

**Статически неопределимая система-
геометрически неизменяемая система,**

в которой

количество реакций связей

и

внутренних силовых факторов

превышает

число уравнений равновесия

Разность

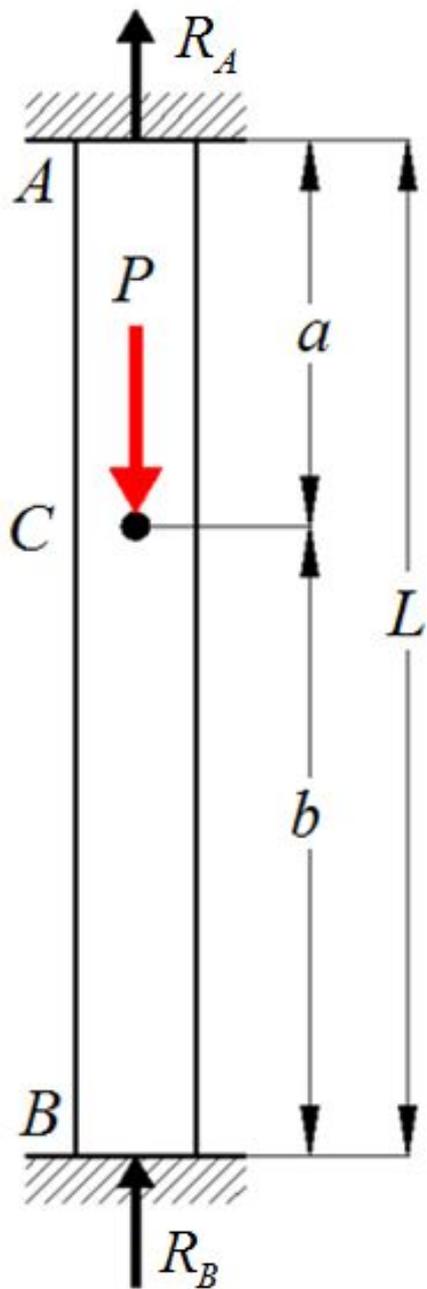
между **числом искомым неизвестных усилий**

и **числом независимых уравнений равновесия,**

которые для данной расчетной системы
можно составить,
называется

степень статической неопределимости

- Впервые статически неопределимую систему исследовал Эйлер (1774 г.) - задача о жестком столе, опирающемся на упругое основание.
- Навье в 1825 г. – расчет фермы



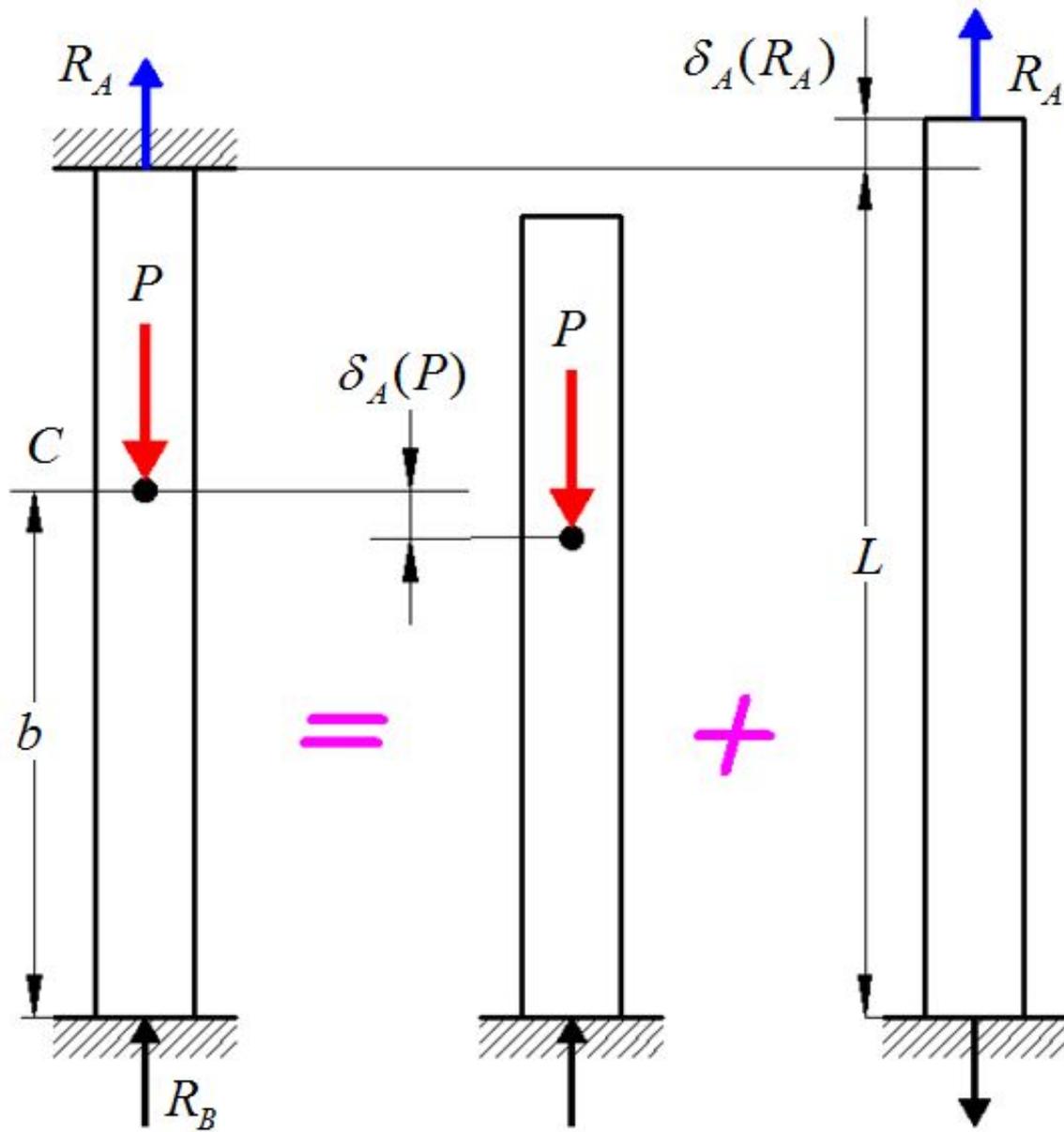
Уравнение статического
равновесия стержня имеет вид

