

# Математик

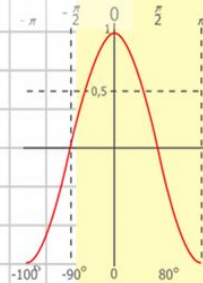
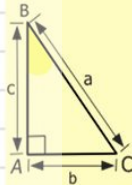
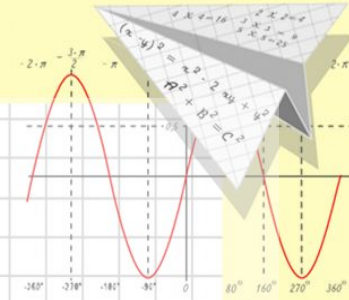
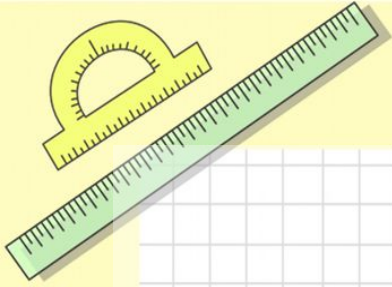
а

# Пирамиды

Методическая разработка учителя  
математики МБОУ

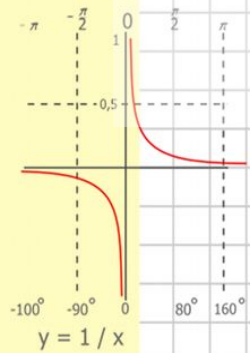
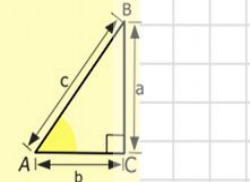
«СОШ №74 г. Владивостока»

**ШЕВЧЕНКО ЛАРИСЫ ДМИТРИЕВНЫ**



$y = \cos x$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$



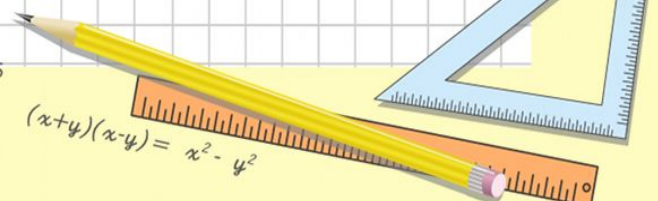
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

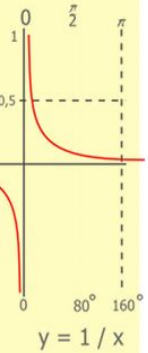
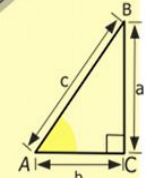
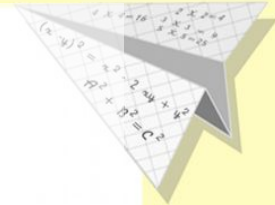
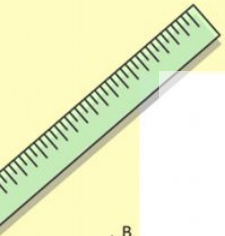
$$x = 70$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

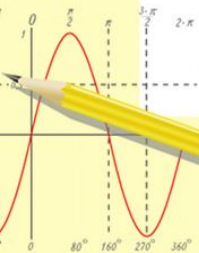
# I класс

Пирамиды, у которых высота опущена в одну из вершин основания.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

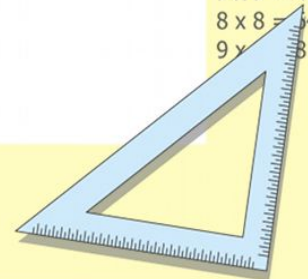
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

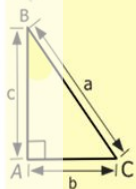
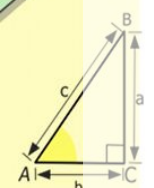
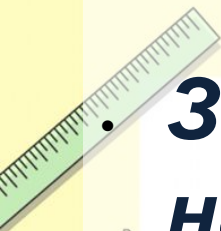
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Здесь в основании могут находиться любые многоугольники, а две боковые грани, у которых общей стороной является высота пирамиды, будут прямоугольными треугольниками, плоскости которых перпендикулярны к основанию.

При решении задач в этом классе активно применяется теорема о 3-х перпендикулярах.



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

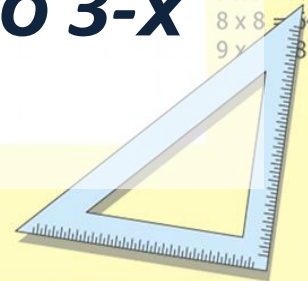
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

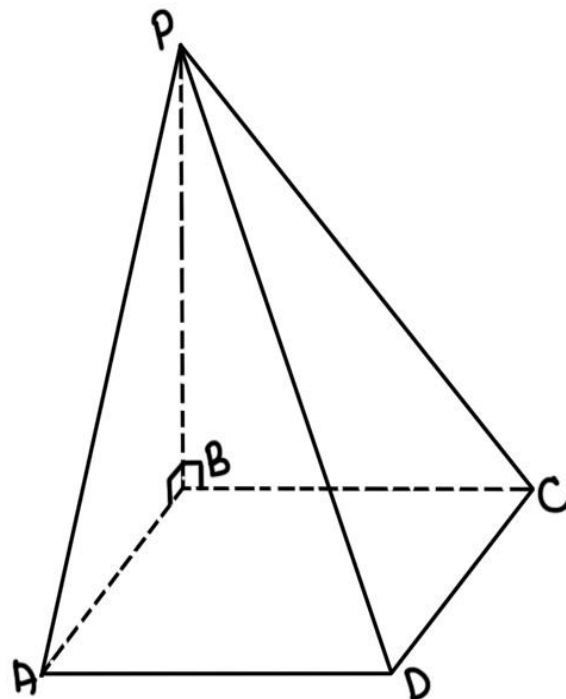


# Примеры :

**А) В основании –  
прямоугольник ABCD  
(или квадрат ABCD)**

**ΔPVB и ΔPAD –  
прямоугольные (т.к.  
PB перпендикулярна  
ABCD)**

**ΔPDC и ΔPAD  
прямоугольные  
(угол PAD=90°, угол  
PCD=90°) согласно о**

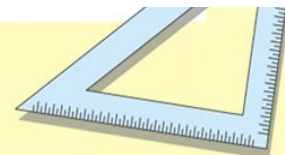


$$\begin{cases} x=25y+45 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=25+45 \end{cases}$$

