СТАТИСТИЧНА ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

Методи математичної статистики дозволяють перевірити:

- припущення про закон розподілу деяких випадкових величин (генеральної сукупності);
- про значення параметрів цього розподілу;
- про наявність кореляційної залежності між випадковими величинами, визначених на множині об'єктів однієї і тієї ж генеральної сукупності.

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу, про параметри відомих розподілів.

Задача полягає в тому, щоб підтвердити або спростувати гіпотезу, ***використовуючи вибіркові*** (експериментальні) ***дані.***

Перевірити статистичну гіпотезу – це означає перевірити, чи узгоджуються вибіркові дані з цією гіпотезою.

Перевірка здійснюється за допомогою ***статистичного критерію.***

Статистичний критерій – це випадкова величина, ***закон розподілу*** якої (разом із значеннями параметрів) відомий у випадку, якщо прийнята гіпотеза ***справедлива.***

Звичайно використовуються критерії Стьюдента, Фішера, $\chi 2$ (Пірсона) та ін.

Послідовність дій

Крок 1. Сформулювати основну та альтернативну гіпотези.

Крок 2. Задати рівень значущості α.

Крок 3. Обираємо критерій для перевірки гіпотези

Крок 4. По таблиці знайти **критичні значення** та побудувати **критичну область.**

Крок 5. За вибіркою порахувати **значення статистики**.

Крок 6. Порівняти отримане значення з критичною областю. Зробити висновок

1. Сформулювати основну та альтернативну гіпотези.

Нульовою (основною) гіпотезою називають висунуту гіпотезу $\boldsymbol{H_0}$. Разом з нульовою гіпотезою $\boldsymbol{H_0}$ висувається ***альтернативна*** або ***конкуруюча*** гіпотеза $\boldsymbol{H_1}$, що суперечить нульовій.

Наприклад :

1)H0 : Q1 = Q2; *H1 : Q1 > Q2 ;*

2) H0 : Q1 = Q2; *H1 : Q1 < Q2;*

3) H0 : Q1 = Q2; *H1 : Q1 ≠Q2.*

2. Задати рівень значущості α.

Виберемо деяку малу величину **α (0,05; 0,01; 0,001) – рівень значущості .**

Ймовірність α називають ***рівнем значущості***.

Це ймовірність здійснення ***помилки першого роду***, тобто відкидання гіпотези H_0, коли вона вірна.

3. Обираємо критерій для перевірки гіпотези

Нехай випадкова величина ***K*** – статистичний критерій перевірки деякої гіпотези $\boldsymbol{H_0}$. При справедливості $\boldsymbol{H_0}$ закон розподілу випадкової величини ***K*** характеризується деякою ***відомою*** щільністю розподілу ймовірності ***p(K).***

4. Знайти критичні значення та побудувати критичну область.

Визначимо ***критичне значення критерію*** $K_{кр}$ як розв'язок одного з трьох рівнянь залежно від ***вигляду*** H_0 та H_1 .

1) H0 : Q1 = Q2;