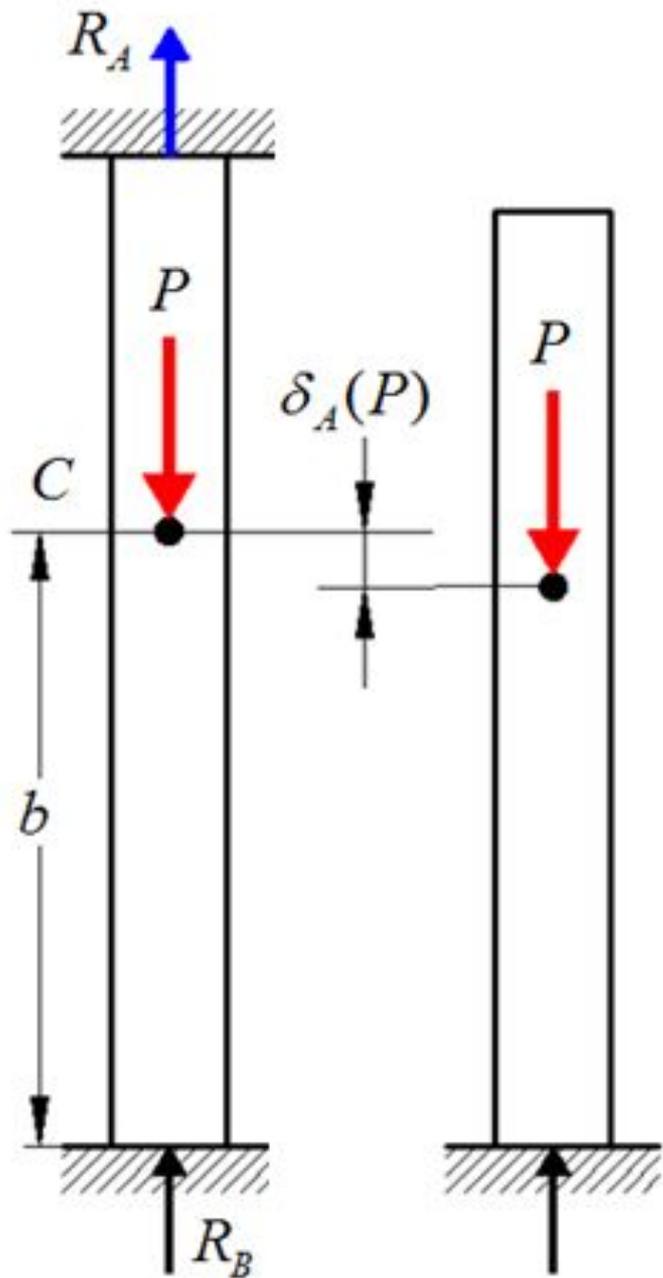
$$R_A + R_B = P$$

*Выберем в качестве неизвестной величины реакцию R_A .
Если эту реакцию удастся найти,
то другую реакцию R_B можно будет определить
из уравнения равновесия*

$$R_A + R_B = P.$$

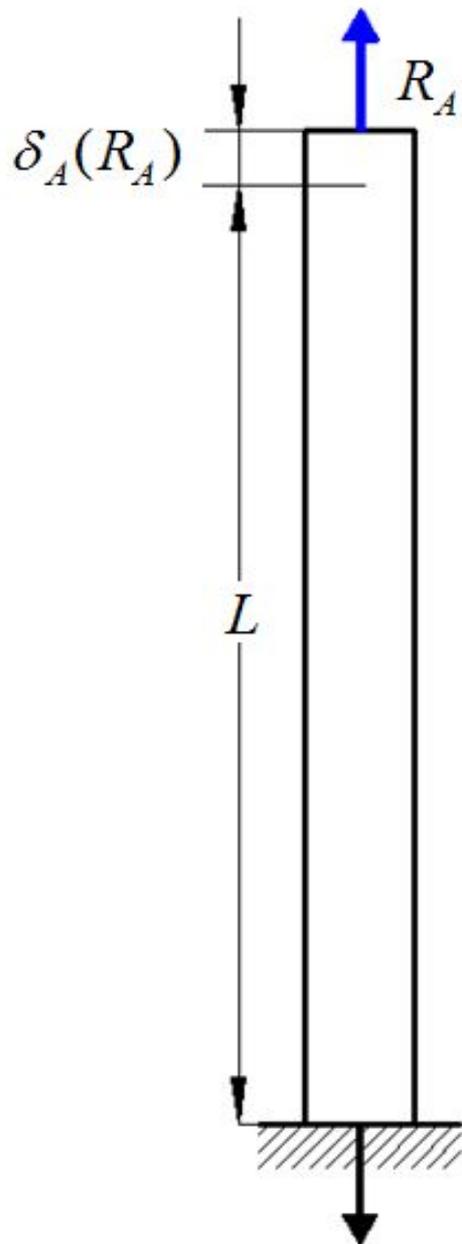
*Конструкция, которая остается после отбрасывания
лишней неизвестной,
называется основной системой*





