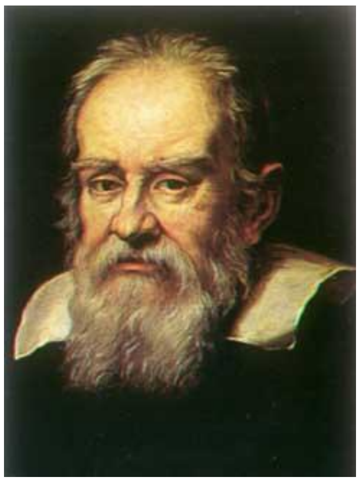
1

Тема 3. Свободное падение тел

Падение тел в отсутствие сопротивления воздуха.

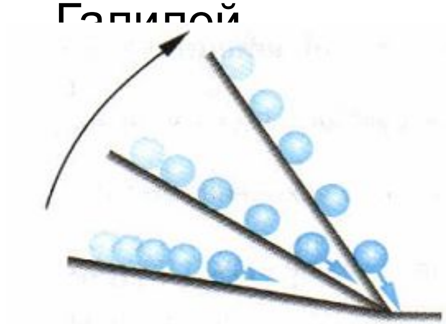
Все тела независимо от их массы в отсутствие сил сопротивления воздуха падают на Землю с одинаковым ускорением, называемым ускорением свободного падения.



Галилео Галилей

Роберт Бойл

Кристиан Гюйгенс



g = 9,8 м/с^2

Вблизи поверхности Земли ускорение свободного падения равно g = 9,8 м/с^2

Ускорение свободного падения тел на Луне примерно в 6 раз меньше, чем на Земле: $g_л$ = 1,6 м/с^2.

Свободное падение без начальной скорости.

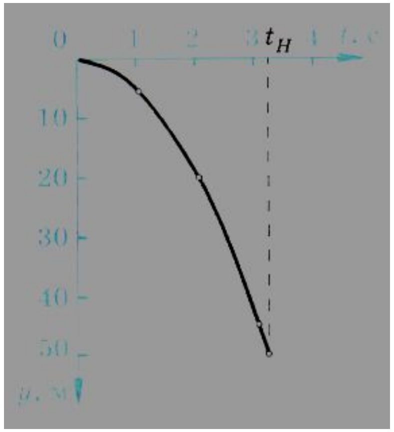
Закон равнопеременного движения по оси Y, вдоль которой происходит падение тела, имеет вид (см. формулу (23))

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \quad 40$$

начальные условия $\{y_0, v_{0y}$ *и* $a_y\}$. Направим ось Y вниз и выберем начало отсчёта в верхней точке. В этом случае $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$. Ускорение свободного падения g направлено вниз, следовательно, его проекция на ось Y $a_y = g$.

Подставляя начальные условия в формулу (40), получаем

$$y = \frac{gt^2}{2} \quad 41$$



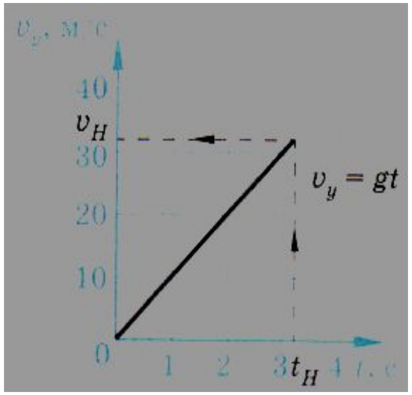
Графиком такой квадратичной зависимости от времени является пара бола, проходящая через начало координат. По графику можно найти время t падения предмета на Землю.

С помощью закона движения (41) это время можно рассчитать, полагая $y = H$:

$$H = \frac{gt^2}{2} \qquad t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad 42$$

Зависимость скорости движения по оси Y от времени

$$v_y = v_{0y} + a_y t \qquad 43$$

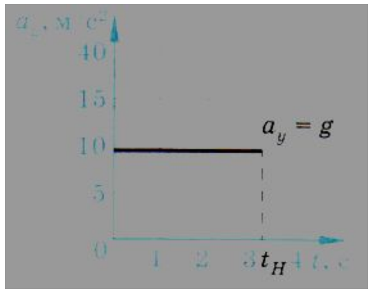


Подстановка значений $v_{0y} = 0$ и $a_y = g$ даёт

$$v_y = gt \qquad 44$$

4 Для расчёта скорости тела подставим время падения из равенства (42) в выражение (44). Тогда

