Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Прямая в пространстве***

Лектор Рожкова С.В.

2012 г.

§ 14. Прямая в пространстве

1. Уравнения прямой в пространстве

Пусть $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения любых двух различных плоскостей, содержащих прямую ℓ.

Тогда координаты любой точки прямой ℓ удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, т.е. являются решениями системы

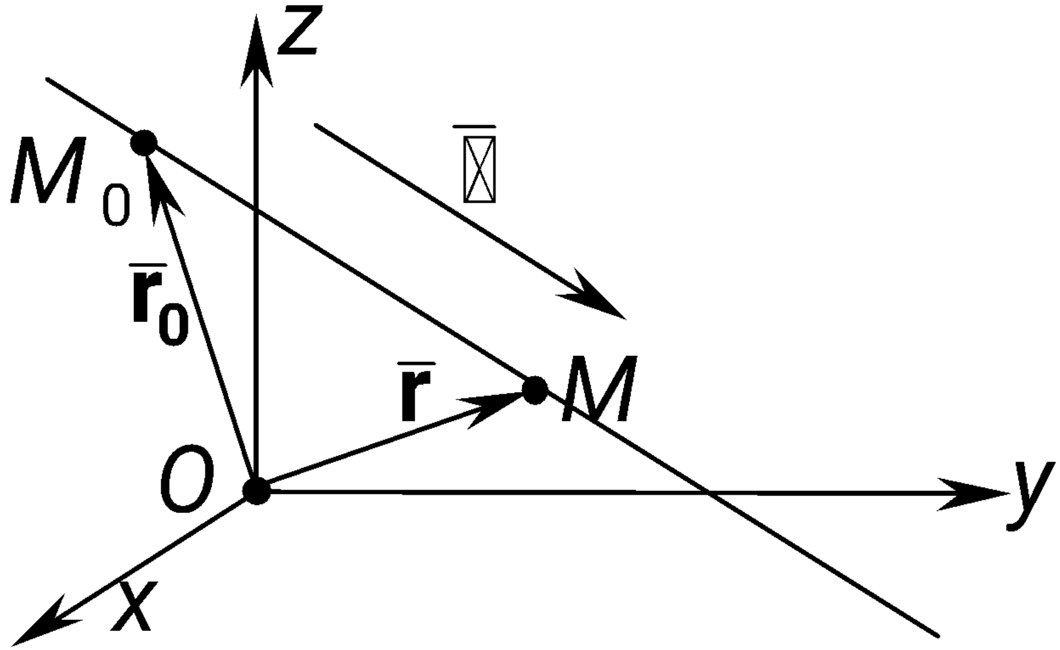
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) называют ***общими уравнениями прямой в пространстве***.

Другие формы записи уравнений прямой в пространстве – ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ и КАНОНИЧЕСКИЕ уравнения.

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, параллельно вектору $\overline{\boxtimes}=\{m;\ n;\ p\}$

Вектор, параллельный прямой в пространстве, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.



Уравнение (2*) $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}} + t\overline{\square}$

и систему уравнений (2) $\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n, \\ z = z_0 + t \cdot p. \end{cases}$

называют ***параметрическими уравнениями прямой в пространстве*** (в векторной и координатной форме соответственно).

Пусть в задаче 1 вектор $\overline{\square}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$).

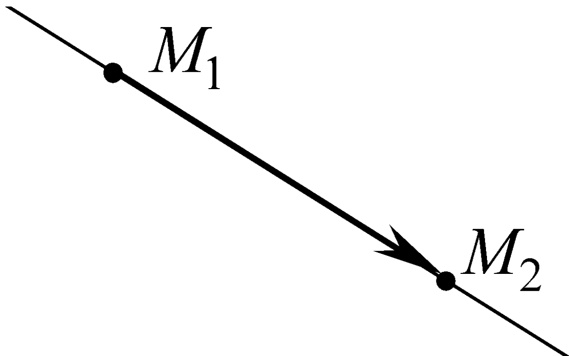
Уравнения (3)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

называют ***каноническими уравнениями прямой в пространстве***.

Частным случаем канонических уравнений являются УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ.

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.