*Рассмотрим влияние
силы P
на перемещение
точки A
в основной
системе*

$$\delta_A(P) = \frac{Pb}{EF}$$



Перемещение точки A
от действия силы R_A :

$$\delta_A(R_A) = \frac{R_A L}{EF}$$

$$\delta_A(R_A) = \delta_A(P), \quad \frac{R_A L}{EF} = \frac{Pb}{EF},$$

откуда

$$R_A = P \frac{b}{L}$$

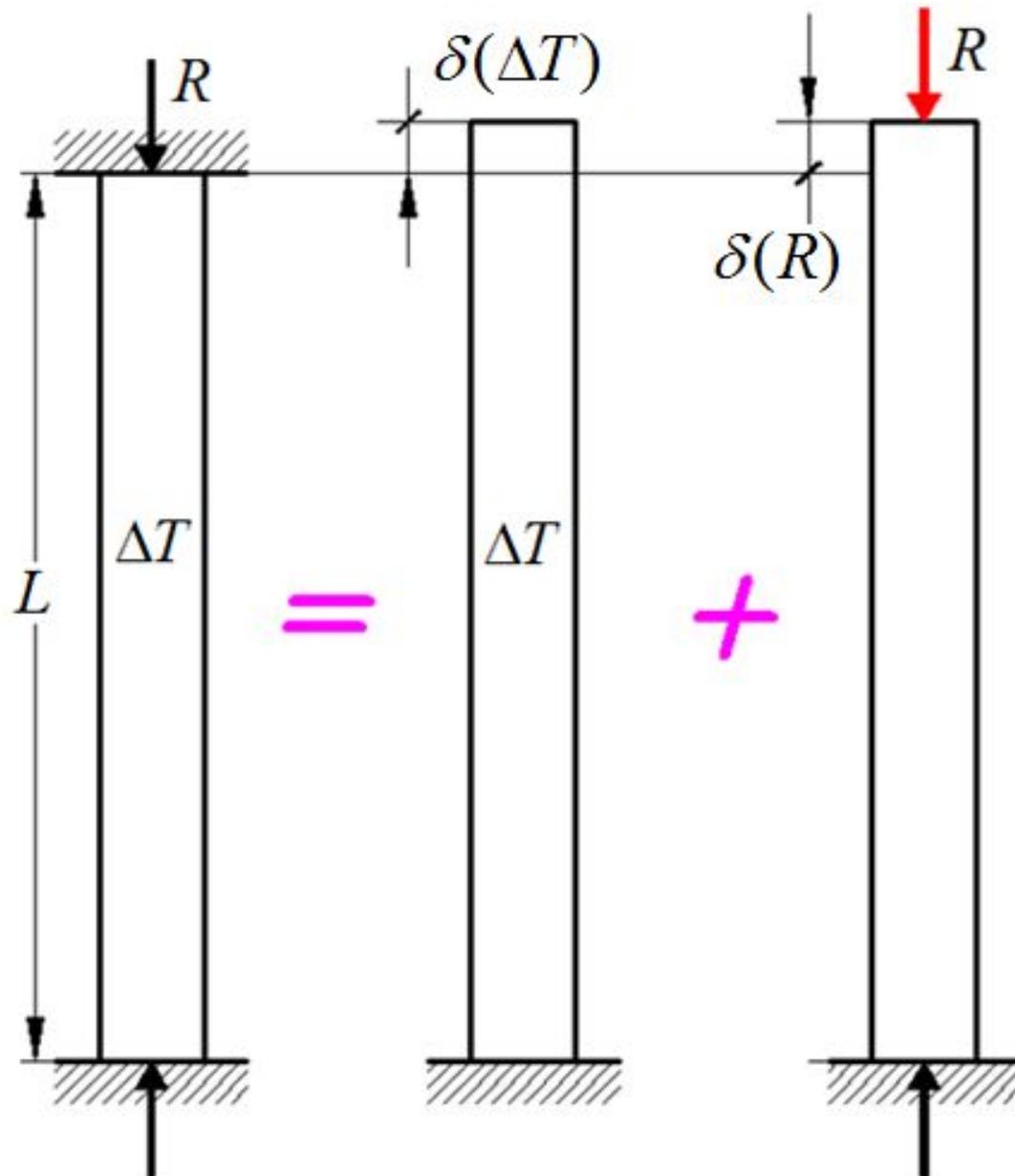
Из уравнения равновесия

$$R_A + R_B = P;$$

$$R_B = \frac{Pa}{L}.$$

Обе реакции найдены

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ



Одинаковое изменение температуры всего стержня вызовет удлинение его на величину

$$\delta(\Delta T) = \alpha \cdot L \cdot \Delta T,$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения;

L — длина;

ΔT — приращение температуры.