H1 : Q1 > Q2

$$\boldsymbol{P\,(K > K_{\text{критичне}}) = \alpha}\,, \qquad \textbf{(1)}$$

2) $H0: \; Q1 = Q2;$

$\boldsymbol{H1: \; Q1 < Q2}$

$$\boldsymbol{P\,(K < K_{\text{критичне}}) = \alpha\,,} \qquad \textbf{(2)}$$

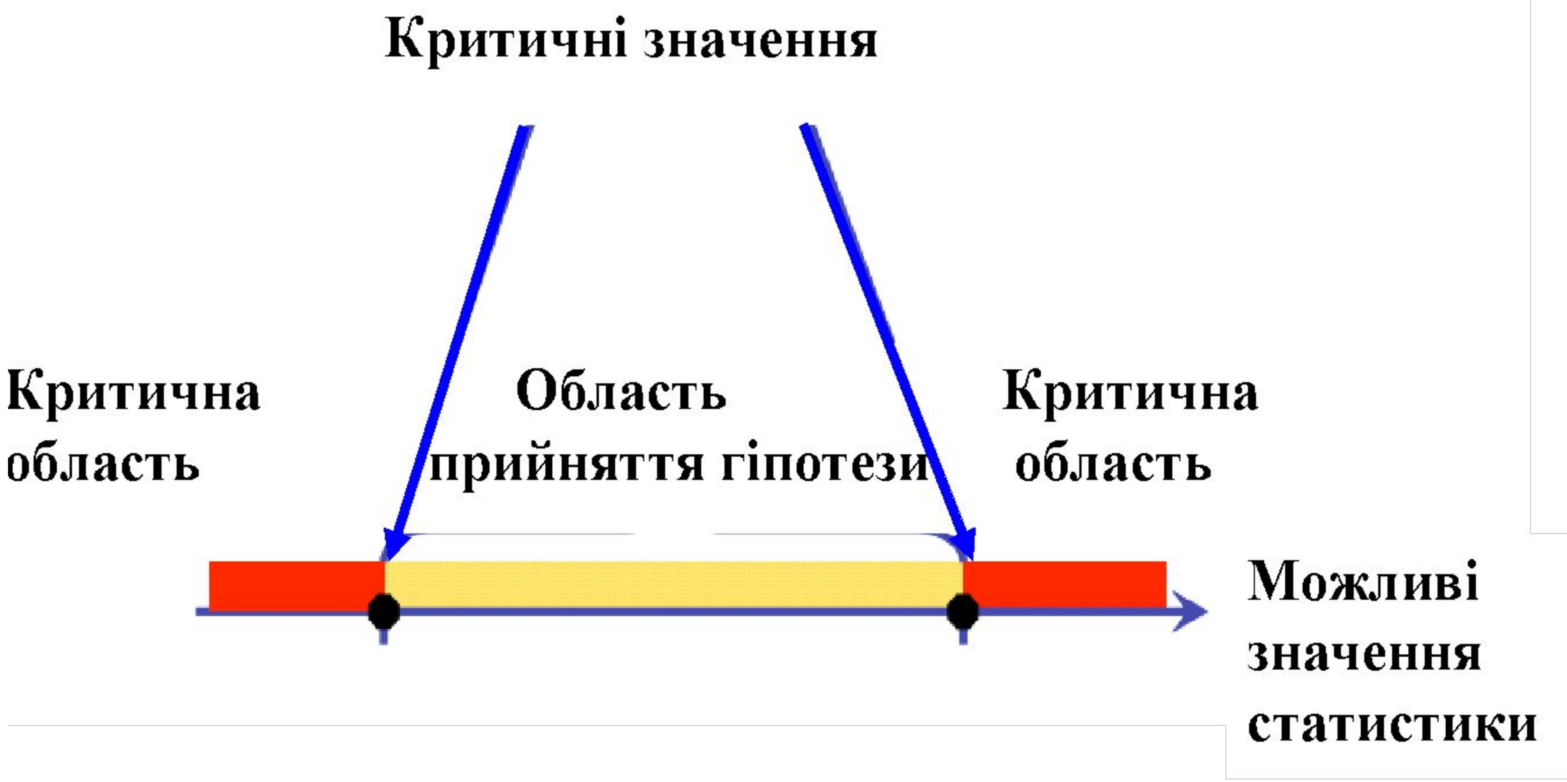
3) $H0: \; Q1 = Q2;$

$\boldsymbol{H1: \; Q1 \neq Q2}$

$$\boldsymbol{P\,(K < K_{\text{критичне}1}) + P\,(K > K_{\text{критичне}2}) = \alpha.} \qquad \textbf{(3)}$$

- Розв'язок рівнянь (1–3) полягає в такому: за заданою імовірністю α, знаючи *p(K)*, **задану, як правило, у вигляді таблиць,** потрібно визначити критичне значення критерію (*K***критичне***).

- Критичні значення відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези.



Множина значень статистики включає дві області:

1 **Область прийняття гіпотези,** тобто безліч тих значень статистики, при яких гіпотеза H_0 приймається;

2 **Критичну область**, тобто безліч тих значень статистики, при яких гіпотеза H_0 відхиляється і приймається альтернативна гіпотеза H_1.

5. За вибіркою порахувати **значення статистики**.

Після побудови критичної області **обчислюють значення статистики по вибірці** і порівнюють його з критичною областю.

6. Порівняти отримане значення з критичною областю. Зробити висновок

Якщо **значення статистики** потрапило в **область прийняття гіпотези**, то гіпотеза H_0 ***приймається***

Якщо **значення статистики** потрапило **в критичну область**, то гіпотеза H_0 ***відхиляється*** і приймається альтернативна гіпотеза H_1

Розглянемо рівняння

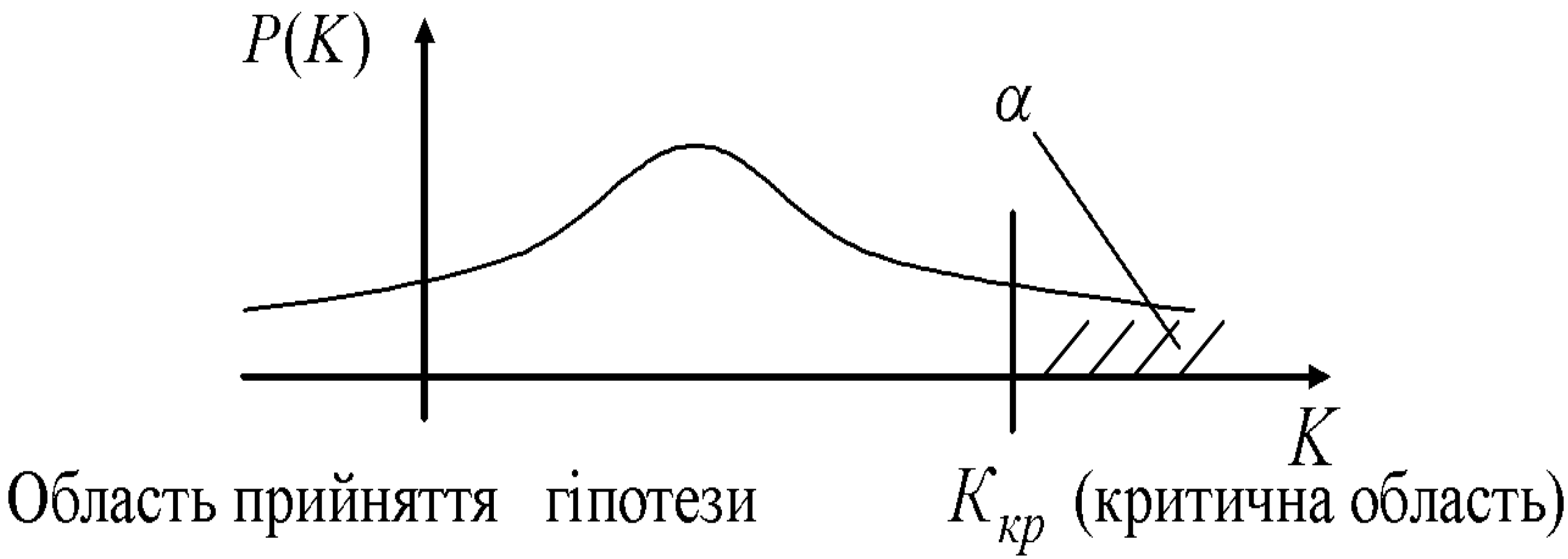
$$P\ (K > K\textbf{критичне}) = \alpha \quad (1).$$

Розв’язавши його, знаходимо значення *K***критичне**, що розбиває числову вісь на дві області:

K< *K***критичне**– область прийняття гіпотези;

K> *K***критичне**– критична область.

$P\ (K > K_{кр}) = \alpha$



$P(K)$
α
K
Область прийняття гіпотези
$K_{кр}$ (критична область)

Критична точка, що отримана з рівняння (1), називається ***правобічною.***

Обчислюємо ***К*****емпіричне** – значення критерію *K*, ***розраховане за вибірковими даними***

Правило:

