Системы счисления

2013 г.

Определение

Система счисле́ния — символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков.

Система счисления:

- даёт представления множества чисел (целых и/или вещественных);
- даёт каждому числу уникальное представление
- отражает алгебраическую и арифметическую структуру чисел.

Виды систем счисления

- **Системы счисления подразделяются на:**
  - позиционные
  - смешанные

Позиционные системы счисления

- **В позиционных системах счисления** одна и та же **цифра** в записи числа имеет различные значения в зависимости от того **места** (разряда), где она расположена.
- К числу таких систем относится современная **десятичная система счисления**
- В позиционных системах **чем больше основание** системы, **тем меньшее количество разрядов** (то есть записываемых цифр) требуется при записи числа.

Позиционные системы счисления

- Под позиционной системой счисления обычно понимается ***b-ричная*** система счисления, которая определяется целым числом ***b > 1***, называемым **основанием системы счисления**.
- Целое число без знака в ***b-ричной*** системе счисления представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа.
- **Например, число *сто три*** представляется в десятичной системе счисления в виде:

$$103 = 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Позиционные системы счисления

Формула представления позиционных чисел:

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$$

- где a_k – это целые числа, называемые цифрами, удовлетворяющие неравенству:

$$0 \le a_k \le (b-1)$$

- Каждая степень b^k в такой записи называется весовым коэффициентом разряда.
- Старшинство разрядов определяется значением показателя k (номером разряда).

Позиционные системы счисления

Наиболее употребляемыми в настоящее время позиционными системами являются:

- **2 — двоичная** (в информатике, программировании)
- **3 — троичная**
- **8 — восьмеричная**
- **10 — десятичная** (используется повсеместно)
- **12 — двенадцатеричная** (счёт дюжинами)
- **13 — тринадцатеричная**
- **16 —шестнадцатеричная** (в программировании)
- **60 — шестидесятеричная** (единицы измерения времени, измерение углов и, в частности, координат, долготы и широты).

Непозиционные системы счисления

- **В непозиционных системах счисления** величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе.
- При этом система может накладывать ограничения на положение цифр, например, чтобы они были расположены в порядке убывания.

Непозиционные системы счисления

- Каноническим примером *почти непозиционной* системы счисления является римская, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:
  I — 1
  V — 5
  X — 10
  L — 50
  C — 100
  D — 500
  M — 1000
- Например, II = 1 + 1 = 2
  здесь символ I обозначает 1 независимо от места в числе.
- На самом деле, римская система не является полностью непозиционной, так как меньшая цифра, идущая перед большей, вычитается из неё, например:
- IV = 4, в то время как: VI = 6

Двоичная система счисления

- **Двоичная система счисления** — позиционная система счисления с **основанием 2**.
- **В этой системе счисления числа записываются с помощью двух символов (0 и 1).**
- Чтобы не путать в какой системе счисления записано число, его снабжают указателем справа внизу.
- Например, число **в десятичной системе 5_{10}** будет в **двоичной 101_2**.
- Иногда двоичное число обозначают префиксом **0b (ноль b)**, например **0b101**.

Двоичная система счисления

Произношение

- Во всех системах счисления (кроме десятичной) знаки читаются по одному. Например число $\mathbf{101_2}$ произносится «**один ноль один**».

- **Отрицательные двоичные числа** обозначаются так же как и десятичные: знаком «–» перед числом.
- Однако в вычислительной технике широко используется запись отрицательных двоичных чисел в **дополнительном коде**, что может вносить путаницу.
- Например число $\mathbf{-5_{10}}$ может быть записано как $\mathbf{-101_2}$ но в компьютере будет храниться как:

$\mathbf{11111111\ 11111111\ 11111111\ 11111011_2}$ (в 4 байтах)

Двоичная система счисления

- **Двоичная система счисления** является комбинацией двоичной системы кодирования и показательной весовой функции с **основанием 2**.
- Положительные целые числа (без знака) записываются в виде суммы степеней двойки от **0** до числа **n-1**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k,$$

- 49 = 1 * $\mathbf{2^5}$ + 1 * $\mathbf{2^4}$ + 0 * $\mathbf{2^3}$ + 0 * $\mathbf{2^2}$ + 0 * $\mathbf{2^1}$ + 1 * $\mathbf{2^0}$ = **110001**