Уравнения (4)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

называют ***уравнениями прямой, проходящей через две точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями:

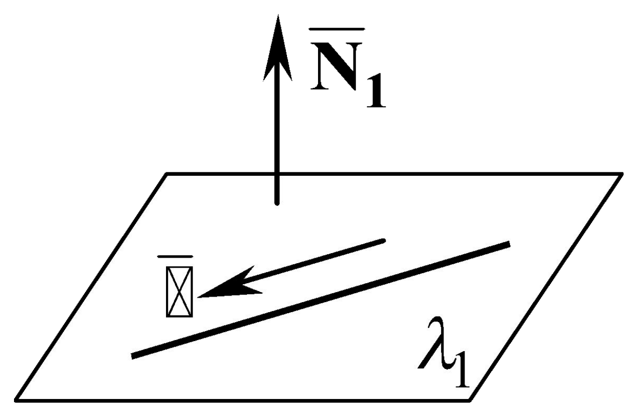
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Чтобы записать канонические (параметрические) уравнения этой прямой, *необходимо найти ее направляющий вектор и координаты какой-нибудь точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *на прямой*.

а) Координаты точки M_0 – это одно из решений системы (1).

б) Направляющий вектор $\overline{\square} = [\overline{\mathbf{N}}_1, \overline{\mathbf{N}}_2]$

где $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{1} = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\overline{\mathbf{N}}_\mathbf{2} = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ – нормальные векторы к плоскостям λ_1 и λ_2, уравнения которых входят в общие уравнения прямой.



3. Взаимное расположение прямых в пространстве

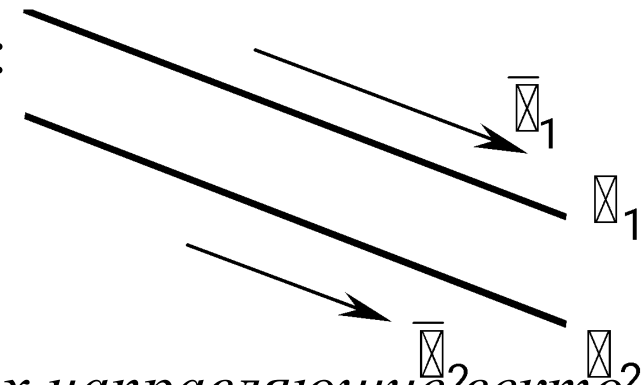
В пространстве две прямые могут:

а) быть параллельны, б) пересекаться, в) скрещиваться.

Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\ell_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \ell_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

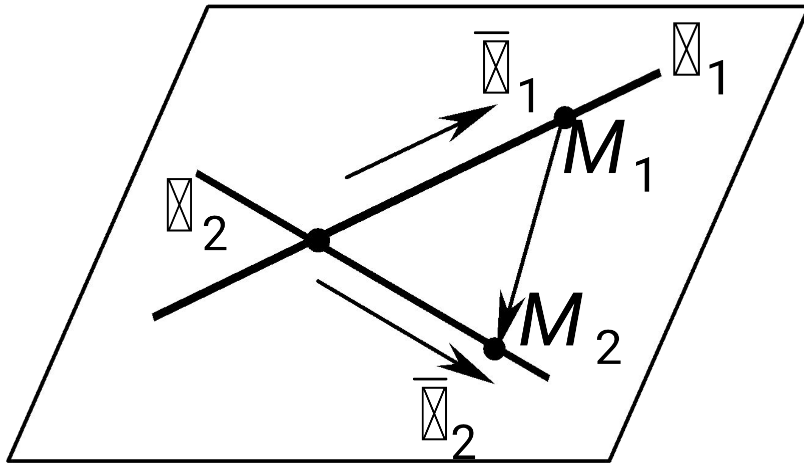
1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны:



Получаем: *прямые параллельны* $\Leftrightarrow$ *их направляющие векторы* $\bar{s}_1=\{m_1;\ n_1;\ p_1\}$ и $\bar{s}_2=\{m_2;\ n_2;\ p_2\}$ *коллинеарные*, т.е. выполняется условие:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

2) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются:



Получили: *прямые* ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются* $\Leftrightarrow$ *они не параллельны и для них выполняется условие*

$$\left(\overline{M_1M_2}, \bar{\boxtimes}_1, \bar{\boxtimes}_2\right) = 0, \qquad (7^*)$$

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

3) Если для прямых ℓ_1 и ℓ_2 не выполняется условие (6) и (7) ((7*)), то прямые скрещиваются.

4. Задачи, связанные с возможным взаимным расположением прямых

Возможное расположение прямых в пространстве приводит к следующим задачам:

1) параллельные прямые → расстояние между прямыми (т.е. расстояние от точки до прямой)?

2) пересекающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) точка пересечения прямых?