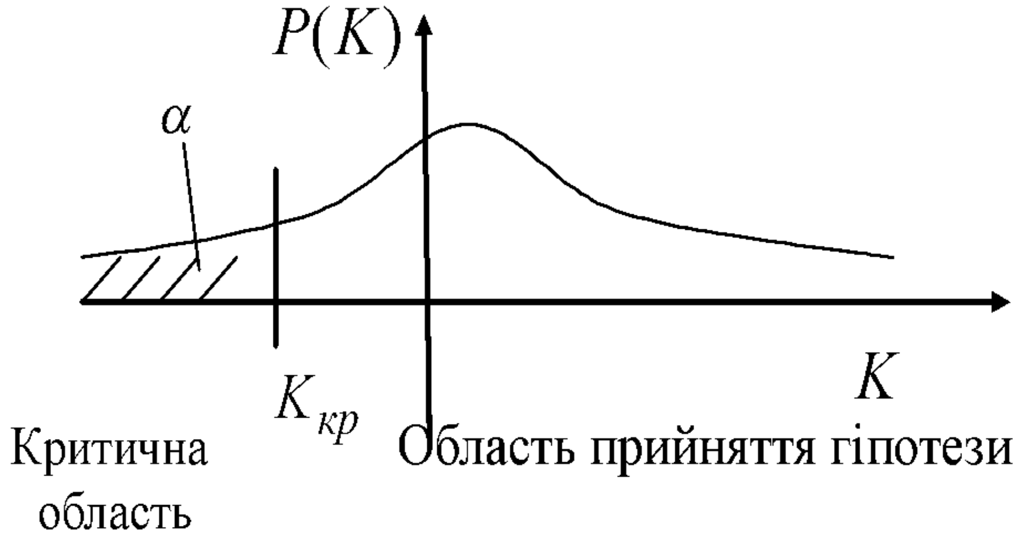
якщо

К*емпіричне > *Ккритичне – У цьому випадку говорять, що ***гіпотеза Н0 не узгоджується з вибірковими даними***. ***H_0 відкидається***;

К*емпіричне < *Ккритичне– ***вибіркові дані не суперечать гіпотезі Н*0. *H_0 приймається.***

$P\ (K < K_{кр}) = \alpha$,

Рівняння (2) визначає лівосторонню критичну область.



Правило:

якщо

Кемпіричне < Ккритичне– H_0 відкидається;

Кемпіричне> Ккритичне– H_0 приймається.

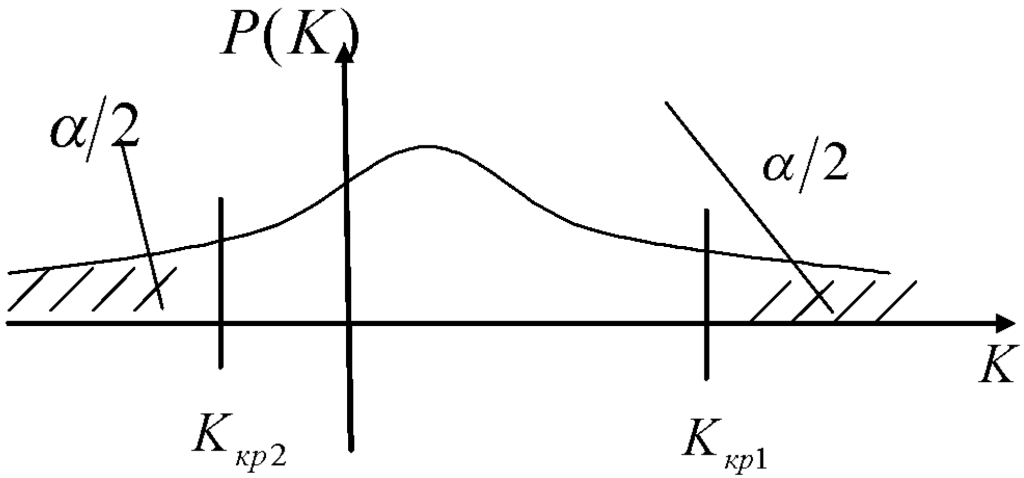
Рівняння (3) визначає двосторонню критичну область.

Звичайно $К_{kp1}$ і $К_{kp2}$ визначають таким чином, щоб виконувалася умова

.

$$P(K \leq K_{кр2}) = P(K \geq K_{кр1}) = \alpha/2$$

$$P(K \le K_{кр2}) = P(K \ge K_{кр1}) = \alpha/2$$



Правило:

|K**емпіричне**|>K**критичне** – H_0 відкидається ,

|K**емпіричне**|<K**критичне** – H_0 приймається.

Як бачимо, вигляд критичної області залежить від того, яка гіпотеза висунута як конкуруюча.

Перевірка гіпотези про закон розподілу

Нехай необхідно перевірити гіпотезу *H0* про те, що вибірка підкоряється певному закону розподілу, заданому функцією *F(x)*. Під альтернативною гіпотезою *H1* в цьому випадку будемо підрозумівати те, що просто не виконано основну гіпотезу.

Потрібно зробити висновок: чи погоджуються результати спостережень із висловленим припущенням. Для цього використаємо спеціально підібрану величину – критерій згоди.

Критерій згоди Пірсона – найбільш часто вживаний критерій для перевірки гіпотези про закон розподілу.

Для перевірки гіпотези про закон розподілу необхідно розрахувати **емпіричні** і **теоретичні** частоти.

Емпіричні та теоретичні частоти. Безперервний розподіл

Нехай при дослідженні випадкової величини була отримана вибірка розміром **n.** Весь інтервал можливих значень поділяють на **k** інтервалів. Інтервали не перетинаються і рівні між собою. Потім обчислюють n_i – кількість значень, що потрапили в i-й інтервал. Емпіричними називають частоти n_i, що фактично спостерігаються .

Теоретичні частоти

Теоретичні частоти безперервного розподілу знаходять за формулою

$$n_i' = NP_i \quad ,$$

де N – число випробувань;

P_i – ймовірність влучення X у *і-й* частковий інтервал, обчислена при допущенні, що X має функцію розподілу $F(x)$.

Теоретичні частоти

$$n_i^{'} = N(F(x_i) - F(x_{i-1})).$$

Зокрема, якщо є підстави припускати, що випадкова величина X розподілена нормально, то теоретичні частоти, обчислюють таким чином

Теоретичні частоти

$$n_i' = N(НОРМРАСП(x_i, \bar{x}, S, 1) -$$

$$- НОРМРАСП(x_{i-1}, \bar{x}, S, 1)),$$

де N – число випробувань;

x_i – права границя *i-го* інтервалу;

$\bar{x}$ – середнє значення;

S – стандартне відхилення.

