# Тригонометрические уравнения

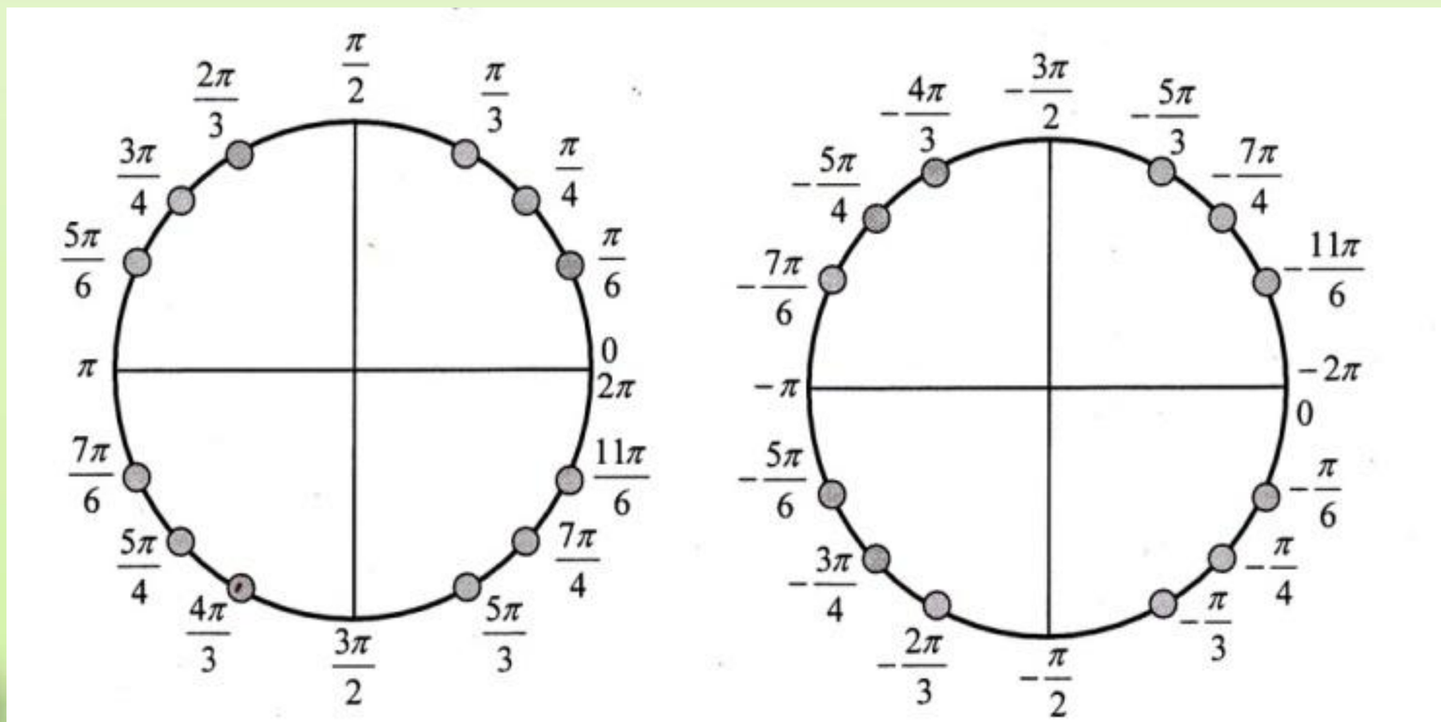
sin x=a,cos x=a,tg x=a,ctg x=a

Преподаватель: Кадирова А.М.

## С помощью тригонометрической окружности найти все значения из промежутка [-2π; 2π] для следующих выражений

$\arccos\frac{1}{2}$  $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$  $\arccos 1$  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$  *arcsin 0*,

*arcsin*$\left(-\frac{1}{2}\right)$.  $\arccos\frac{-\sqrt{2}}{2}$



# Верно ли равенство

$$а)\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3};$$

$$б)\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4};$$

$$в)\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{\pi}{6};$$

$$г)\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11\pi}{6};$$

$$д)\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3\pi}{4}.$$

$$е)arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

# Имеет ли смысл выражение:

а) $\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$; б) $arcsin2$;