$$\underline{x=70}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

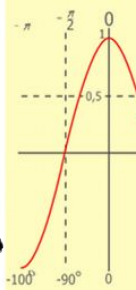
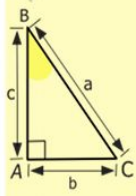
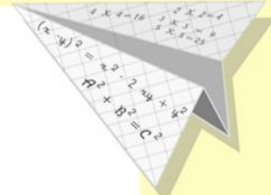
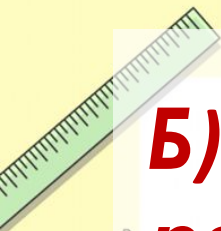
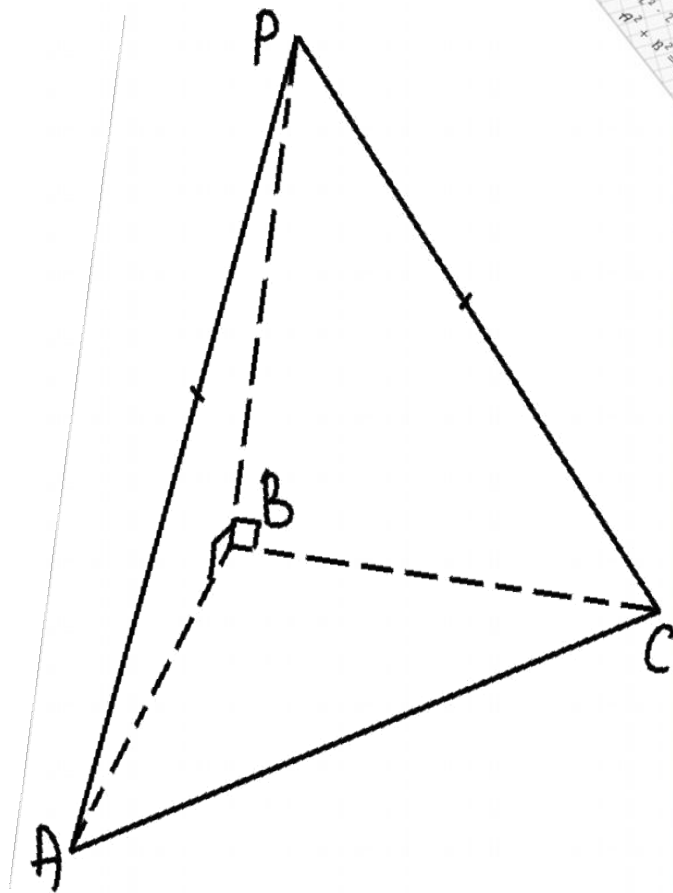




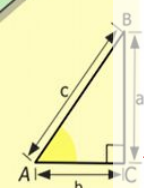
**Б) В основании  
разносторонний  
ДАВС:**

**РВ перпенд. (АВС) =>  
ДАРВ и ДРВС –  
прямоугольные.**

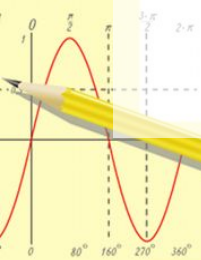
**ДРАС –  
разносторонний.**



- $y = \cos$
- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

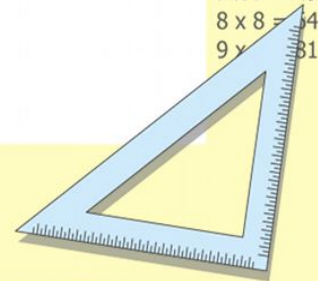
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



**В) В основании  
равнобедренный  $\triangle AB$   
высота пирамиды  
опущена в вершину,  
противоположную  
основанию:**