Критерій згоди Пірсона

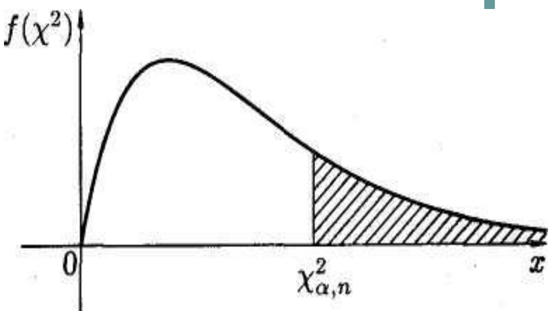
Нульова гіпотеза: генеральна сукупність розподілена за законом ***F(x).*** В якості критерію обираємо випадкову величину

$$\chi^2_{емпіричне} = \sum_{i=1}^{L} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}}$$

де n_i – емпіричні частоти;

$n_i^{'}$ – теоретичні частоти.

Для рівня значущості α знаходимо χ^2_{kp} , розв’язуючи рівняння



$$P(\chi^2 > \chi^2_{\text{критичне}}) = \alpha,$$

$$\chi^2_{\text{критичне}} = \text{ХИ2ОБР}(\alpha; K),$$

де $K = L - 1 - r$;

L – число часткових інтервалів;

r – число параметрів розподілу. Для нормального закону $r = 2$.

Якщо χ^2 **емпіричне** $<$ χ^2**критичне** – гіпотезу про закон розподілу **приймаємо**.

Якщо χ^2 **емпіричне** $>$ χ^2**критичне** – гіпотезу H_0 відкидаємо.

Обсяг вибірки повинен бути більше ніж 50.

Приклад

У таблиці наведені значення частот. Розрахувати теоретичні частоти в припущенні, що вибірка має нормальний закон розподілу. Відомо, що $\bar{\chi}=42,37$, $S=0,94$. З рівнем значущості $\alpha=0,01$ перевірити гіпотезу про закон розподілу.

i	0	1	2	3	4	5
інтервали	(-∞;40]	(40;41]	(41;42]	(42;43]	(43;44]	(44;46]
n_i – емпіричні частоти	0	20	112	154	73	15

Оскільки $\overline{x}=42,37$, $S=0,94$, нормальний закон розподілу для нашої вибірки можна записати у вигляді $N(42,37;\ 0,94)$.

Перевірка гіпотези про закон розподілу

Інтервал	Кишені	Середини інтервалів	n_i	$F(X)$	P_i	n'_i	χ_i^2
	X_i	$(X_i+X_{i-1})/2$	Емпіричні частоти	НОРМРАСП(X_i, $X_{ср}$, S,1)	$F(X_i)-F(X_{i-1})$	Теоретичні частоти NP_i	$\frac{(n_i-n'_i)^2}{n'_i}$
$(-\infty;40]$	40	39,5	0	0,0058			
(40;41]	41	40,5	20	0,0724	0,066	24,92	0,97
(41;42]	42	41,5	112	0,3469	0,274	102,63	0,85
(42;43]	43	42,5	154	0,7486	0,401	150,23	0,09
(43;44]	44	43,5	73	0,958	0,209	78,50	0,38
(44;46]	46	45	15	0,999	0,0413	15,48	0,015
Сума			374	$\chi^2_{емпіричне}$ =			2,32
				$\chi^2_{критичне}$ =ХИ2ОБР(0,01;2)=			9,21

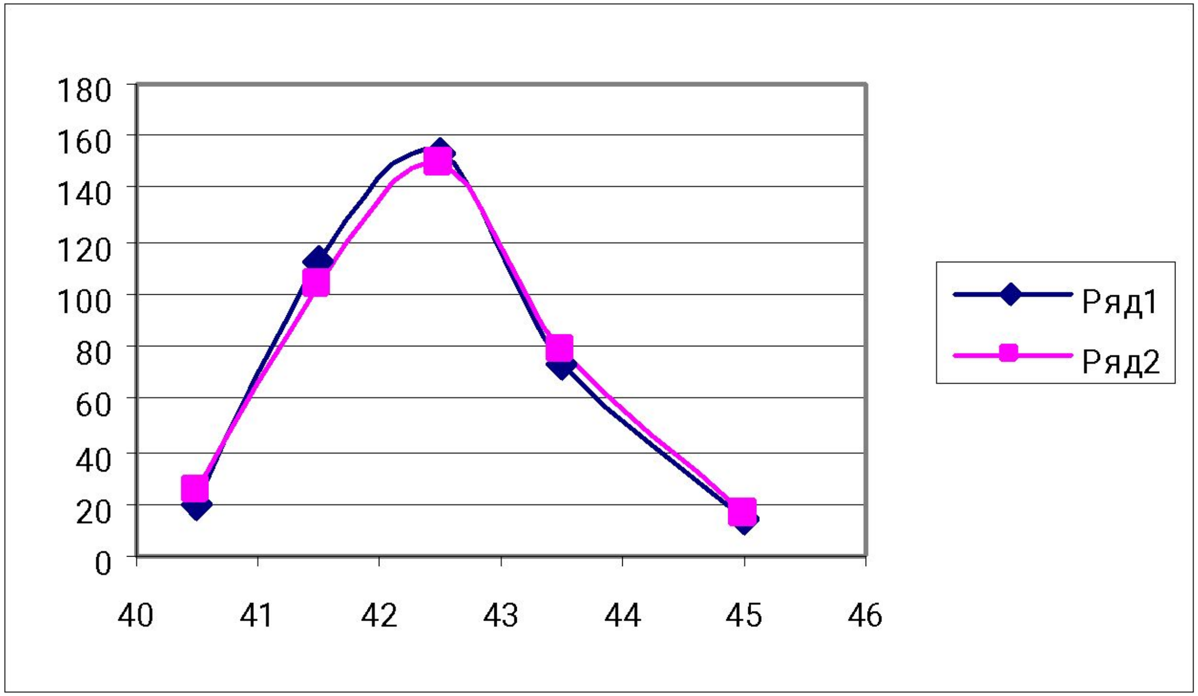
Для розглянутого прикладу $\chi^2_{\textbf{емпіричне}} = 2,32.$

χ^2 **критичне**= Хи2Обр(0,01; 2) = *9,210351*

(*K* = *5 – 1 – 2 = 2*).

Оскільки $\chi^2_{\textbf{емпіричне}} < \chi^2_{\textbf{критичне}}$, гіпотеза про нормальний закон розподілу

N(20,27; 1,96) приймається з рівнем значущості 0,01.


