y = -7\10

$$y > 0 \quad при \quad x \in \left(\frac{7}{2}; \infty\right)$$

$$y < 0 \quad при \quad x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{10}(x+1)^2(x-3{,}5)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

5) Экстремумы, возрастание, убывание

$$y' = \frac{1}{10}\left(6x^2 - 6x - 12\right) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = -1;\ 2$$

$$x_{\max} = -1; \quad y_{\max} = \frac{1}{10}(-2-3+12-7) = 0$$

$$x_{\min} = 2; \quad y_{\min} = \frac{1}{10}(16-12-24-7) = \frac{-27}{10} = -2{,}7$$

x	$(-\infty; -1]$	$[-1; 2]$	$[2; \infty)$
y'	+	-	+
y	возрастание	убывание	возрастание

6) Выпуклость/вогнутость

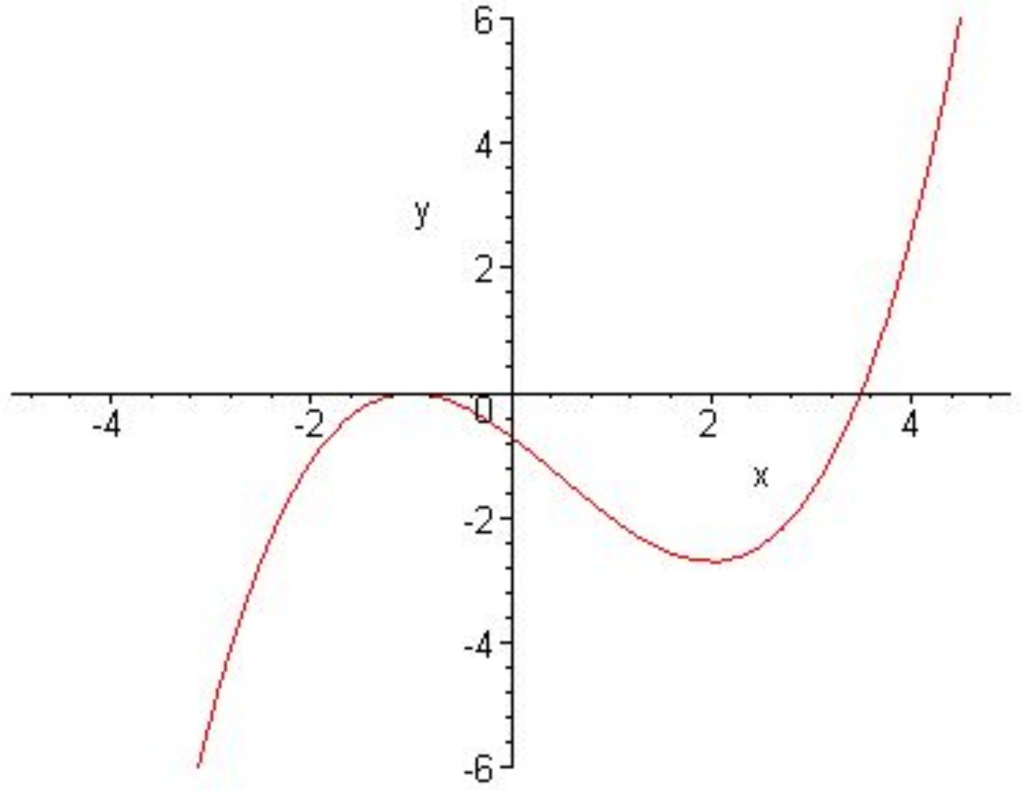
$$y'' = \frac{6}{10}(2x - 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} - \textit{точка перегиба}$$

$$x \in (-\infty;\, 0{,}5) \to y'' < 0 - \textit{выпуклость}$$

$$x \in (\,0{,}5;\, \infty) \to y'' > 0 - \textit{вогнутость}$$

ГРАФИК ФУНКЦИИ



Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как

$(\cos x)' = -\sin x$.

Очевидно, если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал- подынтегральному выражению. Действительно:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{a} dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$.

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Примеры

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем

$\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5}\int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x + C .$$

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin xdx$, где $n = 1,2\ldots k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2\ldots k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm k.$;

г) $\int x^n \ln xdx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$, а, например $\sin xdx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Примеры

Пример. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Решение.

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C \ .$$

Определенный интеграл

С геометрической точки зрения

при $f(x) \geq 0$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен

площади криволинейной трапеции

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

Свойства определенного интеграла

5. $\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$;

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx \ge 0$, если $f(x) \ge 0$.

Вычисление определенного интеграла

Теорема.
Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

Пример

Вычислить $\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx$

$$\int_0^3 e^{-\frac{x}{3}}dx=\int_0^3 e^{-\frac{1}{3}\cdot x}dx=-3e^{-\frac{1}{3}\cdot x}\Big|_0^3=-3\left(e^{-\frac{1}{3}\cdot 3}-e^{-\frac{1}{3}\cdot 0}\right)=$$

$$=-3\left(e^{-1}-1\right)=-3\left(\frac{1}{e}-1\right)=-3\frac{1-e}{e}$$

Вычисление интеграла

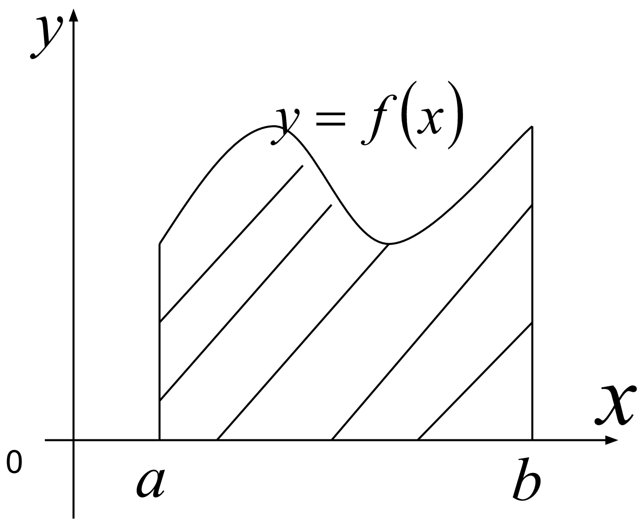
Теорема (Замена переменной в определенном интеграле).

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\ .$$

Вычисление площадей

Площадь фигуры в декартовых координатах.



Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Вычисление площадей

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$