3) скрещивающиеся прямые → а) угол между прямыми?
б) расстояние между прямыми?

Пусть даны 2 прямые:

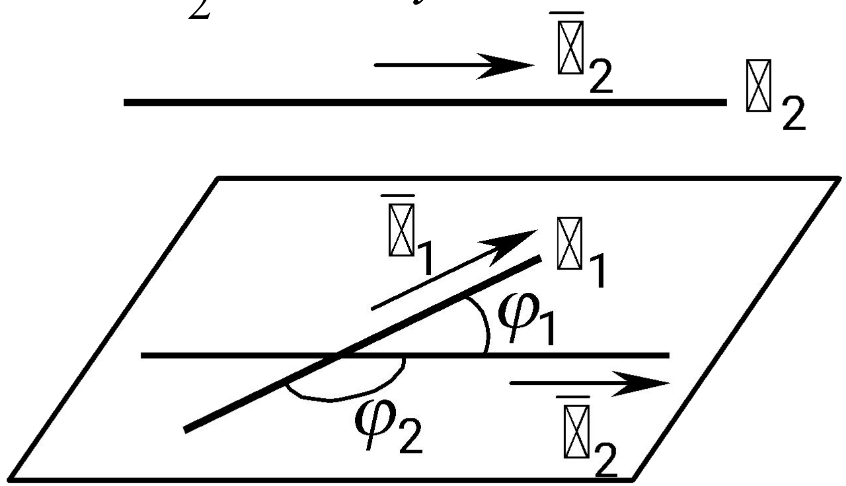
$$\ell_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

$\overline{\square}_i=\{m_i;\ n_i;\ p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i,

$M_i(x_i;y_i;z_i)\in \ell_i$ $(i=1,2)$

ЗАДАЧА 2. Найти угол между пересекающимися (скрещивающимися) прямыми в пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Углом между двумя скрещивающимися прямыми*** *ℓ_1 и ℓ_2 называется угол между прямой ℓ_1 и проекцией прямой ℓ_2 на любую плоскость, проходящую через прямую ℓ_1.*



Т.е., угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Получаем:

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{\left|(\bar{\boxtimes}_1, \bar{\boxtimes}_2)\right|}{\left|\bar{\boxtimes}_1\right| \cdot \left|\bar{\boxtimes}_2\right|} = \pm\frac{\left|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

где знак плюс берется для острого угла, а знак минус – для тупого.

Пусть дана прямая ℓ: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,

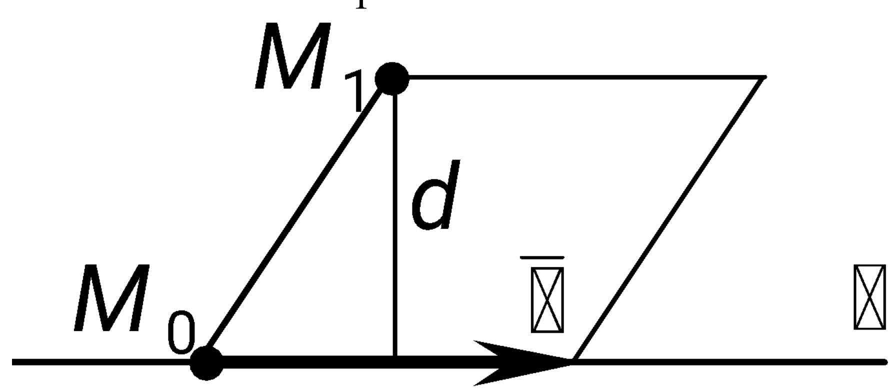
$M_1(x_1;y_1;z_1)$ – точка, не принадлежащая ℓ .

ЗАДАЧА 3. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Обозначим: $\overline{\boxtimes}=\{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой ℓ ,

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка на прямой ℓ ,

d – расстояние от точки M_1 до ℓ .