180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
40
41
42
43
44
45
46
Ряд1
Ряд2

Параметрична статистика

При перевірці будь-якої гіпотези необхідно спиратися на якусь сукупність припущень, з яких і виводяться формули, необхідні для цієї перевірки. При цьому серед інших завжди наявні ***припущення про закон розподілу.***

Невиконання цих передумов робить некоректним застосування відповідних методів.

Параметричні методи припускають конкретний розподіл. Ці методи строго обґрунтовані і добре вивчені.

Надалі ми будемо розглядати критерії, в основі яких лежить ***припущення про нормальний закон розподілу***.

Перевірка гіпотези про нормальний розподіл вибірки

Точна перевірка (критерій Пірсона) досить трудомістка, і обсяг вибірки повинен бути досить великим ($n>50$), тому використовують перевірку умов, що є наслідком з нормального закону розподілу.

I спосіб - *RS*-метод

RS-метод полягає в наступному:

- Розраховуємо величину розмаху ***R*** між рівнями ряду і їх стандартне відхилення ***S***: ***R* = *X*max – *X*min**;

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(x_i - \overline{x})^2}$$

- Тоді розрахункове значення величини *RS* дорівнює відношенню *RS* = *R* / *S*.

- Розраховане значення величини *RS* порівнюється з табличним *RS*-критерієм (а саме, з його нижньою і верхньою межею для рівня значущості α). Якщо ці значення не потрапляють в інтервал між критичними (табличними) межами, то гіпотеза про нормальний закон відхиляється.

Наведемо декілька табличних значень меж *RS*-критерію (для $\alpha = 0{,}05$):

- для $n = 10$ нижня межа: 2,67; верхня межа: 3,685;
- для $n = 20$ нижня межа: 3,18; верхня межа: 4,49;
- для $n = 30$ нижня межа: 3,47; верхня межа: 4,849.

II спосіб

У випадку нормального розподілу оцінки дисперсії асиметрії As та ексцесу *Ek* дисперсії визначаються виразами

$$\sigma_{As}^{2}=\frac{6n(n-1)}{(n+3)(n+1)(n-2)}$$

$$\sigma_{Ek}^{2}=\frac{24n(n-1)^{2}}{(n+5)(n+3)(n-2)(n-3)}.$$

На практиці можна користуватися таким наближеним критерієм згоди :

$$\left| A_s \right| \leq 2\sigma_{As} \qquad \left| E_k \right| \leq 2\sigma_{Ek}$$

Якщо ці нерівності виконуються, то можна вважати, що гіпотеза про нормальний розподіл не суперечить наявним даним.

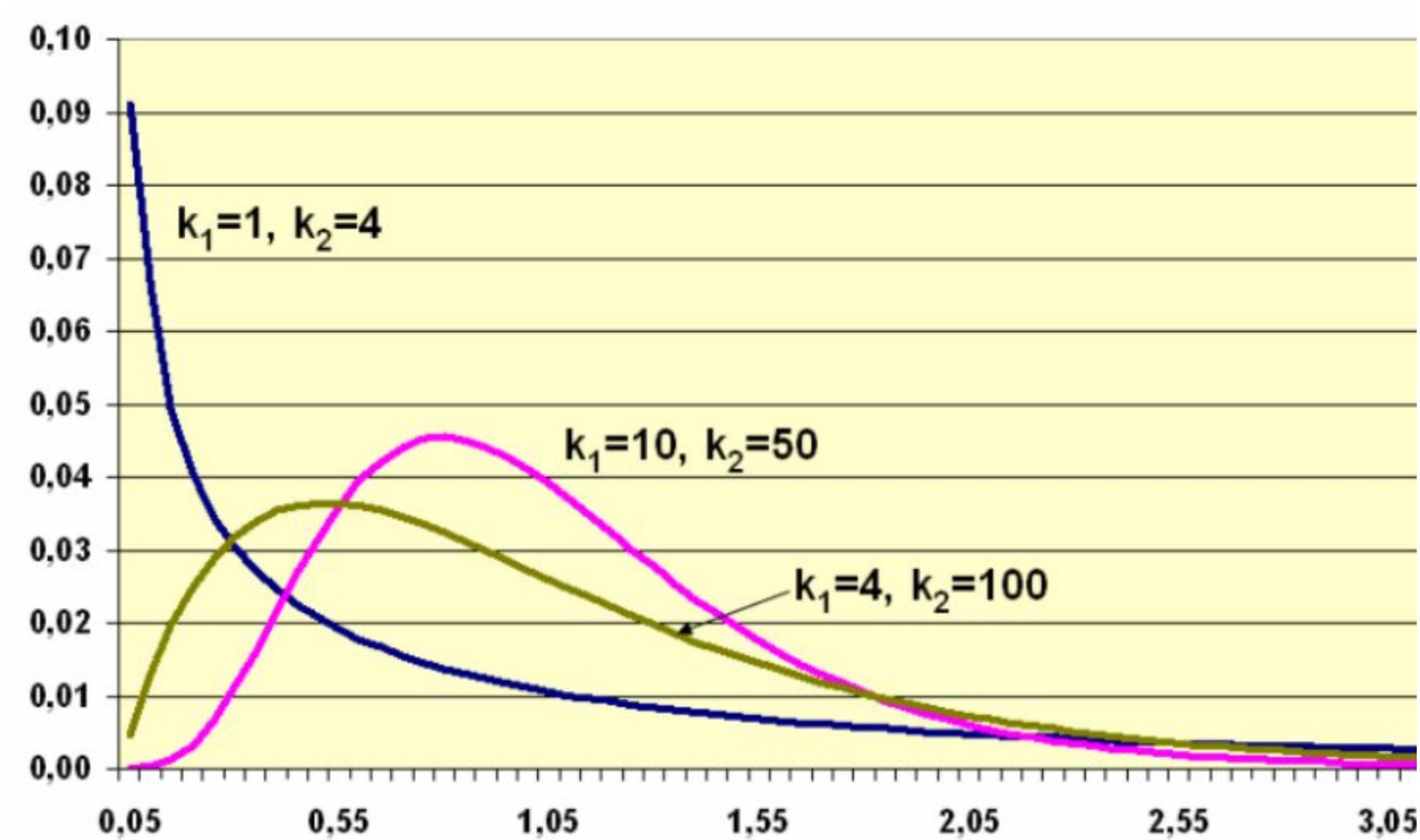
F-розподіл (розподіл Фішера)

Випадкова величина ***F*** розподілена за законом розподілу ***Фішера*** з k_1 і k_2 ступенями вільності

$$F = \frac{\dfrac{\xi}{k_1}}{\dfrac{\eta}{k_2}} = \frac{k_2 \xi}{k_1 \eta},$$

де **ξ , η**– випадкові величини, що розподілені за законом χ^2 з k_1 та k_2 ступенями вільності відповідно.