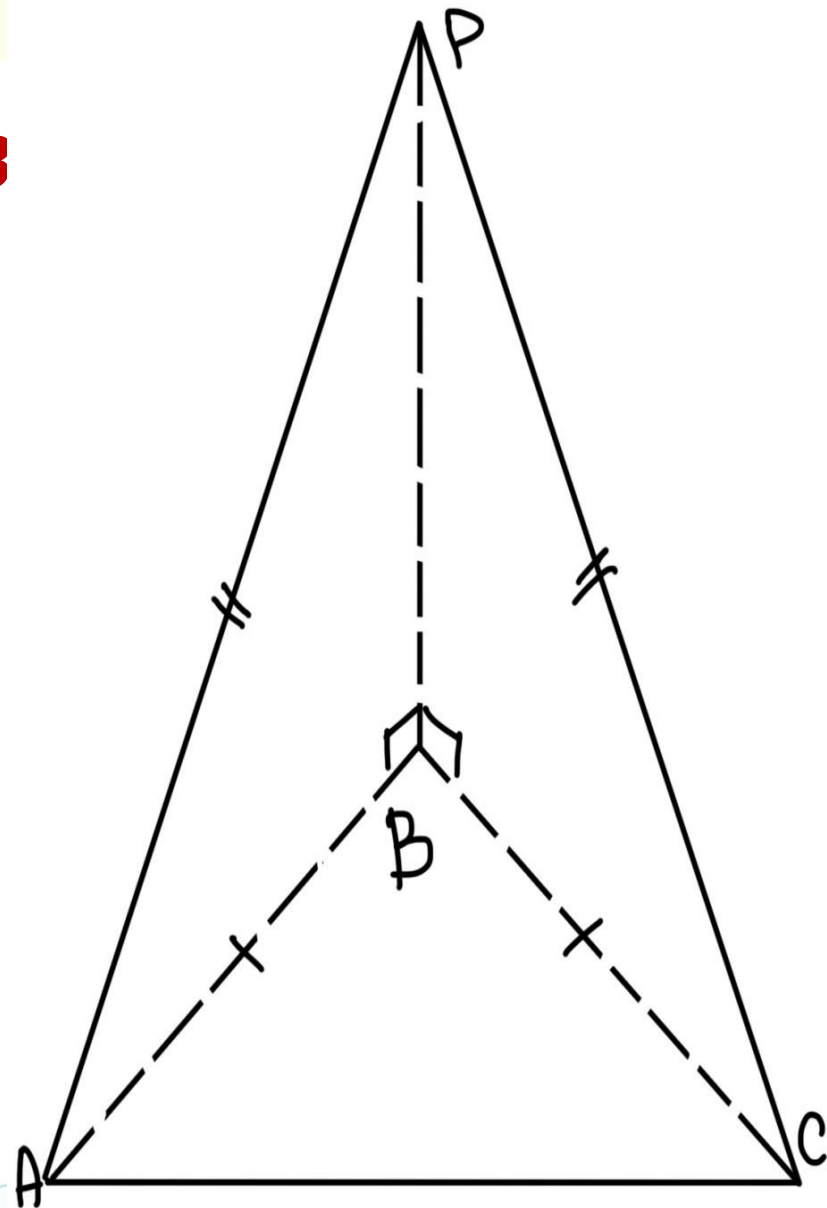
**$AB=BC$  – основание,**

**$\triangle APB = \triangle BPC$  –**

**прямоугольные,**

**$\triangle PAC$  -**

**равнобедренный**



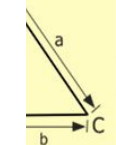
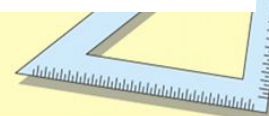
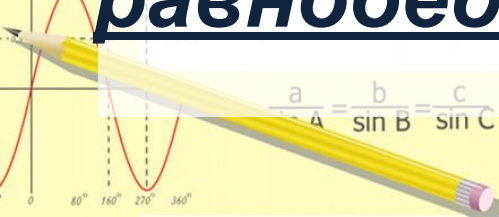
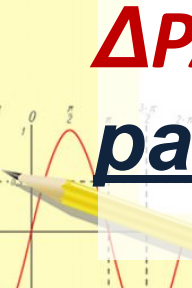
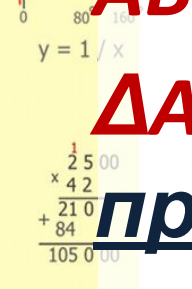
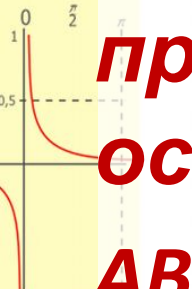
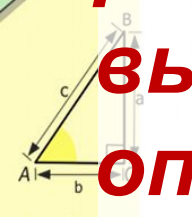
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



2 = 4
3 = 9
4 = 16
5 = 25
6 = 36
7 = 49
8 = 64
9 = 81

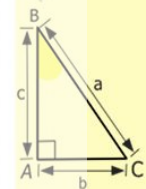
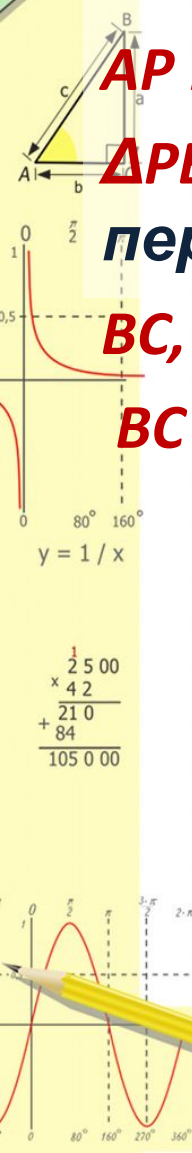
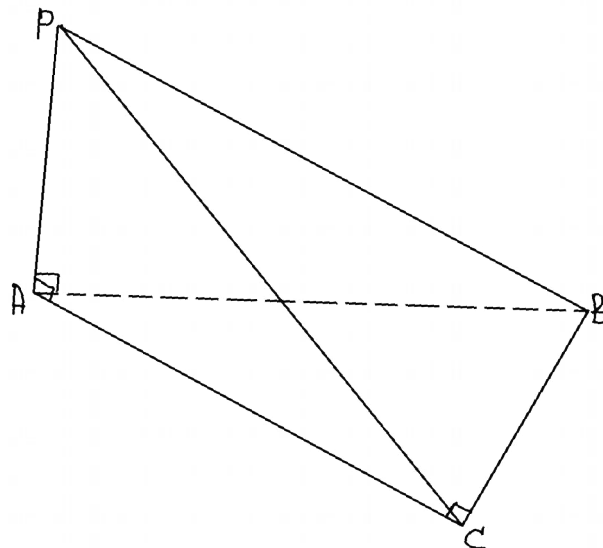
**Г) В основании прямоугольный  $\triangle ABC$ , угол  $C=90^\circ$ .  
 Высота пирамиды опущена в вершину одного из  
 острых углов:**

**$AP$  перпенд.  $(ABC) \Rightarrow \triangle APB$  и  $\triangle PAC$  – прямоугольные.**

**$\triangle PBC$  – прямоугольный, по теореме о трех  
 перпендикулярах:**

**$BC, AC$  катеты  $\triangle ABC$ ,  $AC$  – проекция наклонной  $PC \Rightarrow$**

**$BC$  перпенд.  $PC \Rightarrow$  угол  $PCB=90^\circ$ .**



- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81

$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

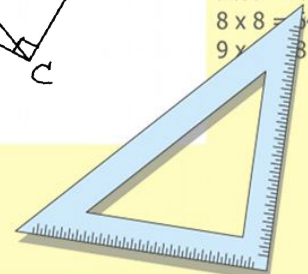
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



