

«Первообразная и интеграл»

Определение первообразной.

- Функция F называется **первообразной** для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x)$$

Основное свойство первообразной

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи важную роль играет следующее утверждение:

Признак постоянства функции.

Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке I , то функция F — постоянная на этом промежутке.

Все первообразные функции f можно записать с помощью одной формулы, которую называют *общим видом первообразных для функции f* .

Справедлива следующая теорема (**основное свойство первообразных**):

Теорема. *Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде*

$$F(x)+C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I ,

C — произвольная постоянная.

Геометрический смысл первообразной

Основному свойству первообразной можно придать геометрический смысл:

графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy (рис.).

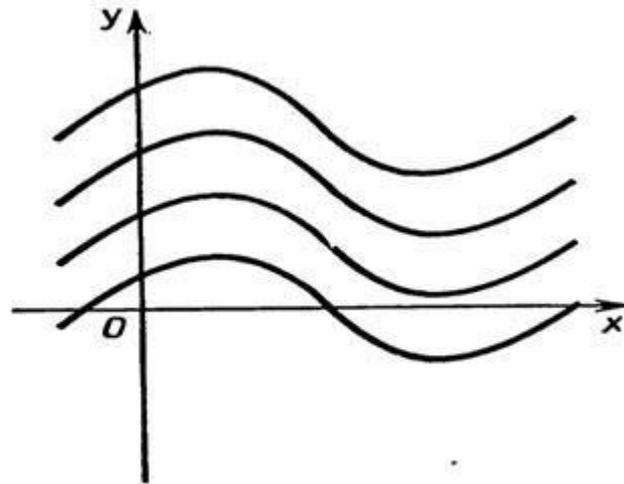


Таблица первообразных

Функция	Первообразные
a	$ax + C$
$x^p, p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + C$
$\frac{1}{x}, x < 0$	$\ln(-x) + C$
e^x	$e^x + C$

Функция	Первообразные
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Правила вычисления первообразных

Правило 1 *Если F есть первообразная для f , а G — первообразная для g , то $F+G$ есть первообразная для $f+g$.*

$$(F+G)' = F' + G' = f+g$$

- Правило 2. Если F есть первообразная для f , а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf .

$$(kF)' = kF' = kf.$$

- Правило 3. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.

Криволинейная трапеция

Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox задана непрерывная функция f , не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1), называют **криволинейной трапецией**.

Различные виды криволинейных трапеций

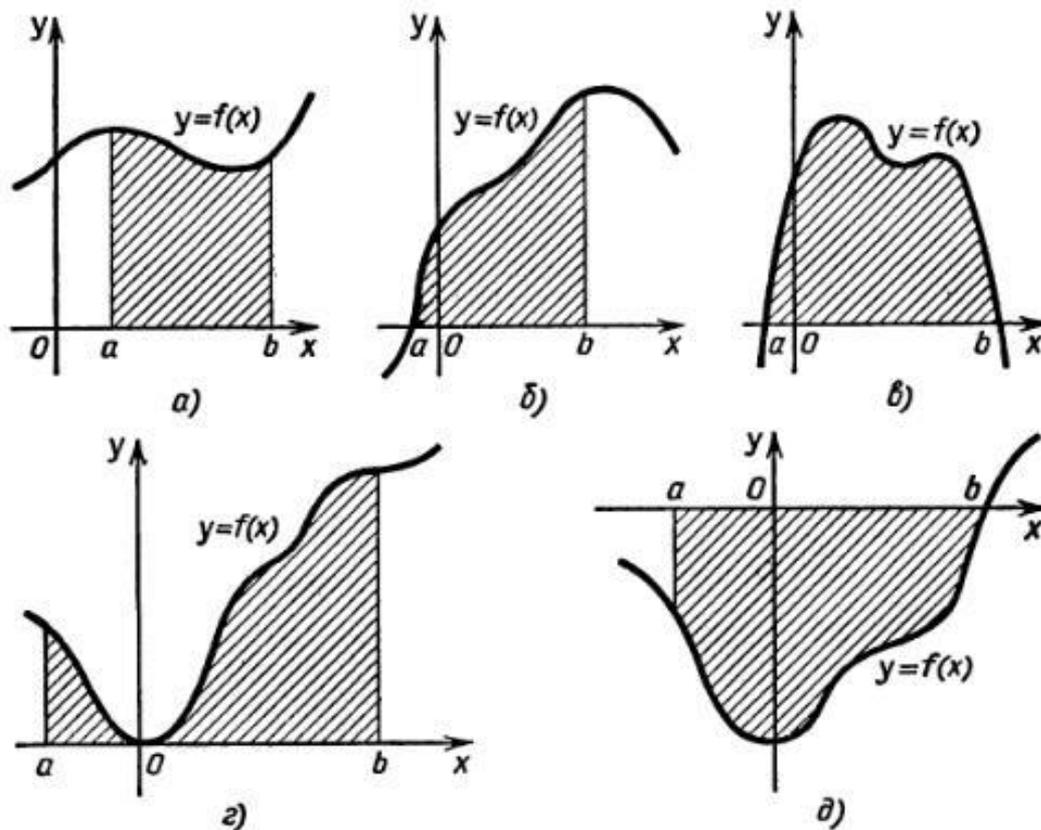


Рис. 1

Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяют следующую теорему:

Теорема. Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции) равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$ т. е.

$$S = F(b) - F(a).$$

Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница.