График распределения Фишера



При заданих числах k_1 і k_2 та за ймовірністю α за таблицею визначається значення F_α, таке, що

$$P(F > F_\alpha) = \alpha.$$

Excel

ФРАСП(F_α ; *ступені_вільності_1; ступені_вільності_2*).

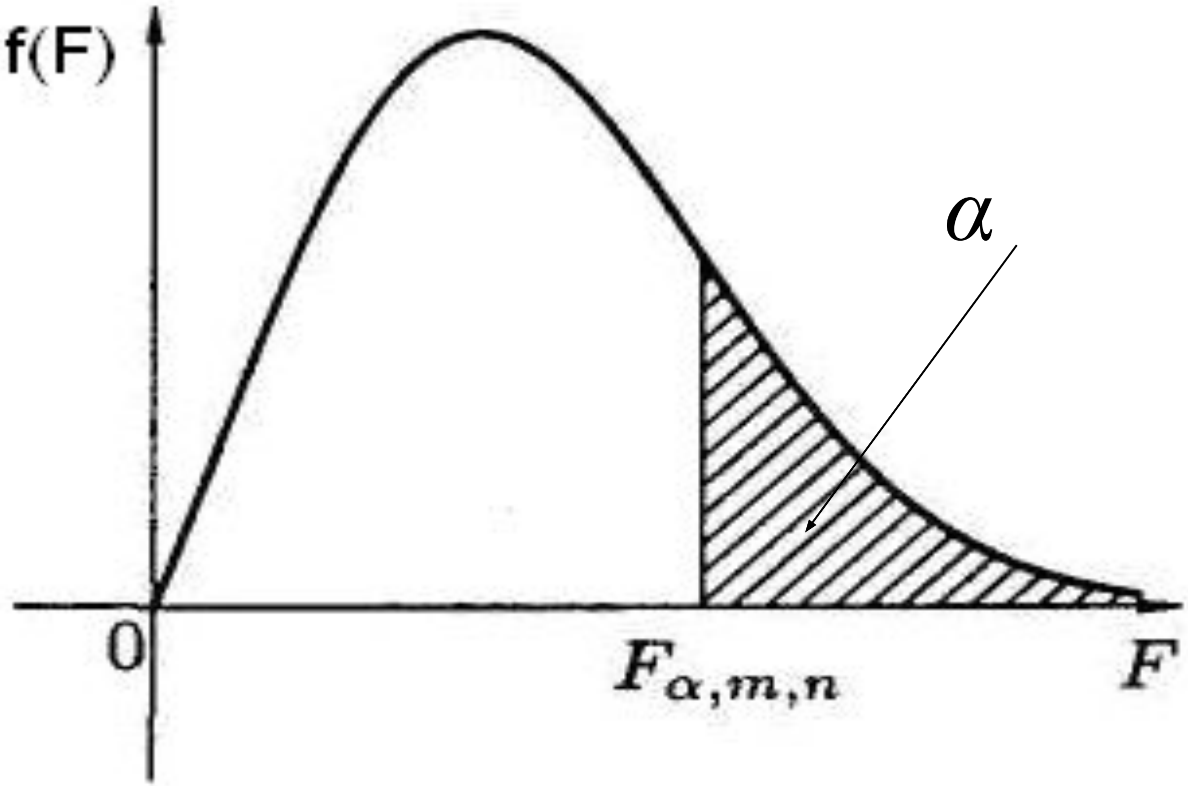
Повертає ймовірність α, що є розв’язком рівняння

$$P(F > F_\alpha) = \alpha$$

FРАСПОБР (***ймовірність; ступені_вільності1; ступені_вільності2***) – обчислюється значення F_α, що є розв'язком рівняння

$$P(F > F_\alpha) = \alpha$$

α



Порівняння двох дисперсій нормальної генеральної сукупності

На практиці задача порівняння дисперсій виникає, якщо потрібно порівняти точність приладів, інструментів, методів вимірювань та ін. Кращим є той прилад або метод, що забезпечує найменше розсіювання результатів, тобто меншу дисперсію.

Критерій Фішера

- ***<u>Вимога до даних</u>*: дані незалежні і розподілені нормально.**
- ***<u>Призначення</u>:*** перевірка гіпотези про належність двох дисперсій до однієї генеральної сукупності і, отже, їхньої рівності.

- Отже, нехай генеральні сукупності ознак X і **Y** розподілені нормально. З двох незалежних вибірок обсягами n_1 і n_2 обчислені "виправлені" вибіркові дисперсії S_x^2, S_y^2. Потрібно при даному значенні α перевірити основну гіпотезу про рівність генеральних дисперсій
- H_0: $S_x^2 = S_y^2$.

Критерій Фішера

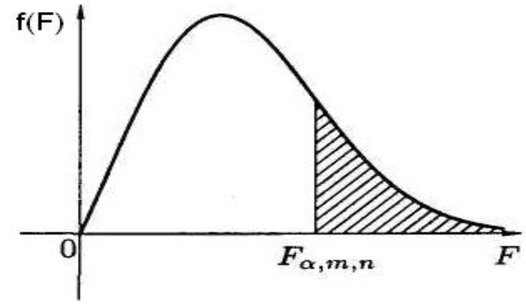
За критерій перевірки нульової гіпотези приймаємо відношення більшої "виправленої" дисперсії S_1^2 до меншої S_2^2, тобто випадкову величину

$$K = F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- Величина F має розподіл Фішера з ***k1=N1-1; k2=N2-1*** ступенями вільності, де ***N1*** і *N2* – розміри вибірок ($S_1^2 > S_2^2$).

- Критична область будується в залежності від виду конкуруючої гіпотези.