Преобразование десятичных чисел в двоичные

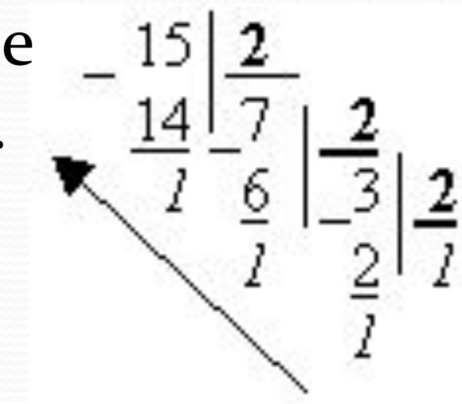
- Допустим, нам нужно перевести число **19** в двоичное. Вы можете воспользоваться следующей процедурой :
- **19 /2 = 9** с остатком **1**
  9 /2 = 4 с остатком **1**
  4 /2 = 2 без остатка **0**
  2 /2 = 1 без остатка **0**
  1 /2 = 0 с остатком **1**
- **Делим каждое частное на 2** и записываем остаток в конец двоичной записи.
- Продолжаем деление до тех пор, пока в частном не будет **0**.
- **Результат записываем справа налево.** То есть нижняя цифра (1) будет самой левой и т.д.
- В результате получаем число **19** в двоичной записи: **10011**.

Преобразование дробных десятичных чисел в двоичные

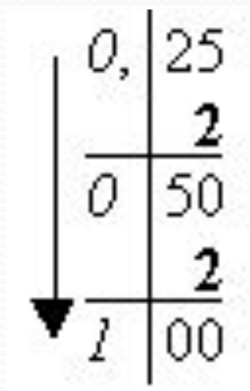
- Если в исходном числе есть **целая часть** то она преобразуется **отдельно от дробной**.
- **Дробь умножается** на основание двоичной системы счисления (**2**)
- В полученном произведении **выделяется целая часть**, которая принимается в качестве старшего разряда числа в двоичной системе счисления;
- **Алгоритм завершается**, если дробная часть полученного произведения равна нулю или если достигнута требуемая точность вычислений. В противном случае вычисления продолжаются над дробной частью произведения.

Преобразование дробных десятичных чисел в двоичные

- Требуется перевести дробное десятичное число **$15{,}25_{10}$** в дробное двоичное число.



- Тогда нужно отдельно перевести целую часть и отдельно – дробную.
- Дробную часть **0,25** умножаем на основание **2**, занося целые части произведения в разряды после запятой искомого дробного двоичного числа:



- Ответ: **$15{,}25_{10} = 1111{,}01_2$**

Преобразование двоичных чисел в десятичные

- **Для преобразования из двоичной системы в десятичную** используют следующую таблицу степеней основания **2**:

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

- Начиная с цифры **1** все цифры умножаются на два. Точка, которая стоит после 1, называется двоичной точкой.

Преобразование двоичных чисел в десятичные

- Допустим, дано двоичное число $\mathbf{110001_2}$.
- Для перевода в десятичное запишите его как сумму по разрядам следующим образом:

$\mathbf{1} * 2^5 + \mathbf{1} * 2^4 + \mathbf{0} * 2^3 + \mathbf{0} * 2^2 + \mathbf{0} * 2^1 + \mathbf{1} * 2^0 = 49$

- **То же самое чуть иначе:**

$\mathbf{1} * 32 + \mathbf{1} * 16 + \mathbf{0} * 8 + \mathbf{0} * 4 + \mathbf{0} * 2 + \mathbf{1} * 1 = 49$

- **То есть:**

$\mathbf{32} + \mathbf{16} + \mathbf{1} = 49$

Преобразование дробных двоичных чисел в десятичные

- Нужно перевести число **1011010,101**$_2$ в десятичную систему. Запишем это число следующим образом:

$\mathbf{1}*2^6 + \mathbf{0}*2^5 + \mathbf{1}*2^4 + \mathbf{1}*2^3 + \mathbf{0}*2^2 + \mathbf{1}*2^1 + \mathbf{0}*2^0 + \mathbf{1}*2^{-1} + \mathbf{0}*2^{-2} + \mathbf{1}*2^{-3} = 90{,}625$

- **То же самое чуть иначе:**

$\mathbf{1}*64 + \mathbf{0}*32 + \mathbf{1}*16 + \mathbf{1}*8 + \mathbf{0}*4 + \mathbf{1}*2 + \mathbf{0}*1 + \mathbf{1}*0{,}5 + \mathbf{0}*0{,}25 + \mathbf{1}*0{,}125 = 90{,}625$

- **То есть:**

$64 + 16 + 8 + 2 + 0{,}5 + 0{,}125 = 90{,}625$

Сложение, вычитание двоичных чисел

- Таблицы сложения и вычитания

+	0	1
0	0	1
1	1	10

-	0	1
0	0	-1
1	1	0

- Пример сложения «столбиком» ($14_{10} + 5_{10} = 19_{10}$ или $1110_2 + 101_2 = 10011_2$):