**Д) В основании  
равносторонний**

**ΔABC:**

**ΔAPB = ΔPBC –**

**прямоугольные, т.к.**

**PB перпенд. (ABC)**

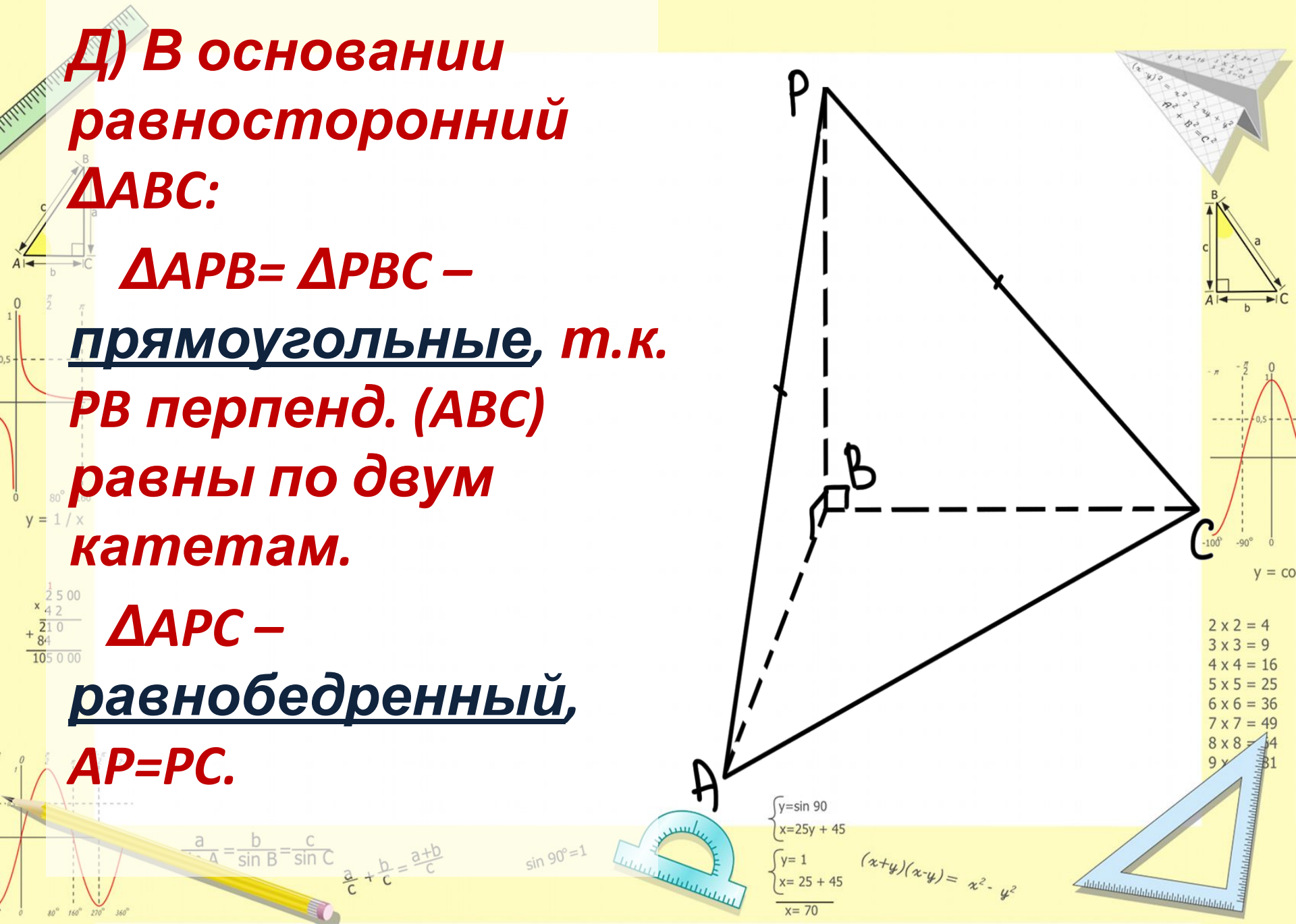
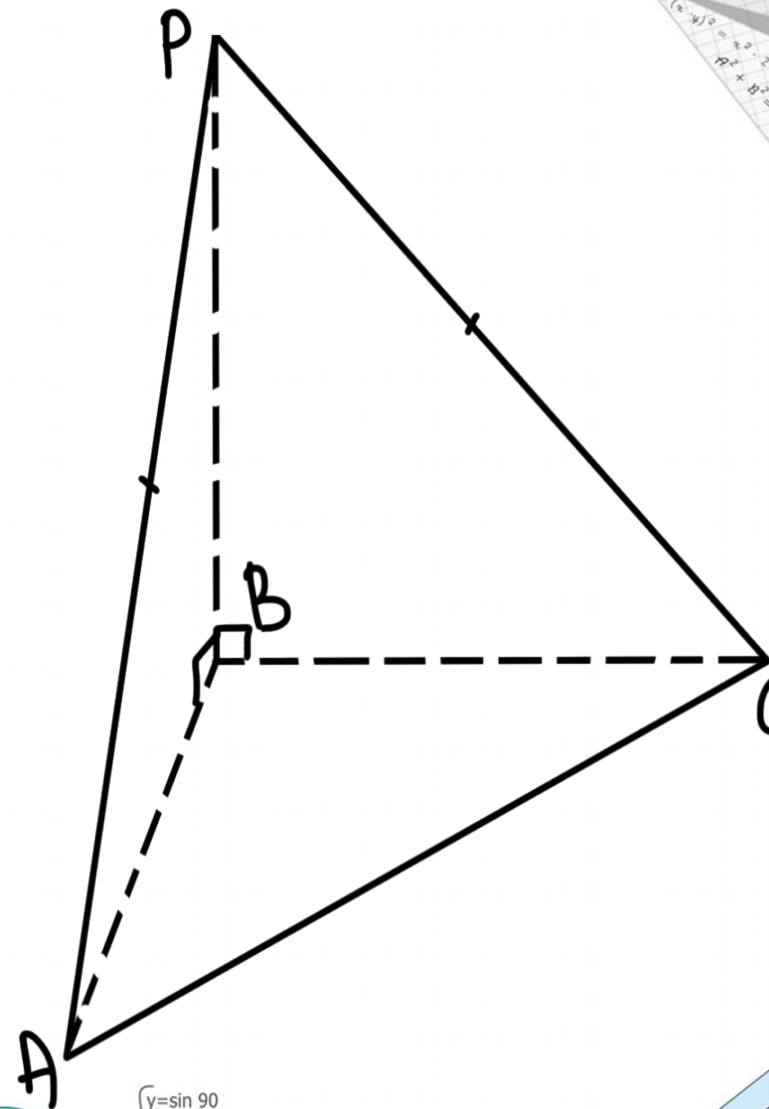
**равны по двум**