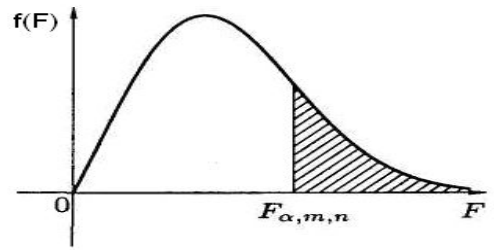
1) $H_0 : S_1^2 = S_2^2$; $H_1 : S_1^2 > S_2^2$



$F_{критичне}$ знаходимо з рівняння

$$P(F > F_{критичне}) = \alpha \text{ .}$$

$F_{критичне}$ знаходять за таблицею по заданому рівню значущості α та ступенях вільності k_1 та k_2.



- Якщо ***Fрозраховане < Fкритичне*** – гіпотеза H_0 приймається, тобто можна вважати, що вибіркові дисперсії різняться несуттєво.
- У протилежному разі – H_0 відхиляється;

2) $H_0 : S_1^2 = S_2^2$; $H_1 : S_1^2 \neq S_2^2$;

$F_{кр}$ знаходимо з рівняння $P(F > F_{кр}) = \alpha / 2$;

$F_p < F_{кр}$ – гіпотеза H_0 – приймається;

$F_p > F_{кр}$ – H_0 відкидається.

В *Excel*: функція ***FРАСПОБР(α; k; k2)*** – повертає ***Fкр. однобічне.***

Пакет **Анализ данных**:

Сервис – Анализ данных – Двухвыборочный F-тест для дисперсии.

Приклад.

- У таблиці наведені показники продуктивності праці робітника на верстаті до і після удосконалення за 7 і 6 годин відповідно. Чи можна при рівні значущості = 0,05 вважати удосконалення ефективним?

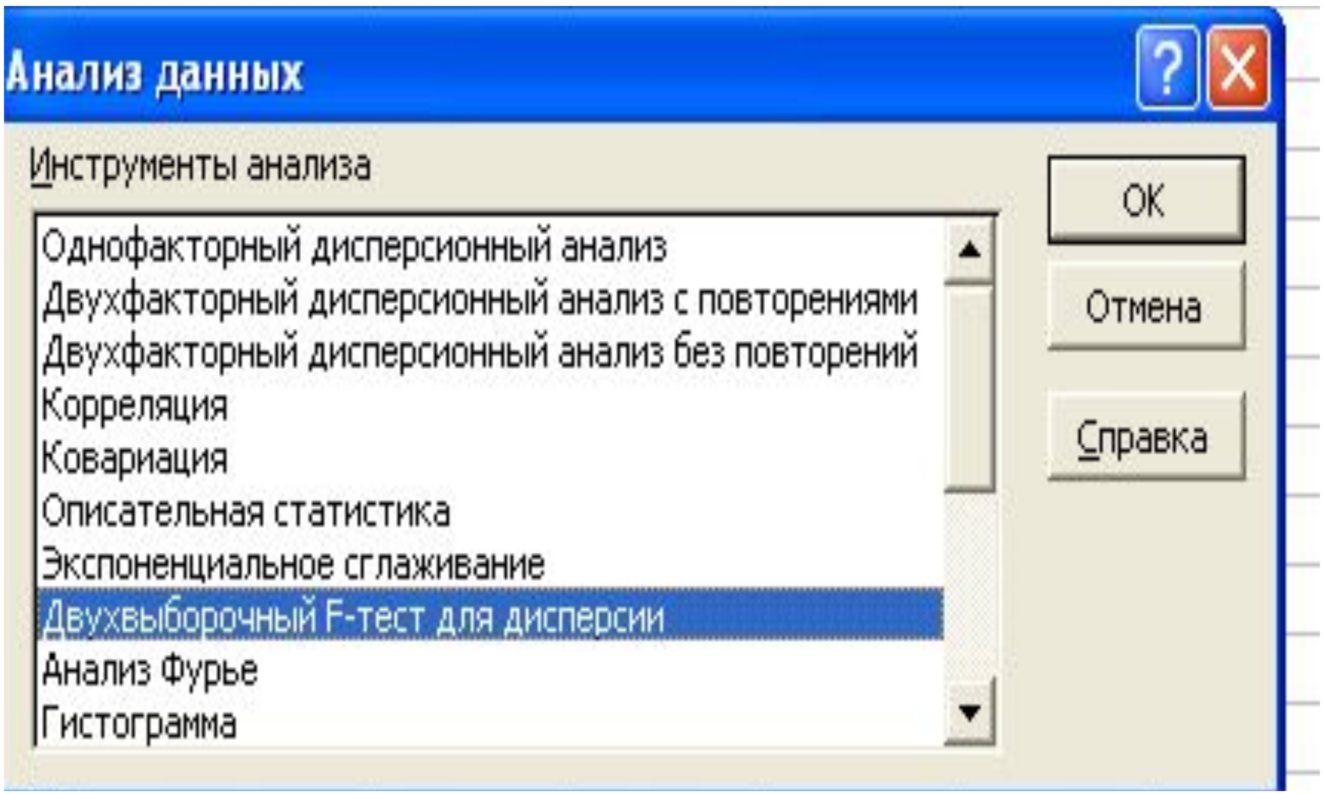
Старий	42	43	38	40	43	38	40
Новий	42	43	44	42	43	43	

Ефективність верстата залежить від дисперсії. Завдання полягає в порівнянні двох дисперсій.