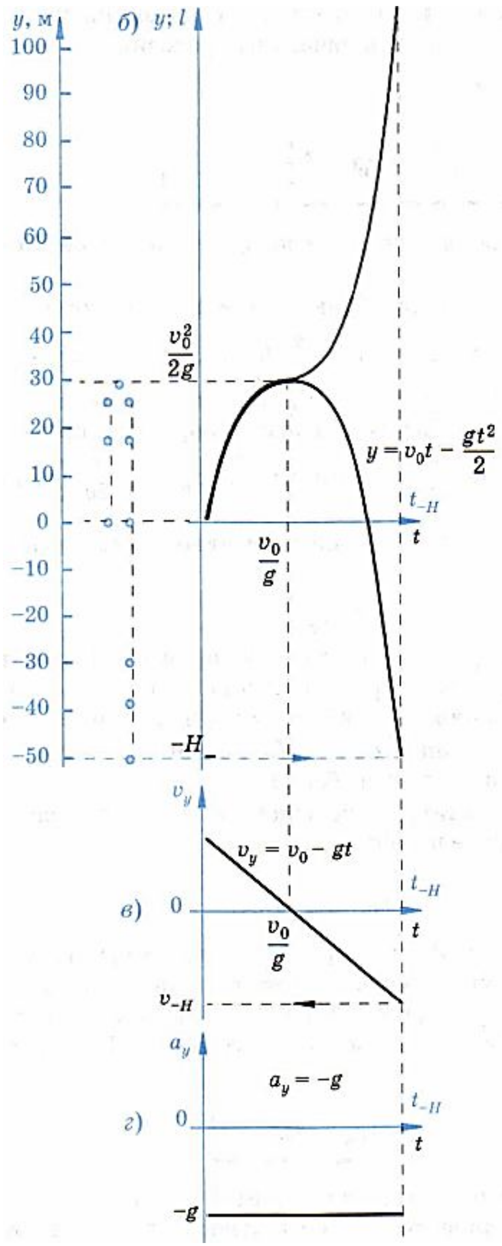
$$v_H = g\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH}$$



графиком $a_y(t)$ *является прямая, параллельная оси времени*

Одномерное движение в поле тяжести при наличии начальной скорости.

В поле тяжести тело движется с постоянным ускорением, т. е. *равнопеременно,* независимо от начальной скорости тела и её направления.



Рассмотрим движение мяча, брошенного вертикально вверх с высоты H со скоростью v_0.

$$y = y_0 + v_{0y} + \frac{a_y t^2}{2}$$

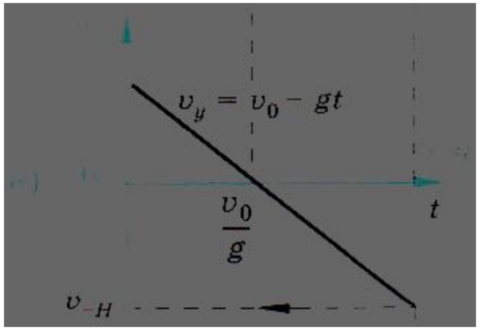
Выберем начало отсчета в точке бросания ($y_0 = 0$) и направим ось У вверх. Тогда $v_{0y} = v_0$. Ускорение свободного падения направлено вниз (противоположно направлению оси $У$), поэтому его проекция на ось отрицательна ($a_y = -g$). После подстановки начальных условий $\{y_0, v_{0y}, a\}$ *закон движения тела* имеет вид

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad (45)$$

$$-H = v_0 t_{-H} - \frac{g t_{-H}^2}{2}$$

найдём зависимость проекции скорости на ось *У* от времени с помощью формулы (43), учитывая, что $v_{0y} = v_0$ $a_y = -g$

$$v_y = v_0 - gt \qquad 46$$



Прямая пересекает ось t в точке t_{max}, в которой $v_y = 0$. Следовательно $v_0 - gt_{max} = 0$

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g} \qquad 47$$

максимальная высота подъёма тела равна координате вершины параболы:

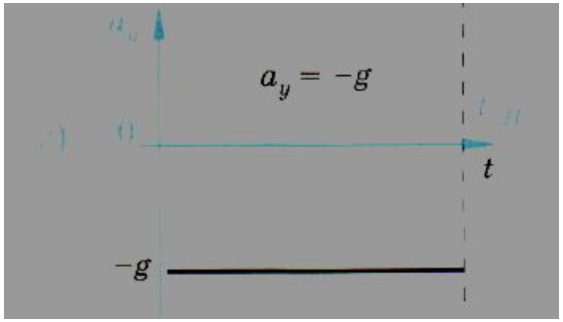
$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \qquad 48$$

Знак проекции скорости тела на ось $У$ при $t > t_{max}$ изменяется. Это означает, что изменяется направление движения тела. При этом модуль скорости возрастает, так как движение вниз является равноускоренным.

Промежуток времени, через который тело упадет на Землю, t_{-H} складывается из двух интервалов времени: времени подъёма на максимальную высоту t_{max} и времени свободного падения с максимальной высоты $H+$

$$t_{-H} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{2}{g}\left(H + \frac{v_0^2}{2g}\right)}$$

7 Графиком проекции ускорения на ось Y является прямая, параллельная оси времени ($a_y = -g$), так как ускорение свободного падения постоянно и направлено противоположно оси Y



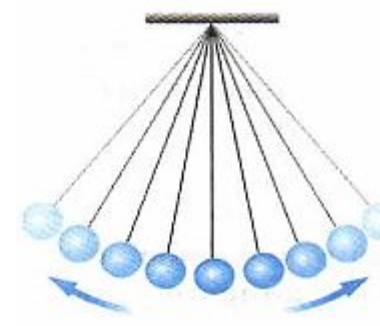
Кинематика периодического движения
Виды периодического движения.

Периодическое движение — движение, повторяющееся через равные промежутки времени.

Период — ***минимальный интервал времени, через который движение повторяется.***

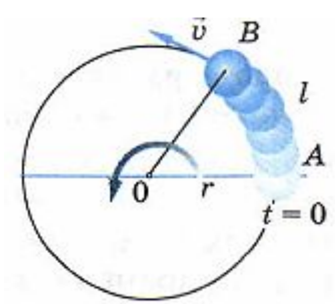
Единица периода — *секунда* (с).

- *Вращательное движение* — движение в одном направлении по плоской (или пространственной) замкнутой траектории
- *Колебательное движение* **—** движение вдоль одного и того же отрезка с изменением направления движения

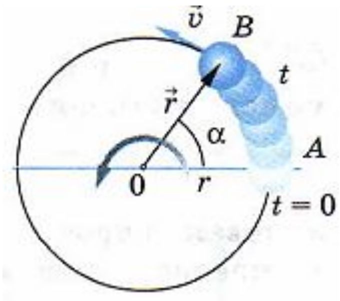


Равномерное движение по окружности.
При равномерном движении по окружности модуль скорости тела остается постоянным.

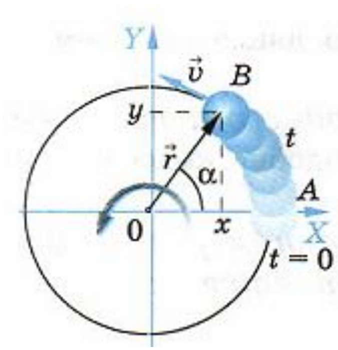
Рассмотрим движение материальной точки (частицы) с постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом *r*.



1. С помощью пути l, пройденного частицей от начальной точки $\boldsymbol{A}$ до точки $\boldsymbol{B}$.



2. С помощью угла поворота α радиуса-вектора r относительно его начального положения



3. С помощью закона движения в координатной форме (зависимость координат частицы от времени)

время одного оборота по окружности T.

Разделив длину окружности $\boldsymbol{l = 2\pi r}$ на скорость частицы, получим

$$T = \frac{2\pi r}{v} \tag{3.1}$$

Период вращения — время одного оборота по окружности.

Фаза вращения **—** угол поворота радиуса-вектора в произвольный момент времени относительно его начального положения.