**катетам.**

**ΔAPC –**

**равнобедренный,**

**AP=PC.**



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

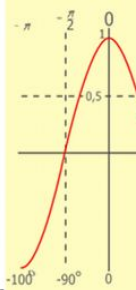
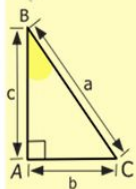
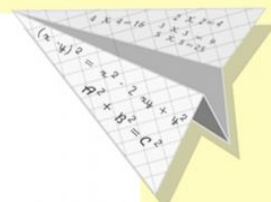
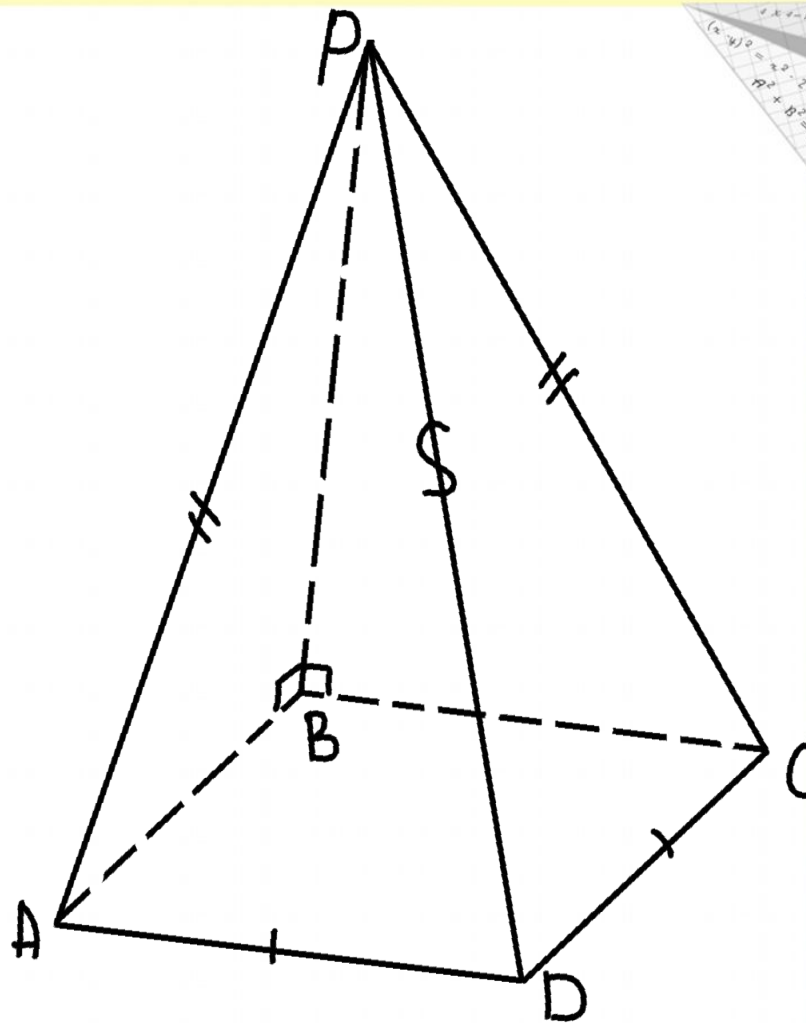
2 x 2 =	4
3 x 3 =	9
4 x 4 =	16
5 x 5 =	25
6 x 6 =	36
7 x 7 =	49
8 x 8 =	64
9 x 9 =	81



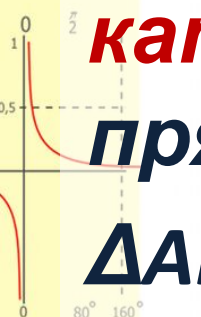
**Е) В основании ромб ABCD, PB – высота:**

**$\triangle PAB = \triangle PBC$  (по двум катетам) – прямоугольные.**

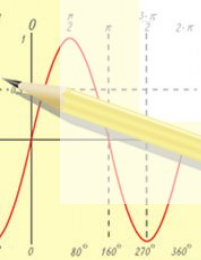
**$\triangle PAD = \triangle PDC$  по трем сторонам.**



- $y = \cos$
- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

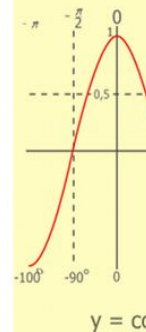
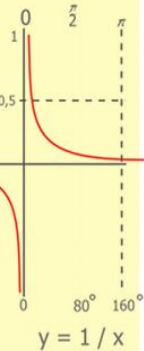
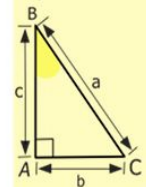
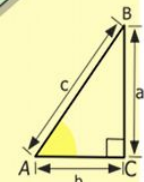
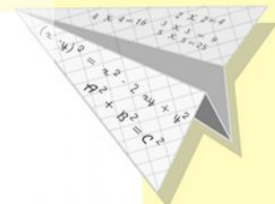
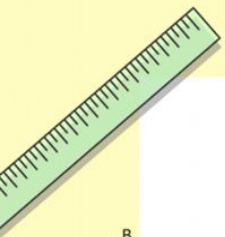
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



# II класс

Пирамиды, у которых двугранные углы при основании равны.



$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

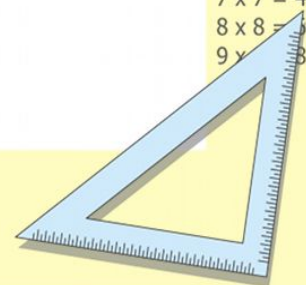
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

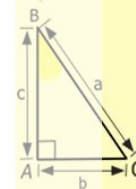
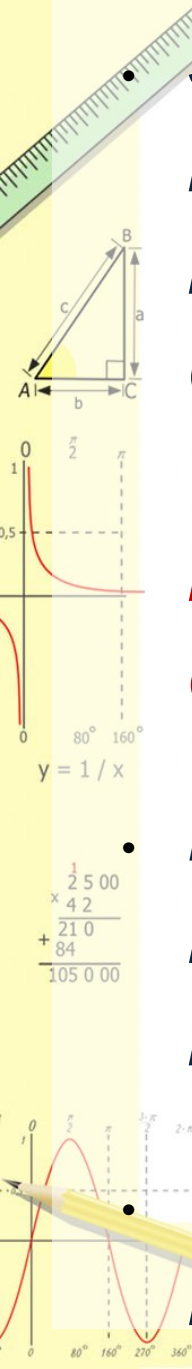
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



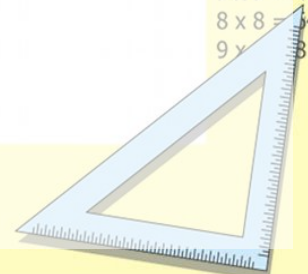
Здесь в основании пирамиды могут находиться **любые треугольники**, т.к. в любой треугольник можно вписать окружность, а четырехугольники только те, у которых суммы противоположных сторон равны \*.

Нельзя вписать окружность в прямоугольник, параллелограмм, некоторые трапеции.