Получаем: $$d=\frac{\left|\left[\overline{\boxtimes}, \overline{\mathbf{M_0M_1}}\right]\right|}{\left|\overline{\boxtimes}\right|}.$$

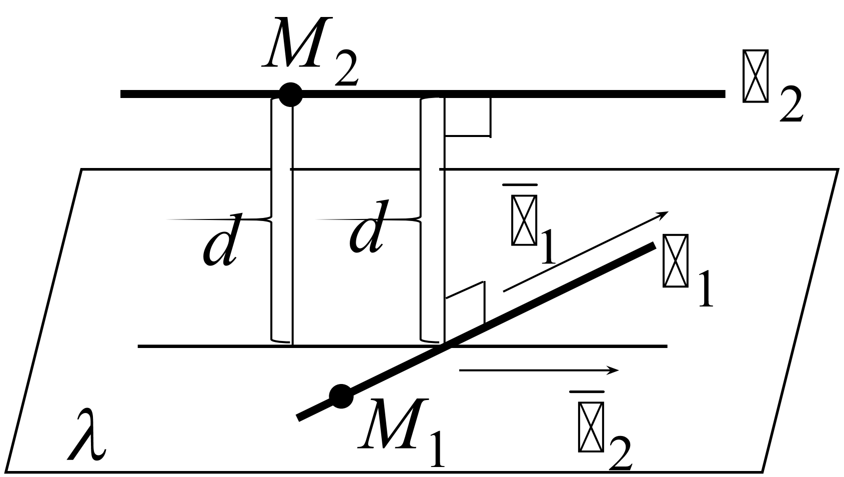
Пусть даны две скрещивающиеся прямые:

$$\ell_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

$\bar{\ell}_i=\{m_i;n_i;p_i\}$ – направляющий вектор прямой ℓ_i,
$M_i(x_i;y_i;z_i)\in\ell_i$ $(i=1,2)$.

ЗАДАЧА 4. Найти расстояние между ℓ_1 и ℓ_2.

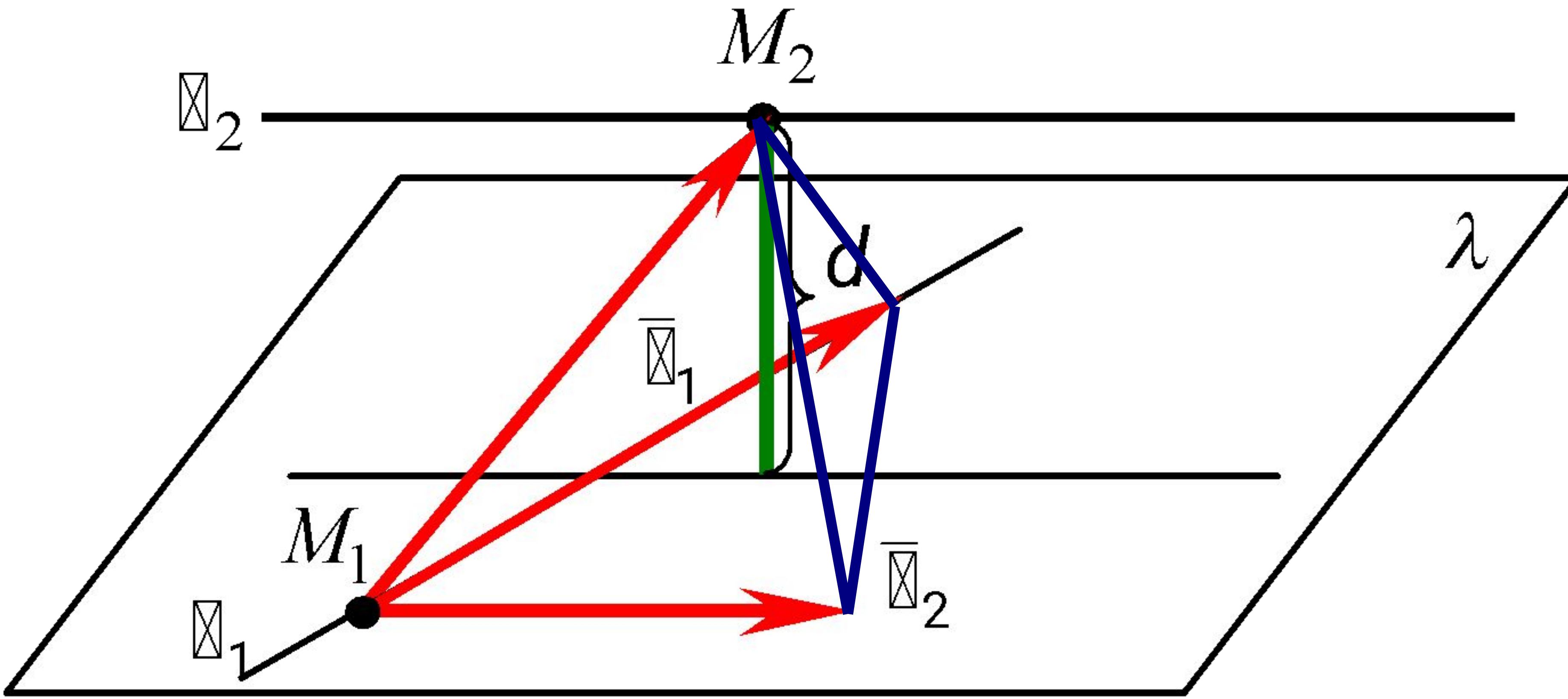
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.*



Получаем:

$$d=\frac{|Ax_2+By_2+Cz_2+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

где $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости λ,
$M_2(x_2;y_2;z_2)$ – любая точка на прямой ℓ_2.