Угловая скорость **—** физическая величина, равная отношению угла поворота тела к промежутку времени, в течение которого этот поворот произошёл:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \qquad (3.2)$$

$$[\omega] = \frac{[\alpha]}{[t]} = \frac{1\,рад}{1} = 1\,рад \cdot с^{-1}$$

Период вращения можно найти, разделив полный угол поворота 360°, или 2π радиан, на угловую скорость:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (3.3)$$

Частота вращения **—** число оборотов в единицу времени**.**

Частота связана с периодом вращения соотношением

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (3.4)$$

Единица частоты — *герц* (Гц): 1 Гц = 1 с $^{-1}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (3.5)$$

Приравнивая выражения (3.1) и (3.3) для периода вращения

$$\frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

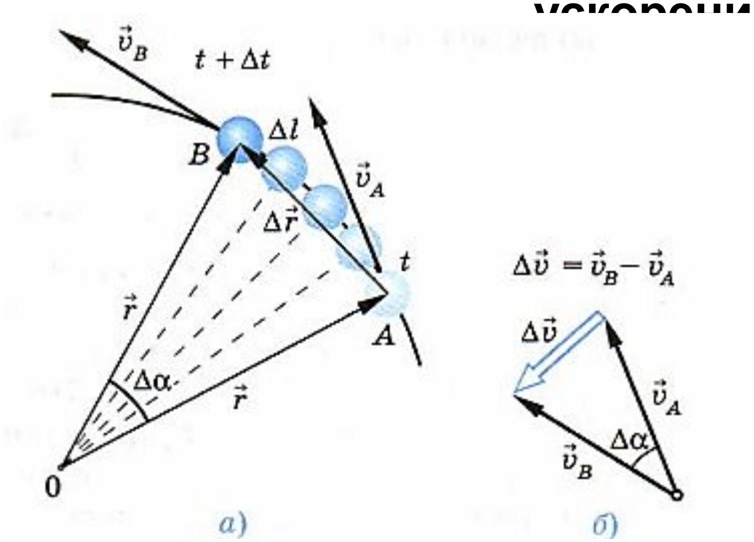
получаем связь между угловой скоростью ω, радиусом r и скоростью v

$$v = \omega r \qquad (3.6)$$

Подставляя выражение для угловой скорости в формулу (3.6), получаем линейную скорость:

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r = 2\pi\nu r \qquad (3.7)$$

Центростремительное ускорение.



Ускорение при равномерном движении частицы по окружности:
а) при $\Delta t \to 0$, $\Delta\alpha \to 0$;
б) при $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{v} \perp \vec{v}_A$, $\Delta\vec{v} \perp \vec{v}_B$

$$a = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{при } \Delta t \to 0) \qquad (3.8)$$

Δv может характеризовать изменение не только модуля скорости, но и её направления.
Если изменяется только модуль скорости, то происходит прямолинейное ускоренное движение. Если изменяется только направление, то возникает равномерное движение по окружности.

равнобедренный треугольник скоростей подобен треугольнику *OAB,* так как угол между скоростями v_A и v_B равен углу/.$AOB = \Delta\alpha$. Скорости v_A и v_B направлены по касательной к окружности и поэтому перпендикулярны радиусу-вектору в этих точках. Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v}{r}$$

отсюда

$$\Delta v = \frac{v}{r}\Delta r$$

Для получения мгновенного ускорения воспользуемся формулой (3.8), подставив в неё выражение для Δv:

$$a_n = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\lim_{t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

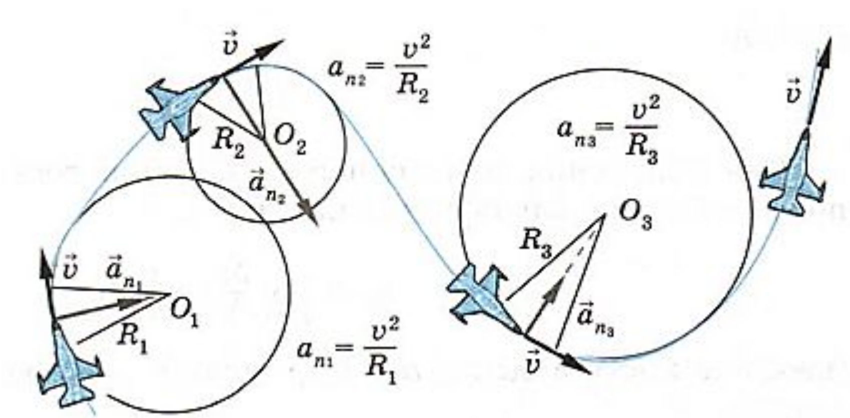
модуль перемещения в единицу времени равен модулю мгновенной скорости