Следовательно, в основании пирамид II класса не могут



2 x 2 =	4
3 x 3 =	9
4 x 4 =	16
5 x 5 =	25
6 x 6 =	36
7 x 7 =	49
8 x 8 =	64
9 x 9 =	81



# Пример 1 :

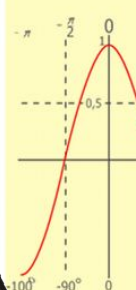
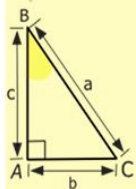
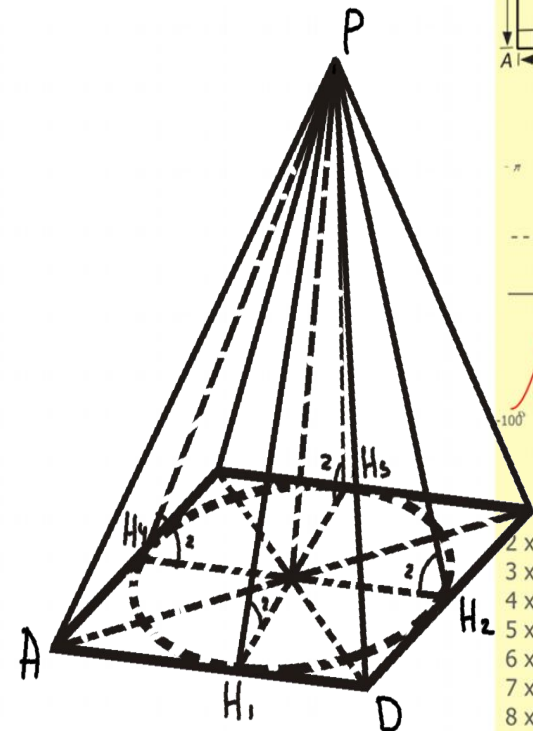
Дано:  $PABCD$  – пирамида .

Двугранные углы при основании её равны,  $ABCD$  – ромб.

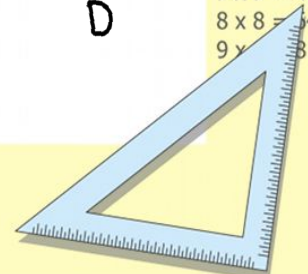
Доказать:  $m.O$  – центр окружности, вписанной в основание.

Доказательство: углы  $\angle PH_1O = \angle PH_2O = \angle PH_3O = \angle PH_4O$  линейные углы двугранных углов при основании.

Треугольники  $\triangle PH_1O, \triangle PH_2O, \triangle PH_3O, \triangle PH_4O$  равны по острому углу и



$2 \times 2 = 4$
$3 \times 3 = 9$
$4 \times 4 = 16$
$5 \times 5 = 25$
$6 \times 6 = 36$
$7 \times 7 = 49$
$8 \times 8 = 64$
$9 \times 9 = 81$



1	25 00
x	42
+	21 0
84	
	105 0 00

$y = 1/x$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$



# Пример 2.Р

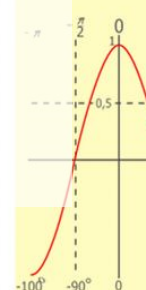
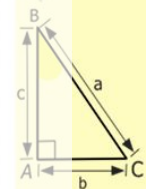
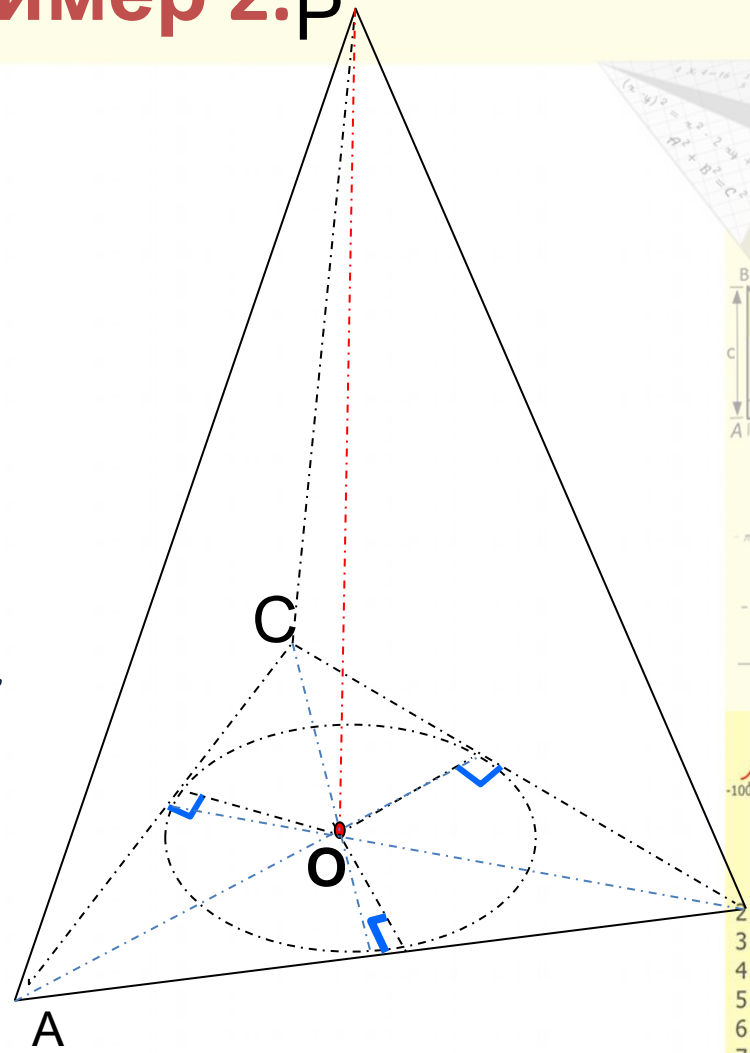
Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис.

$ОН1=ОН2=ОН3=r$ , так как радиус окружности перпендикулярен к касательной в точке касания, то  $ОН1 \perp AC$ ,  $ОН2 \perp BC$ ,  $ОН3 \perp AB$   
 $\Rightarrow$  прямоугольные  $\triangle ON1C = \triangle ON2C$  по гипотенузе  $OC$  и катету.

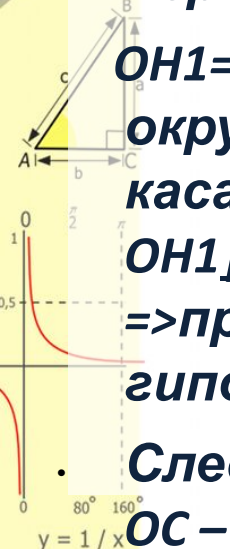
Следовательно углы  $\angle H1CO = \angle H2CO \Rightarrow$   
 **$OC$  – биссектриса  $C$ .**

Аналогично:  $AO$  и  $OB$  –  
**биссектрисы углов  $A$  и  $B$ .**

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} ON1 \cdot AC + \frac{1}{2} ON2 \cdot BC + \frac{1}{2} ON3 \cdot AB = \frac{1}{2} P \cdot r$ , где  $P$  – периметр треугольника,  $r$  – радиус вписанной в треугольник окружности.