$$\delta(R) = \frac{RL}{EA},$$

$$\delta(\Delta T) = \delta(R),$$

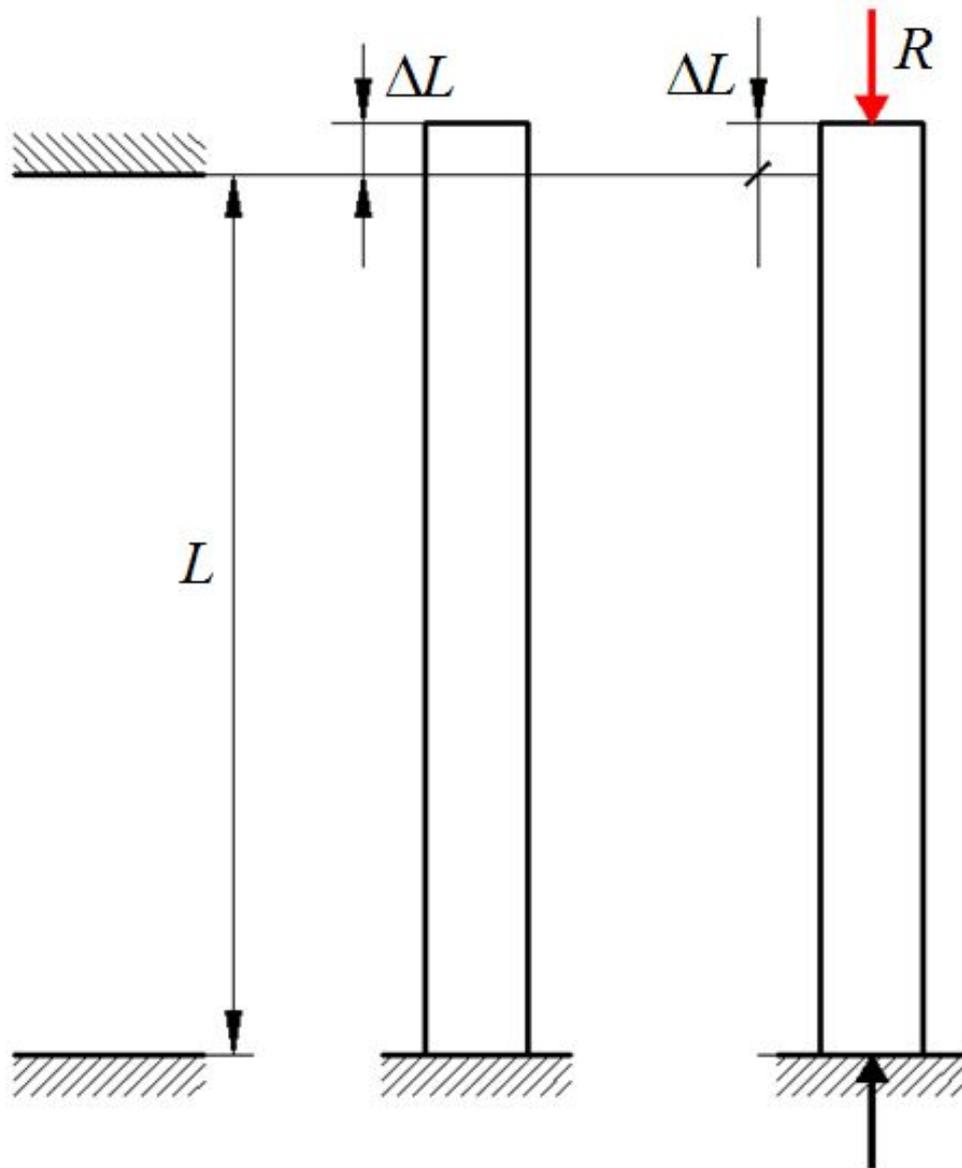
$$\alpha \cdot L \cdot \Delta T = \frac{RL}{EA},$$

$$R = \alpha \cdot \Delta T \cdot EA;$$

$$\sigma = \frac{R}{A} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T;$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha \cdot \Delta T.$$

ВЛИЯНИЕ НЕТОЧНОСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ



$$\Delta L = \frac{RL}{EF};$$
$$R = \frac{EF}{L} \Delta L$$

**Статически неопределимые
системы
обладают рядом характерных
особенностей:**

1. Статически неопределимая система
ввиду наличия
добавочных лишних связей
по сравнению с соответствующей
статически определимой системой
оказывается
более жесткой

2. Разрушение лишних связей
в нагруженном состоянии
не ведет к разрушению
всей системы в целом,
так как удаление этих связей приводит
к новой геометрически неизменяемой
системе,
в то время как потеря связи
в статически определимой системе
приводит к изменяемой системе

3. Для расчета
статически неопределимых систем
необходимо предварительно задаваться
геометрическими характеристиками
поперечных сечений элементов,
т.е. фактически их формой и размерами,
так как их изменение
приводит к изменению усилий в связях
и новому распределению усилий
во всех элементах системы

4. При расчете статически неопределимых систем необходимо

заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.