Тогда d – высота пирамиды, опущенная из точки M_2.
Следовательно:

$$d = \frac{3 \cdot V_{пир}}{S_{осн}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\bar{\boxtimes}_1, \bar{\boxtimes}_2, \overline{\mathbf{M_1 M_2}} \right) \right|}{\frac{1}{2} \cdot \left| \left[\bar{\boxtimes}_1, \bar{\boxtimes}_2 \right] \right|} = \frac{\left| \left(\bar{\boxtimes}_1, \bar{\boxtimes}_2, \overline{\mathbf{M_1 M_2}} \right) \right|}{\left| \left[\bar{\boxtimes}_1, \bar{\boxtimes}_2 \right] \right|}$$

Пусть даны две пересекающиеся прямые

$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

ЗАДАЧА 5. Найти точку пересечения прямых.

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка пересечения прямых.

Тогда $(x_0;y_0;z_0)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}, \\ \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \cdot m_1, \\ y = y_1 + t \cdot n_1, \\ z = z_1 + t \cdot p_1, \\ x = x_2 + \tau \cdot m_2, \\ y = y_2 + \tau \cdot n_2, \\ z = z_2 + \tau \cdot p_2. \end{cases}$$

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость λ и прямая ℓ. Они могут 1) быть параллельны;

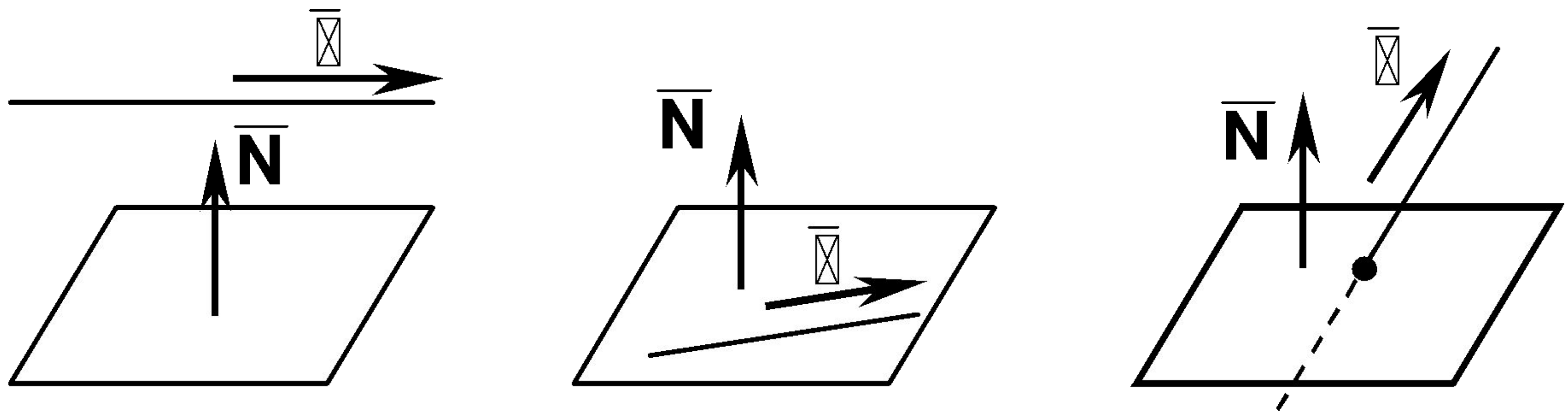
2) прямая может лежать в плоскости;

3) прямая и плоскость могут пересекаться в одной точке.

Пусть λ: $Ax + By + Cz + D = 0$ и ℓ: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$,

Тогда $\bar{\mathbf{N}} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости λ,

$\bar{\ell} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой ℓ.