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = v$$

поэтому

$$a_n = \frac{v^2}{r} \qquad (3.9)$$

При равномерном движении частицы по окружности её ускорение направлено перпендикулярно скорости, по радиусу к центру окружности и называется *нормальным* или *центростремительным ускорением.*

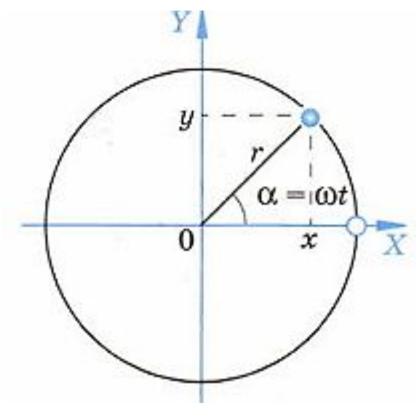


Тангенциальное (или касательное) ускорение при этом равно нулю (a_τ=0).

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r = 4\pi^2 \nu^2 r \qquad (3.10)$$

Колебательное движение

Для получения закона колебательного движения воспользуемся координатным способом описания вращательного движения частицы по окружности радиусом r с центром в точке O



Если при $t = 0$ частица находится в точке с координатами $(r, 0)$, то координаты частицы по осям X и Y связаны с радиусом окружности и углом поворота α следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$

Если частица движется по окружности с угловой скоростью ω, то за промежуток времени t её радиус-вектор поворачивается на угол $\alpha = \omega t$

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases} \qquad (3.11)$$

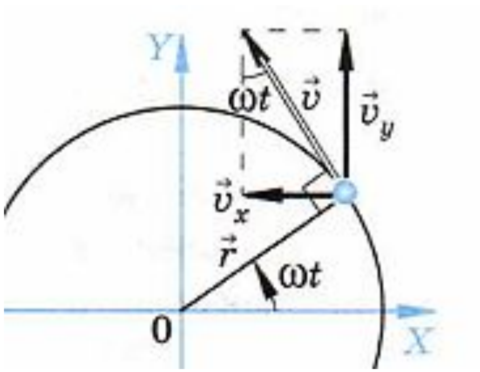
15 ***Гармонические колебания — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем синусоидально (или косинусоидально).***

Частота вращения (3.4) представляет собой и частоту колебаний. ***Частота колебаний — величина, равная числу полных колебаний, совершаемых в единицу времени:***

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Единица частоты колебаний — *герц* (Гц), 1 Гц = 1 $с^{-1}$.

Для определения скорости колебательного движения по оси X рассмотрим произвольное положение частицы на окружности в момент времени t.

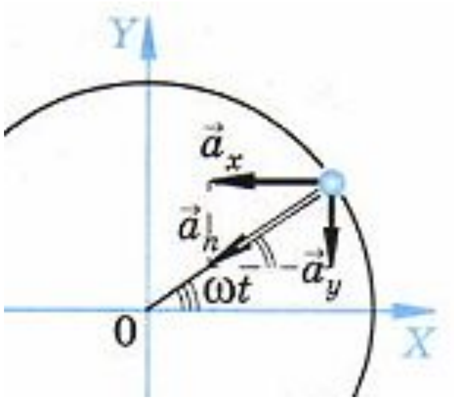


Скорость направлена перпендикулярно радиусу-вектору и образует с вертикалью угол ωt*, равный углу поворота*.

Проекция скорости на ось X равна

$$v_x = -v \sin \omega t = -\omega r \sin \omega t \qquad (3.12)$$

Найдём зависимость проекции ускорения на ось X от времени



При равномерном движении по окружности ускорение частицы направлено к центру окружности и равно

$$a_n = \omega^2 . r$$

Его горизонтальная компонента a_x направлена противоположно оси X. Угол, который образует нормальное ускорение с вектором a_x, равен ωt, поэтому проекция вектора ускорения

$$a_x = -a\cos\omega t = -\omega^2 r\cos\omega t \qquad (3.13)$$