2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64
9 x 9 = 81



1 2 5 00
x 4 2
+ 21 0
+ 84
105 0 00



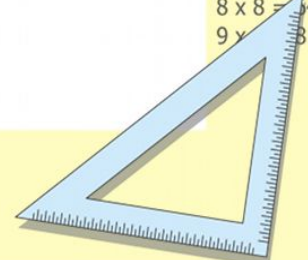
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$


---


$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



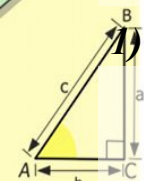
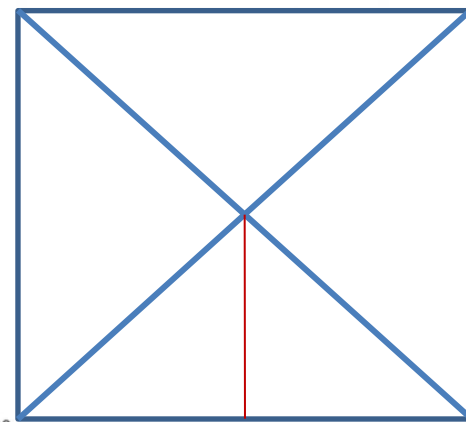
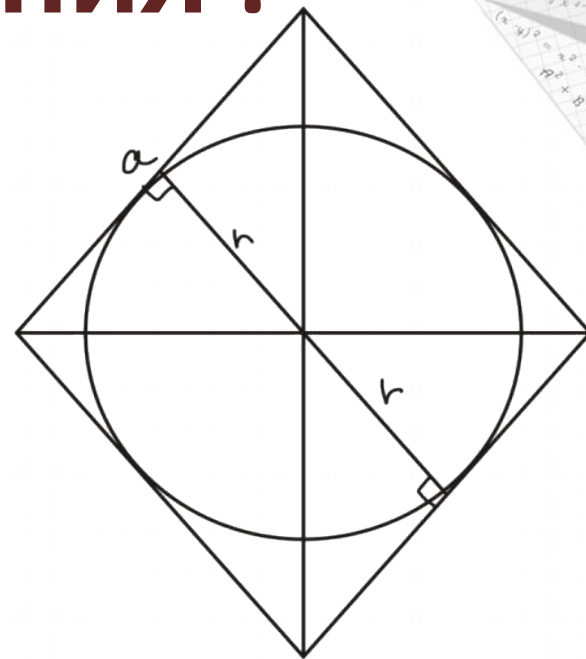


# Некоторые замечания :

**Центр окружности, вписанной в ромб или квадрат, находится в точке пересечения диагоналей.**

**Ромб:  $r = S/2a$ , т.к.  $S$  ромба  $= a \cdot h = 2ra, h=2r$**

**2) Квадрат  $r=a/2$**



$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 5 \ 00 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

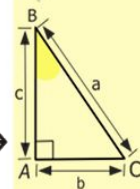
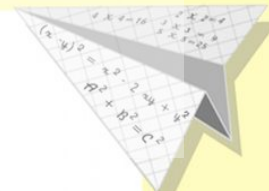
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

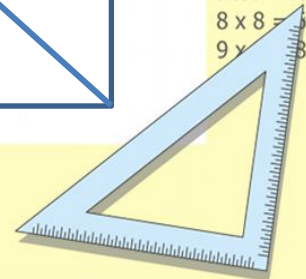


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

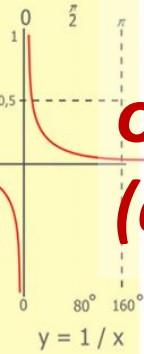
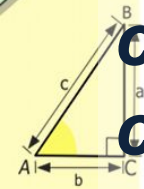
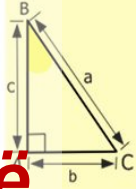
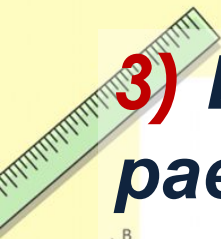
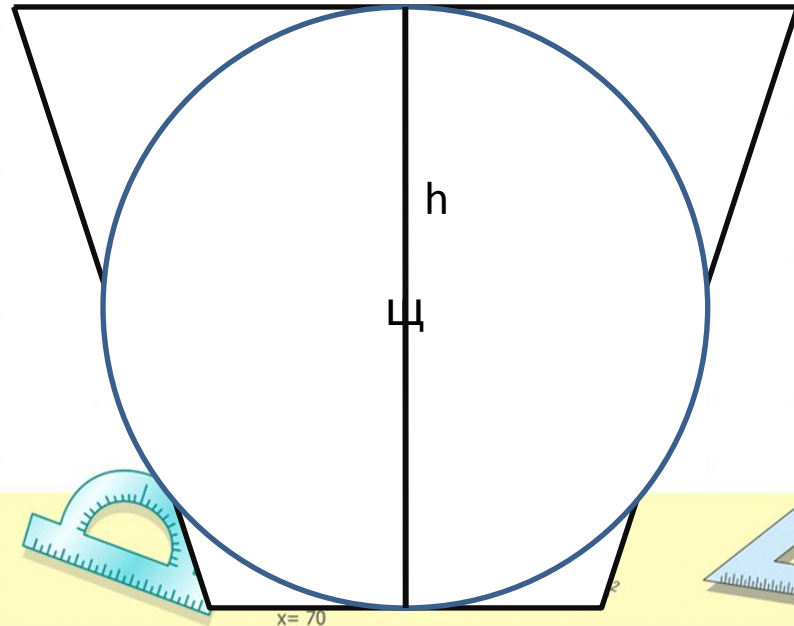


$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



**3) Центр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, находится в середине её высоты, проведенной через середину оснований.**

**$r = S / (a + b)$ , где  $S$  – площадь трапеции,  $a$  и  $b$  её основания, т.к.  $h = 2r$ ,  $S = (a + b) / 2 \cdot h = (a + b) / 2 \cdot 2r = (a + b) \cdot r$**



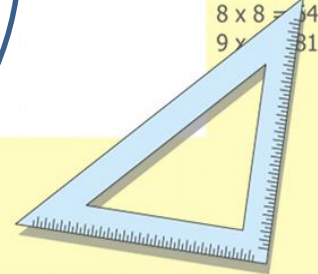
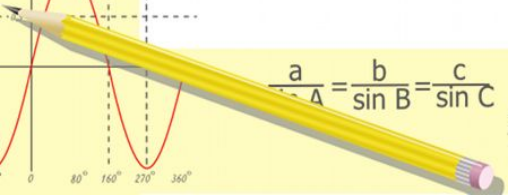
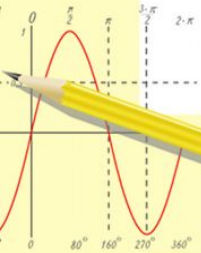
$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