а) Если прямая параллельна плоскости или прямая принадлежит плоскости, то

$$\left(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\boxtimes}\right) = 0 \qquad (10)$$

или в координатной форме

$$Am + Bn + Cp = 0 \, . \qquad (11)$$

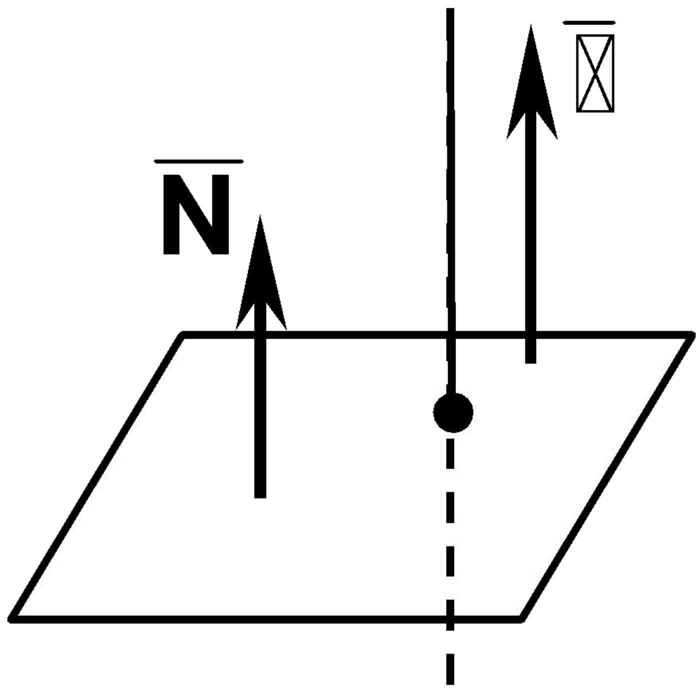
Если условие (10) (*условие* (11)) *не выполняется, то прямая и плоскость пересекаются в одной точке.*

б) Если прямая принадлежит плоскости, то координаты любой ее точки удовлетворяют уравнению плоскости, и, следовательно, кроме условия (10) ((11)) выполняется условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \, ,$$

где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – любая точка прямой.

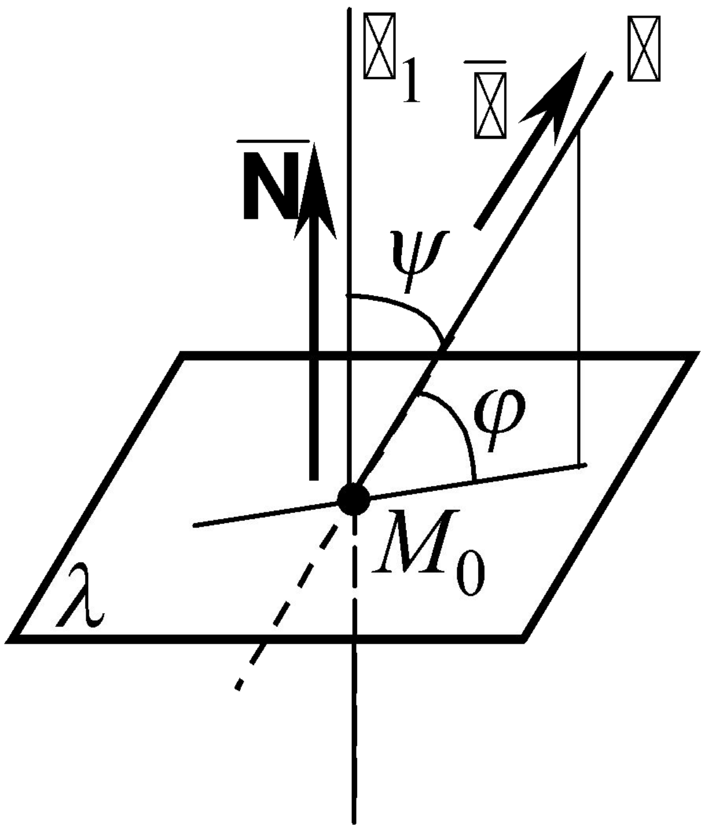
Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой и плоскости



В этом случае $\overline{\mathbf{N}} \parallel \overline{\square}$ т.е. $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Углом между прямой ℓ и плоскостью λ*** *называется угол* φ *между прямой* ℓ *и ее проекцией на плоскость* λ .

Из определения следует, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.



Следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\left|\left(\overline{\mathbf{N}}, \bar{\ell}\right)\right|}{\left|\overline{\mathbf{N}}\right| \cdot \left|\bar{\ell}\right|}$$