+		1	1	1	0
			1	0	1

	1	0	0	1	1

Умножение двоичных чисел

- Таблица умножения

*	0	1
0	0	0
1	0	1

- Пример умножения «столбиком» (14_{10} * 5_{10} = 70_{10} или 1110_2 * 101_2 = 1000110_2):

×				1	1	1	0
					1	0	1
+				1	1	1	0
		1	1	1	0		
	1	0	0	0	1	1	0

Шестнадцатеричная система счисления

- **Шестнадцатеричная система счисления** — позиционная система счисления по целочисленному основанию **16**.
- Обычно в качестве шестнадцатеричных цифр используются десятичные **цифры от 0 до 9** и латинские **буквы от A до F** для обозначения цифр от 10_{10}до 15_{10},
- то есть (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).

Шестнадцатеричная система счисления

Применение

- Широко используется в низкоуровневом программировании и компьютерной документации, поскольку в современных компьютерах минимальной единицей памяти является 8-битный байт, значения которого удобно записывать двумя шестнадцатеричными цифрами.

Перевод чисел из десятичной в шестнадцатеричную систему

- Перевод осуществляется так же, как и в двоичной системе, но с основанием **16**.
- Переведём число $\mathbf{56{,}567}_{10}$ в шестнадцатеричное:

Целая часть от деления	Остаток от деления
56 /16 = 3	8
3 /16 = 0	3
0 /16 = 0	0

- Остаток от деления записываем в обратном порядке.
- Получаем $\mathbf{56}_{10} = \mathbf{038}_{16}$

Перевод чисел из десятичной в шестнадцатеричную систему

- Для перевода дробной части числа последовательно умножаем дробную часть на основание 16. В результате каждый раз записываем целую часть произведения.

0.567*16 = **9**.072 (целая часть **9**)

0.072*16 = **1**.152 (целая часть **1**)

0.152*16 = **2**.432 (целая часть **2**)

0.432*16 = **6**.912 (целая часть **6**)

- Получаем **0.567** = $\mathbf{9126_{16}}$
- Таким образом, число $\mathbf{56{,}567_{10}}$ в шестнадцатеричной системе счисления записывается как $\mathbf{38{,}9126_{16}}$.

Перевод чисел из 16-ой системы в 10-ую

- Для перевода шестнадцатеричного числа в десятичное необходимо это число представить в виде суммы произведений степеней основания шестнадцатеричной системы счисления на соответствующие цифры в разрядах шестнадцатеричного числа.
- Например, требуется перевести шестнадцатеричное число **5A3** в десятичное. В этом числе **3** цифры. В соответствии с вышеуказанным правилом представим его в виде суммы степеней с основанием **16**:
- $\mathbf{5A3_{16} = 3\cdot16^0+10\cdot16^1+5\cdot16^2 = 3\cdot1+10\cdot16+5\cdot256 = 3+160+1280 = 1443_{10}}$

Перевод чисел из 2-ой системы в 16-ую и наоборот

- **Для перевода многозначного двоичного числа** в шестнадцатеричную систему нужно разбить его на **тетрады** справа налево и заменить каждую тетраду соответствующей **шестнадцатеричной цифрой**.
- **Для перевода числа из шестнадцатеричной системы** в двоичную нужно заменить каждую его цифру на соответствующую **тетраду** из нижеприведенной таблицы перевода.

- **Например:**
- **010110100011**2 **= 0101 1010 0011 = 5A3**16

Таблица перевода чисел

hex – шестнадцатеричная
dec – десятичная
oct – восьмеричная

$\mathbf{0}_{hex}$	=	0_{dec}	=	0_{oct}	0	0	0	0
$\mathbf{1}_{hex}$	=	1_{dec}	=	1_{oct}	0	0	0	1
$\mathbf{2}_{hex}$	=	2_{dec}	=	2_{oct}	0	0	1	0
$\mathbf{3}_{hex}$	=	3_{dec}	=	3_{oct}	0	0	1	1
$\mathbf{4}_{hex}$	=	4_{dec}	=	4_{oct}	0	1	0	0
$\mathbf{5}_{hex}$	=	5_{dec}	=	5_{oct}	0	1	0	1
$\mathbf{6}_{hex}$	=	6_{dec}	=	6_{oct}	0	1	1	0
$\mathbf{7}_{hex}$	=	7_{dec}	=	7_{oct}	0	1	1	1
$\mathbf{8}_{hex}$	=	8_{dec}	=	10_{oct}	1	0	0	0
$\mathbf{9}_{hex}$	=	9_{dec}	=	11_{oct}	1	0	0	1
$\mathbf{A}_{hex}$	=	10_{dec}	=	12_{oct}	1	0	1	0
$\mathbf{B}_{hex}$	=	11_{dec}	=	13_{oct}	1	0	1	1
$\mathbf{C}_{hex}$	=	12_{dec}	=	14_{oct}	1	1	0	0
$\mathbf{D}_{hex}$	=	13_{dec}	=	15_{oct}	1	1	0	1
$\mathbf{E}_{hex}$	=	14_{dec}	=	16_{oct}	1	1	1	0
$\mathbf{F}_{hex}$	=	15_{dec}	=	17_{oct}	1	1	1	1