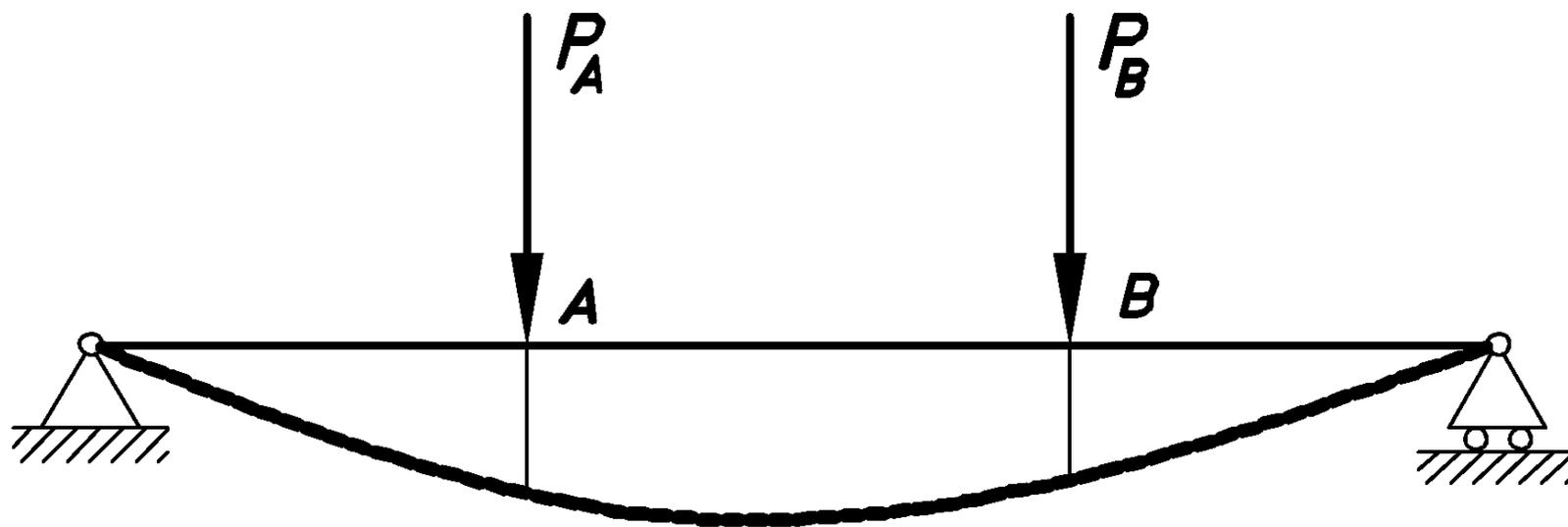
5. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий даже

при отсутствии внешних нагрузок

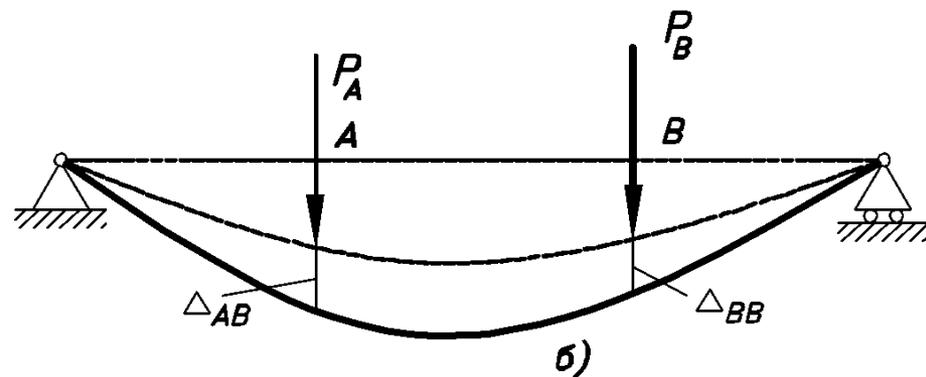
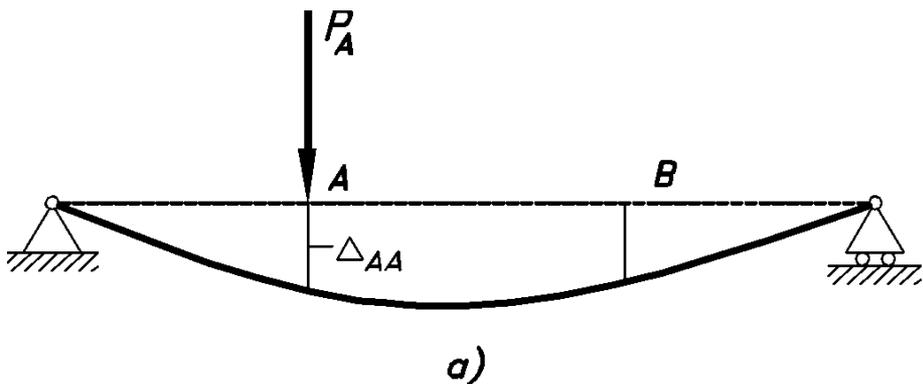
Теорема о взаимности работ

Сформулирована итальянским математиком Энрико Бетти
(1823–1892)