- Рассмотрим другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции. Для простоты будем считать функцию f неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.

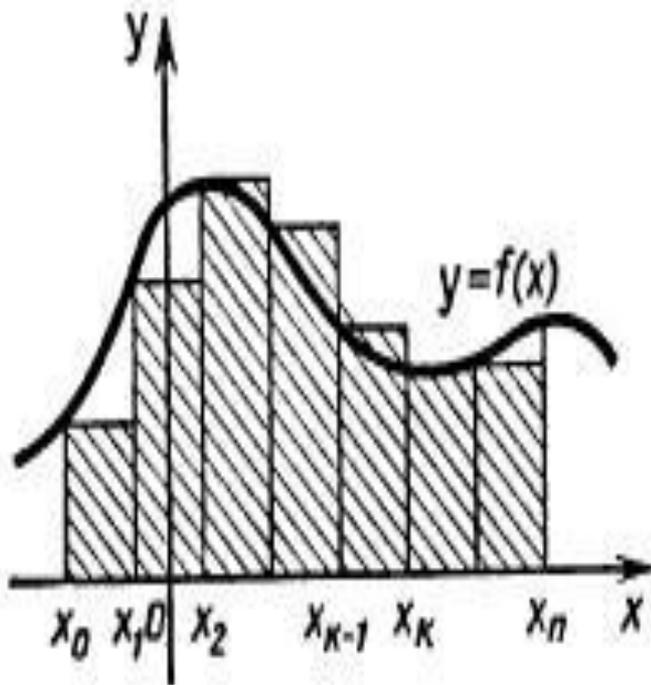


Рис. 1

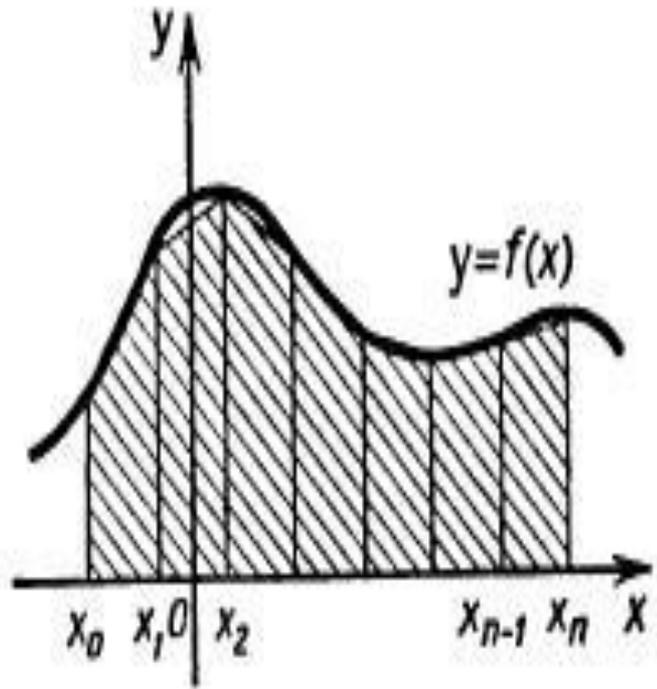


Рис. 2

- Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, где $k = 1, 2, \dots, n - 1, n$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высотой $F(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника равна:

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

- а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 1) равна:

$$S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))$$

- В силу непрерывности функции f объединение построенных прямоугольников при большом n , т. е. при малом Δx , «почти совпадает» с интересующей нас криволинейной трапецией.

- Поэтому возникает предположение, что $S_n \approx S$ при больших n . (Коротко говорят: « S_n стремится к S при n , стремящемся к бесконечности» — и пишут: $S_n \rightarrow S$ при $n \rightarrow \infty$.) Предположение это правильно. Более того, для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции a (не обязательно неотрицательной) S_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к некоторому числу.

● Это число называют (по определению) **интегралом функции f от a до b** и обозначают

$$e. \quad S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ т.}$$

при $n \rightarrow \infty$ (1) (читается: «Интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называются **пределами интегрирования**: a — нижним пределом, b — верхним. Знак \int называют знаком интеграла.

Функция f называется **подынтегральной функцией**, а переменная x — **переменной интегрирования**.

- Итак, если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$ то площадь S соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

● **Формула Ньютона — Лейбница** или **основная теорема анализа** даёт соотношение между двумя операциями: взятием определённого интеграла и вычислением первообразной.

● Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и F — её любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$