Представление отрицательных чисел

- **Дополнительный код** (англ. two’s complement) — наиболее распространённый способ представления отрицательных целых чисел в компьютерах.
- **Он позволяет заменить операцию вычитания** на операцию сложения и сделать операции сложения и вычитания одинаковыми для знаковых и беззнаковых чисел, чем упрощает архитектуру ЭВМ.
- **Дополнительный код отрицательного числа можно получить** инвертированием модуля двоичного числа (первое дополнение) и прибавлением к инверсии единицы (второе дополнение), либо вычитанием числа из нуля.

Представление отрицательных чисел

- При записи числа в дополнительном коде **старший разряд является знаковым**.
- Если его значение равно **0**, то в остальных разрядах записано положительное двоичное число, совпадающее с прямым кодом.
- Если число, записанное в прямом коде, отрицательное, то все разряды числа инвертируются, а к результату прибавляется 1. К получившемуся числу дописывается старший (знаковый) разряд, равный 1.

Представление отрицательных чисел

- **Двоичное 8-ми разрядное число со знаком** в дополнительном коде может представлять любое целое в диапазоне от –128 до +127.
- Если старший разряд равен нулю, то наибольшее целое число, которое может быть записано в оставшихся 7 разрядах равно , что равно **127**.

Десятичное представление	Код двоичного представления (8 бит)		
	прямой	обратный	дополнительный
127	01111111	01111111	01111111
1	00000001	00000001	00000001
0	00000000	00000000	00000000
-0	10000000	11111111	---
-1	10000001	11111110	11111111
-2	10000010	11111101	11111110
-3	10000011	11111100	11111101
-4	10000100	11111011	11111100
-5	10000101	11111010	11111011
-6	10000110	11111001	11111010
-7	10000111	11111000	11111001
-8	10001000	11110111	11111000
-9	10001001	11110110	11110111
-10	10001010	11110101	11110110
-11	10001011	11110100	11110101
-127	11111111	10000000	10000001
-128	---	---	10000000

Преобразование в дополнительный код

- **Преобразуем отрицательное число –5, записанное в прямом коде, в дополнительный.**
- **Прямой код числа –5, взятого по модулю:**

  101
- **Инвертируем все разряды числа, получая таким образом обратный код:**

  010
- **Добавим к результату 1:**

  011
- **Допишем слева знаковый единичный разряд:**

  1011

Экспоненциальная запись

- **Экспоненциа́льная за́пись** — представление действительных чисел в виде мантиссы и порядка. Удобна при представлении очень больших и очень малых чисел, а также для унификации их написания.

  $\boldsymbol{N = M * n^p}$, где

- **N** — записываемое число;
- **M** — мантисса;
- **n** — основание показательной функции;
- **p** (целое) — порядок;
- $\boldsymbol{n^p}$ — характеристика числа.

Пример:

- 1 000 000 (один миллион): $\mathbf{1{,}0 * 10^6}$
- N = 1 000 000, M = 1,0, n = 10, p = 6

Компьютерный способ экспоненциальной записи

- На компьютере (в частности в тексте компьютерных программ) экспоненциальную запись записывают в виде **MEp**, где:
- **M** — мантисса,
- **E** (exponent) — буква E, означающая «*10^» («...умножить на десять в степени...»)
- **p** — порядок.

- Например: $1{,}602176565\text{E-}19 = 1{,}602176565 \cdot 10^{-19}$

Компьютерный способ экспоненциальной записи

- В программировании часто используют символ «+» для неотрицательного порядка и ведущие нули, а в качестве десятичного разделителя — точку:

$$1{,}048576\text{E}{+}06 = 1\,048\,576;$$

$$3.14\text{E}{+}00 = 3,14$$

- Для улучшения читаемости иногда используют строчную букву **е**: $6{,}02214129\text{e}23$