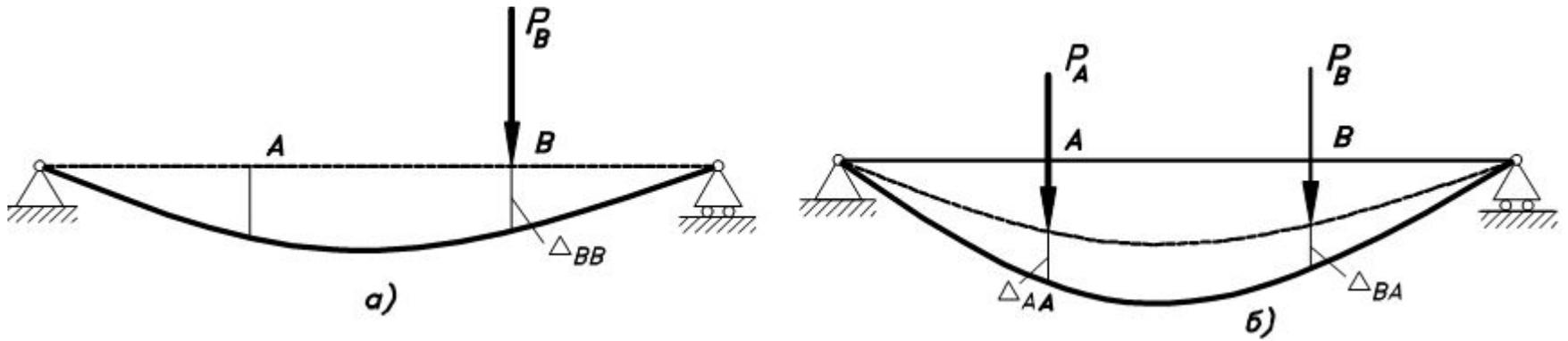


Деформации при первой последовательности нагружения



$$U = \frac{1}{2} P_A \cdot \Delta_{AA} + \frac{1}{2} P_B \cdot \Delta_{BB} + P_A \cdot \Delta_{AB}$$

Деформации при второй последовательности нагружения



$$U = \frac{1}{2} P_B \cdot \Delta_{BB} + \frac{1}{2} P_A \cdot \Delta_{AA} + P_B \cdot \Delta_{BA}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} P_B \cdot \Delta_{BB} + \frac{1}{2} P_A \cdot \Delta_{AA} + P_B \cdot \Delta_{BA} = \\ & = \frac{1}{2} P_A \cdot \Delta_{AA} + \frac{1}{2} P_B \cdot \Delta_{BB} + P_A \cdot \Delta_{AB}, \end{aligned}$$

откуда

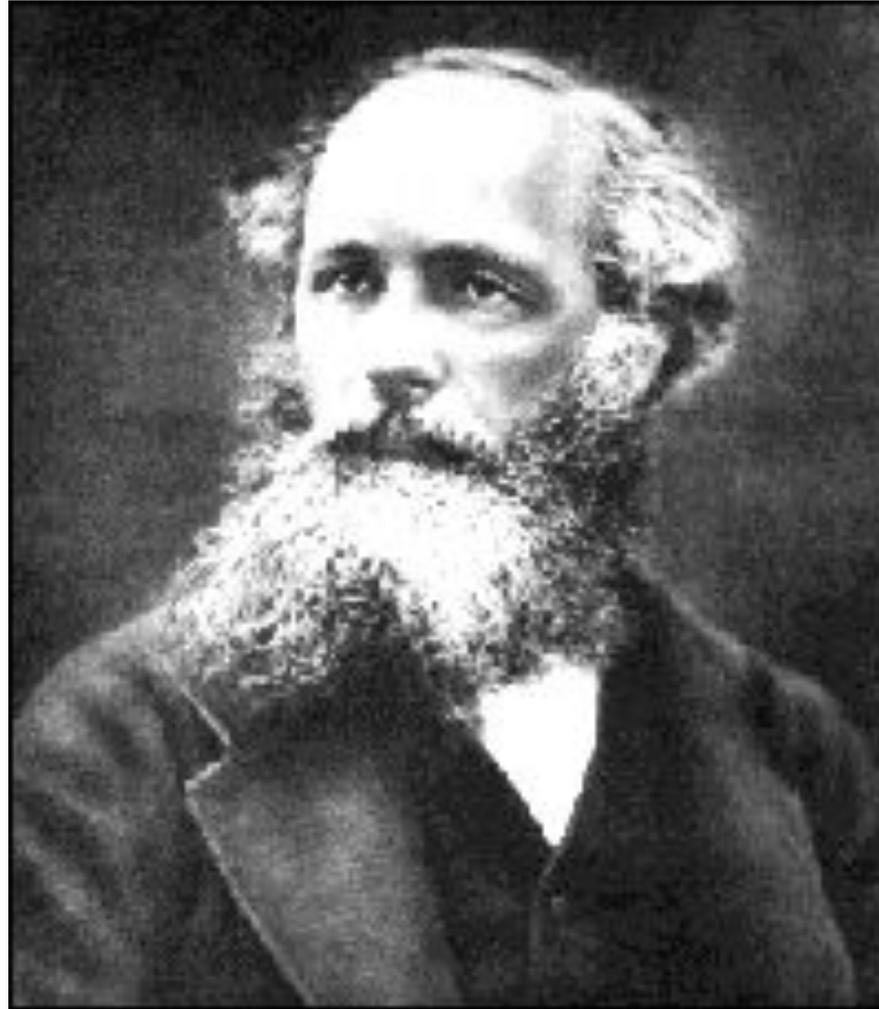
$$P_A \cdot \Delta_{AB} = P_B \cdot \Delta_{BA}$$

Работа силы P_A
на перемещении,
вызванном силой P_B ,
равна работе силы P_B
на перемещении,
вызванном силой P_A

Если $P_A = P_B$, то

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BA}$$

**«Перемещение точки А,
вызванное силой,
приложенной в точке В,
равно
перемещению точки В,
вызванному такой же силой,
приложенной в точке А»
(теорема Максвелла)**



Джеймс-Клерк
МАКСВЕЛЛ
(1831–1879)

Метод СИЛ

Заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей, а их действие заменяется **силами и моментами**.