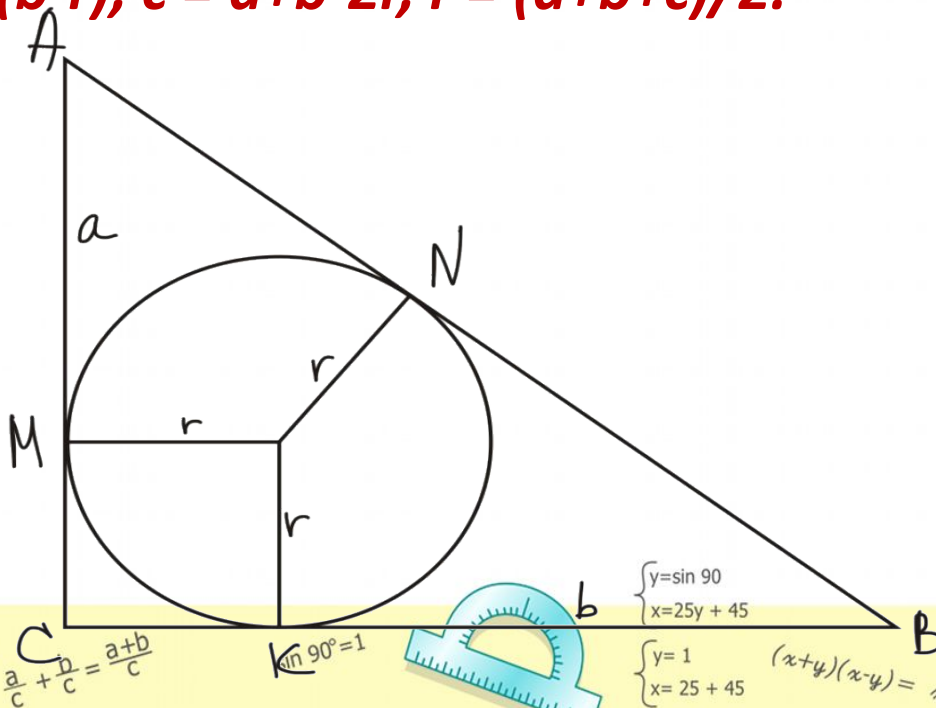
4) Для прямоугольного треугольника:

Так как отрезки касательных проведены из одной точки к окружности равны, то: MA = AN, NK = KB,

$MA = a - r, AN = a - r$

$BK = b - r, BN = b - r$

$\Rightarrow c = (a - r) + (b - r), c = a + b - 2r, r = (a + b + c) / 2.$



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

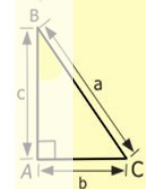
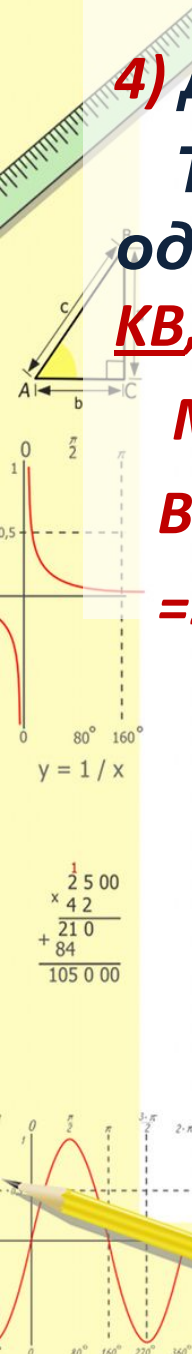
$\sin 90^\circ = 1$

$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$

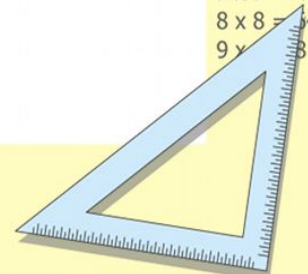
$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

$\frac{x}{70}$

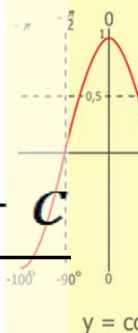
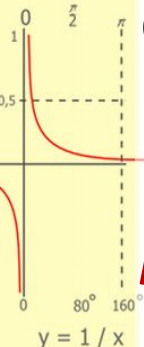
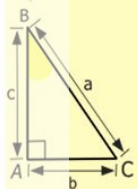
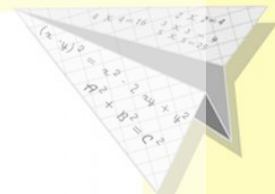
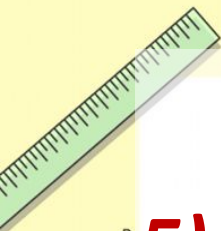


- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



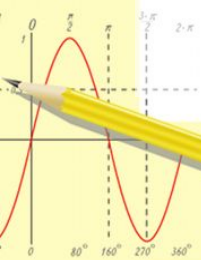
**5) Радиус вписанной окружности в треугольник выражается через стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$  формулой:**

$$r = \frac{\sqrt{(p-a) * (p-b) * (p-c)}}{p}, \text{ где } p = \frac{a + b + c}{2}$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

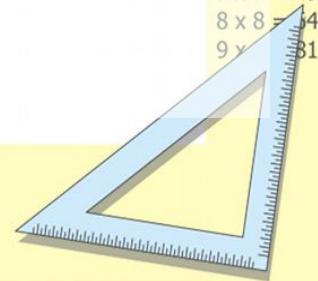
$$\sin 90^\circ = 1$$



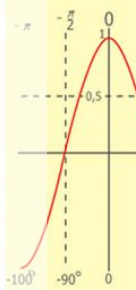
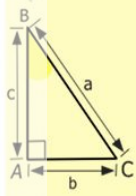
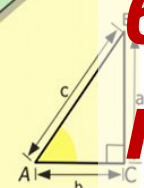
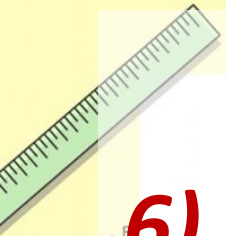
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



**6) В произвольный многоугольник нельзя вписать окружность, следовательно в основании пирамид II класса не могут находиться произвольные многоугольники.**



$$y = 1/x$$

$$y = \cos$$

$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