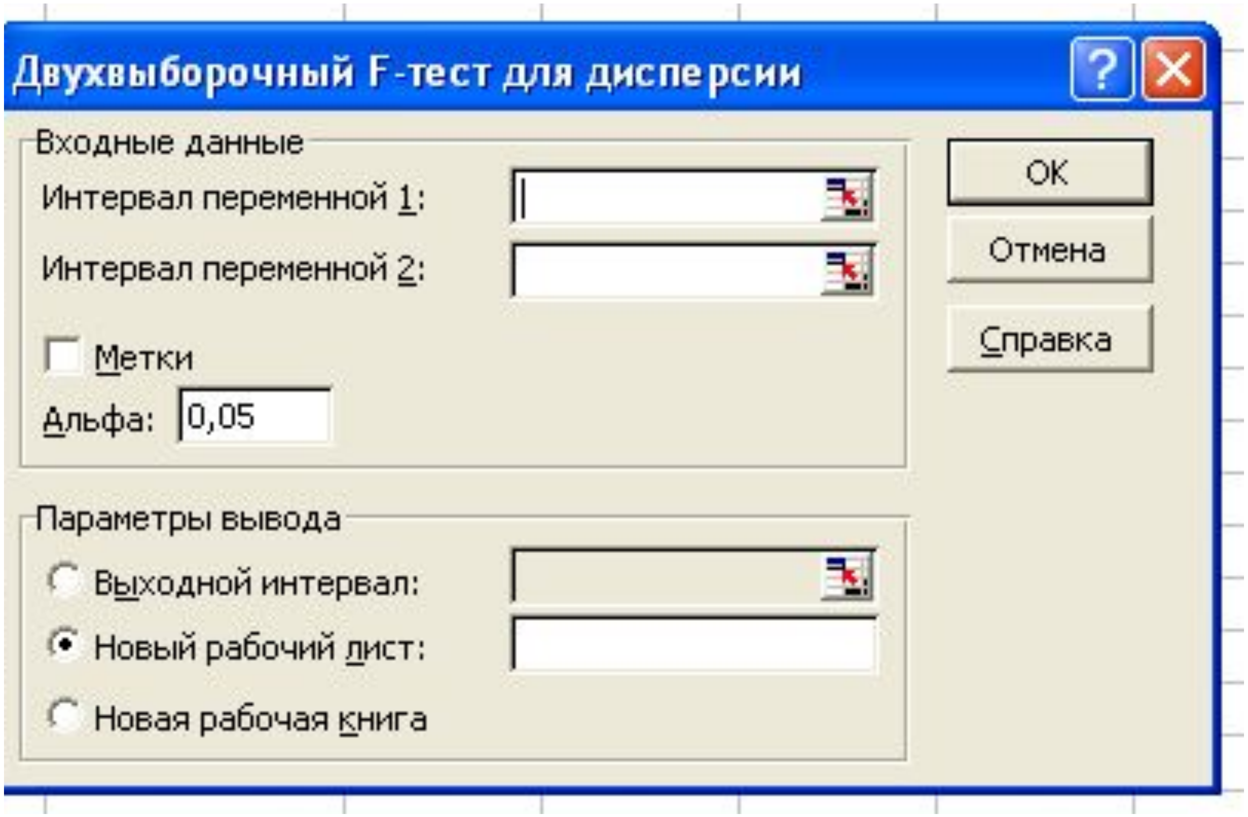
Висуваємо гіпотези:

$$H_0 : S_1^2 = S_2^2 \quad H_1 : S_1^2 > S_2^2$$

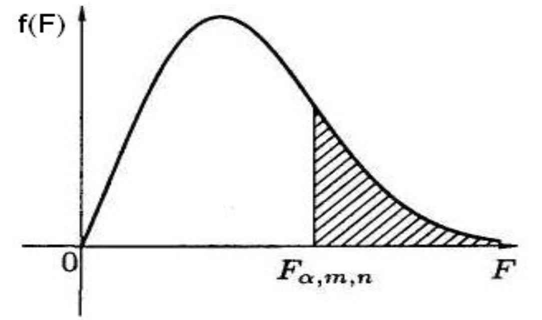
Розрахунки можна провести за допомогою пакета аналізу, обираємо: ***Сервис – Анализ данных***.



Обираємо ***Двухвыборочный F-тест для дисперсии***.



Двухвыборочный F-тест для дисперсий		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	40,57142857	42,83333333
Дисперсия	4,619047619	0,566666667
Наблюдения	7	6
df	6	5
F	**8,151260504**	
P(F<=f) одностороннее	0,017997241	
F критическое одностороннее	**4,950294397**	



df – кількість ступенів вільності,

F – розраховане значення ***Fрозраховане***,

F критическое одностороннее – відповідно ***Fкритичне.***

Fрозраховане > ***Fкритичне,*** отже, приймаємо гіпотезу H1: $S_1^2 > S_2^2$, тобто дисперсії різняться суттєво.

Висновок: можна вважати удосконалення верстата ефективним.

Порівняння виправленої вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральною дисперсією

На практиці ця гіпотеза перевіряється, якщо потрібно перевірити, чи відповідає точність приладів, інструментів, методів та ін. необхідному стандартові

Критерій перевірки

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2{}_0}$$

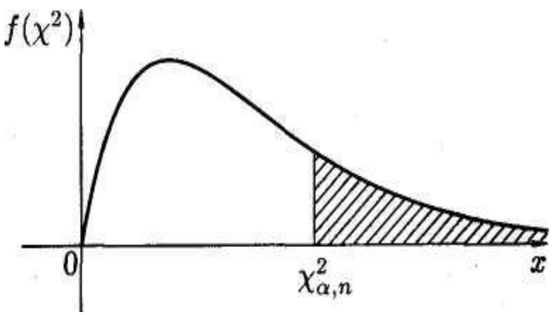
розподіл Пірсона з $k = n - 1$ ступенями вільності.

$H0$: $S^2 = \sigma_0{}^2$,

$H1$: $S^2 > \sigma_0{}^2$.

$\chi_{кр}{}^2$ *обчислюємо, як розв'язок рівняння*

$P(\chi^2 > \chi_{кр}{}^2) = \alpha$.



$\boldsymbol{\chi^2_{кр}}$ **= ХИ2ОБР(α; n-1)**

Якщо $\chi^2_p < \chi^2_{кр} - H_0$ *приймається.*

Перевірка гіпотез про середні для нормальної ген... сукупності

Можливі такі постановки задач:

1. Порівняння показників контрольної і експериментальної вибірок.

Можливі такі випадки:

А) Вибірки невеликого обсягу ($n<30$):

- дисперсії вибірок рівні;
- дисперсії вибірок не рівні;

Б) без припущення про дисперсії (вибірки великі $n>30$);

2 Порівняння показників вибірки до і після експерименту. У цьому випадку ми маємо справу з так званими зв'язними вибірками.

3 **Чи можна вважати, що деяке значення показника дорівнює деякому нормальному значенню.**

Перевірка гіпотези про рівність середніх при рівних дисперсіях (малі вибірки n<30)

Умови:

- Вибірки розподілені нормально.
- Дисперсії невідомі й однакові: .
- Дані незалежні.

Використовується ***критерій Стьюдента*** :

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^{\ 2} + (n_2 - 1)S_2^{\ 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

з *k=n1+n2-2* ступенями вільності,

де *n1, n2*-обсяг вибірок;

$\overline{x}_1, \overline{x}_2$ – середні значення;

$S_1^{\ 2}, S_2^{\ 2}$ – виправлені дисперсії.