Величина их в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями

Основная система –

статически определимая
система, полученная из заданной
статически неопределимой
системы путем освобождения ее
от дополнительных связей

Лишние неизвестные -
неизвестные силовые факторы,
введенные вместо
отброшенных связей

В тех сечениях,
где запрещены
линейные перемещения,
вводятся **СИЛЫ.**

Там, где запрещены
угловые смещения,
вводятся **МОМЕНТЫ**

Неизвестные силовые факторы будем обозначать X_i , где i – номер неизвестного. Наибольшее значение i равно степени статической неопределимости системы.

Для внутренних связей силы X_i являются взаимными. Если в каком-либо сечении рама разрезана, то равные и противоположные друг другу силы и моменты прикладываются как к правой, так и к левой частям системы

Эквивалентная система

- основная система

с приложенными к ней лишними

неизвестными X_1, X_2, \dots, X_n и

внешней нагрузкой P

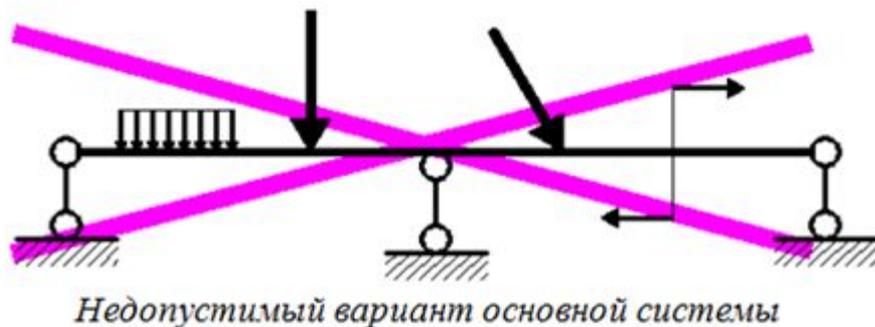
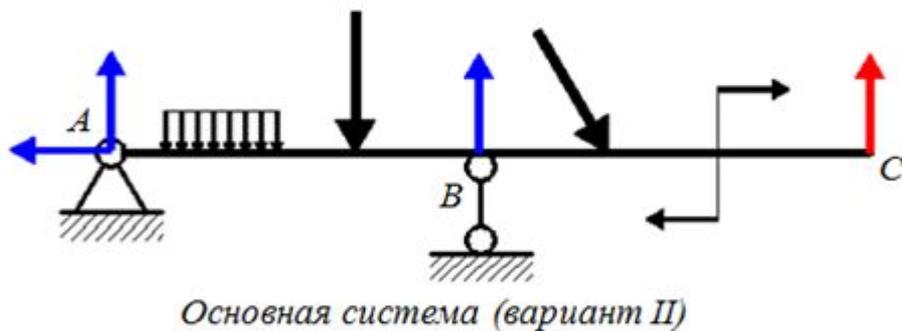
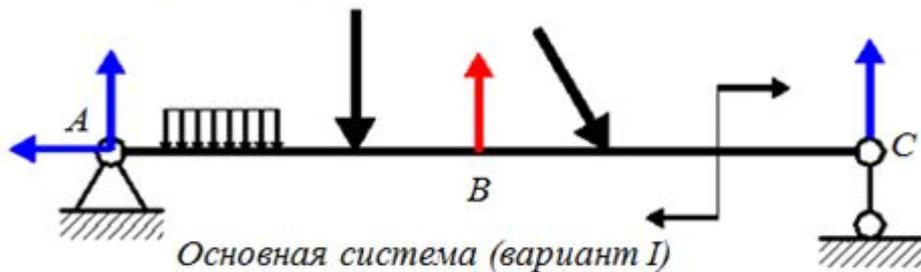
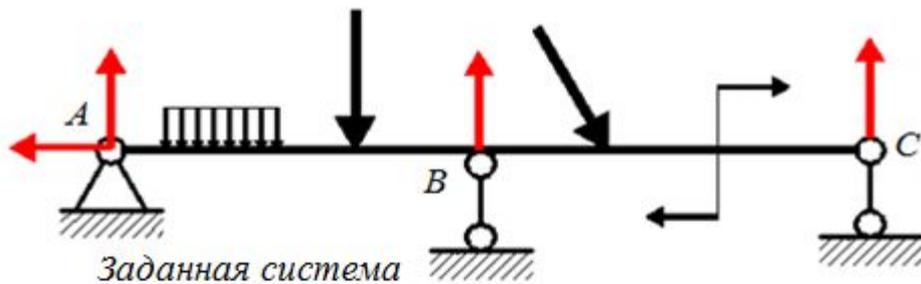
при условии,

что её действительные

перемещения согласуются с

наложенными

на исходную систему связями



Для каждой статически неопределимой заданной системы можно подобрать различные основные системы

Основная система
должна быть

**статически
определимой**

и

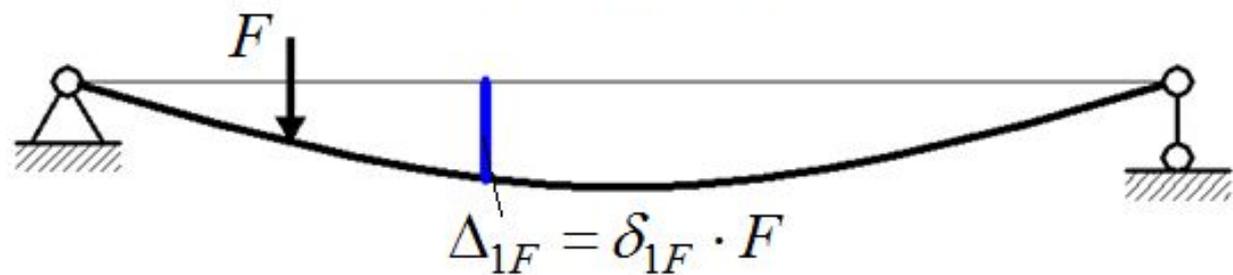
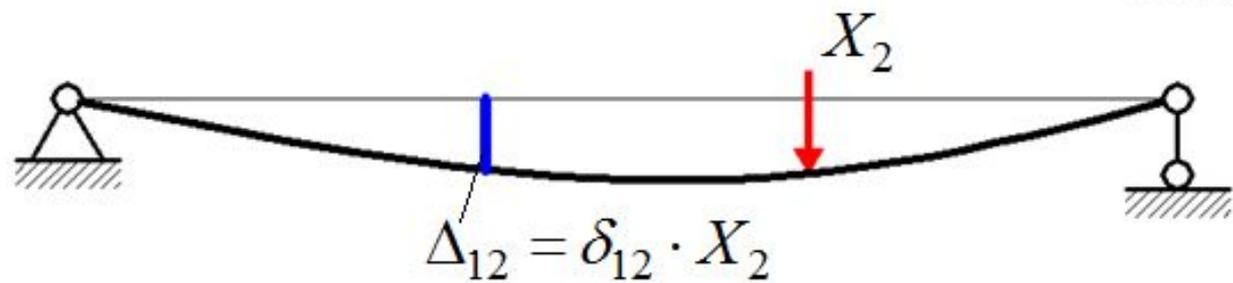
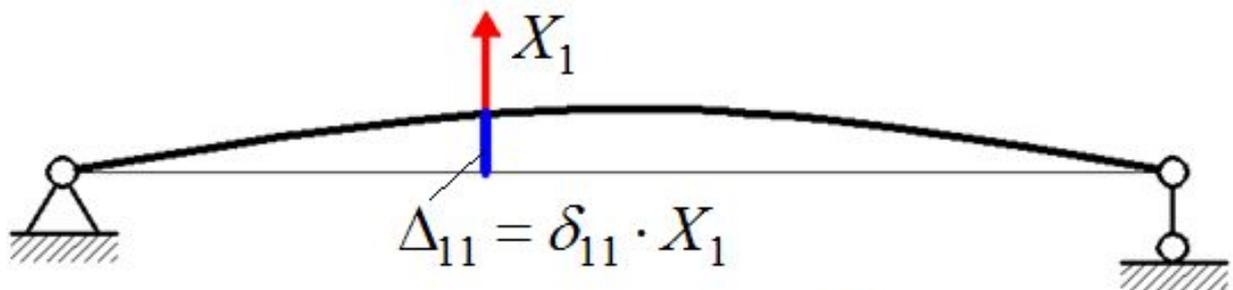
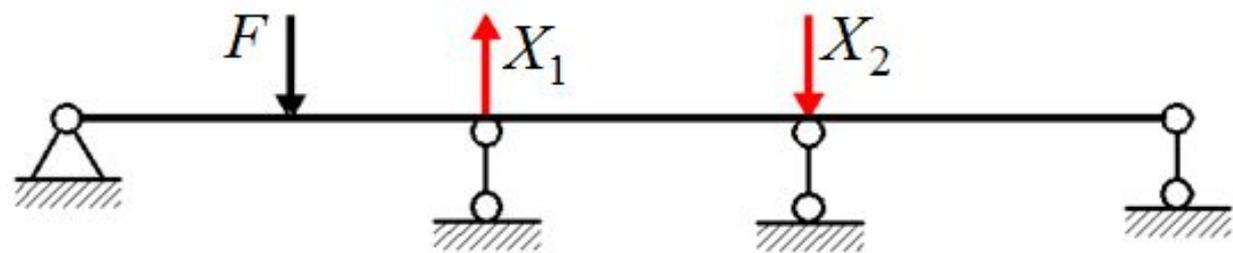
**геометрически
неизменяемой**

Канонические уравнения метода сил

Перемещения по направлению любой i -ой связи
на основании принципа
независимости действия сил

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iF} = 0$$

Первый индекс означает **направление перемещения** и **номер отброшенной связи**, а второй указывает на **причину**, вызвавшую перемещение



$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k$$

$$\Delta_i = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots +$$
$$+ \delta_{in} X_n + \Delta_{iF} = 0.$$

$$\delta_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx \quad \text{единичные перемещения} \quad ;$$

\bar{M}_i, \bar{M}_k — моменты от единичных сил ,

приложенных в направлении

неизвестных X_i, X_k ;

Изгибная жесткость .

Обобщенные перемещения

$$\Delta_{iP} = \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} dx$$

называются грузовыми перемещениями;

\bar{M}_i — изгибающий момент ,

вызываемый i — й единичной силой;

M_P — изгибающий момент ,

который вызван системой внешних сил.

Единичные перемещения
делятся на **главные**,
расположенные по главной
диагонали и имеющие
одинаковые индексы δ_{ii}

и **побочные** δ_{ik} , $i \neq k$

Симметрично
расположенные
перемещения
в соответствии с **теоремой**
о взаимности
перемещений равны друг

$$\delta_{ik} \stackrel{\text{друг}}{=} \delta_{ki}$$

т.е.