в) $\arcsin\left(\sqrt{2}-1\right)$; г) $\arccos\sqrt{3}$;

д) $arctg5$; е) $arctg\,(-\sqrt{3})$

$\arcsin a = \frac{5\pi}{6}$

$\arcsin a = \frac{5\pi}{6}$



# «Верно - неверно».

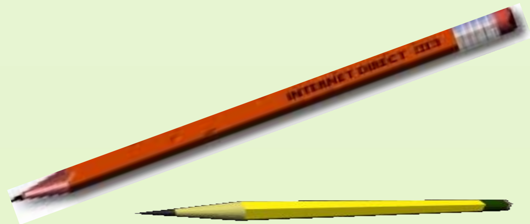
1) sin2x+cos2x=1 – основное тригонометрическое тождество?
2) [-1;1] – область значения функций sinx и cosx?
3) tg t = sin t/cos t   - верно?
4) arcsin3 – имеет смысл?
5) arcsin(-2) – имеет
6) tg x- периодическая функция ?
7) sinx – четная функция?
8) ctgx – нечетная функция?
9) arctg(-2) – имеет смысл?
10) arcsin a = 150°

# «Верно - неверно»
# ОТВЕТЫ

1) нет
2) да
3) да
4) нет
5) нет
6) да
7) нет
8) да
9) да
10) нет

***Определение.***

- **Уравнения вида $f(x) = a$, где $a$ – данное число, а $f(x)$ – одна из тригонометрических функций, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.**




# Решение простейших тригонометрических уравнений.

## *Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения нужно*

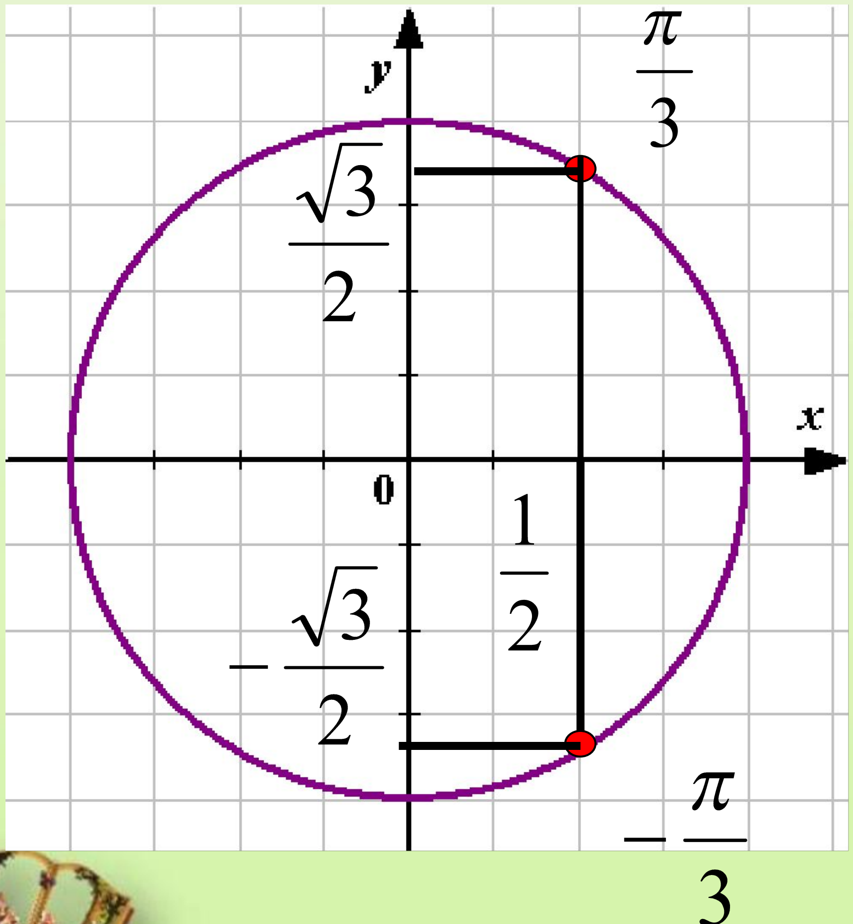
1) уметь отмечать точки на числовой окружности;

2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;

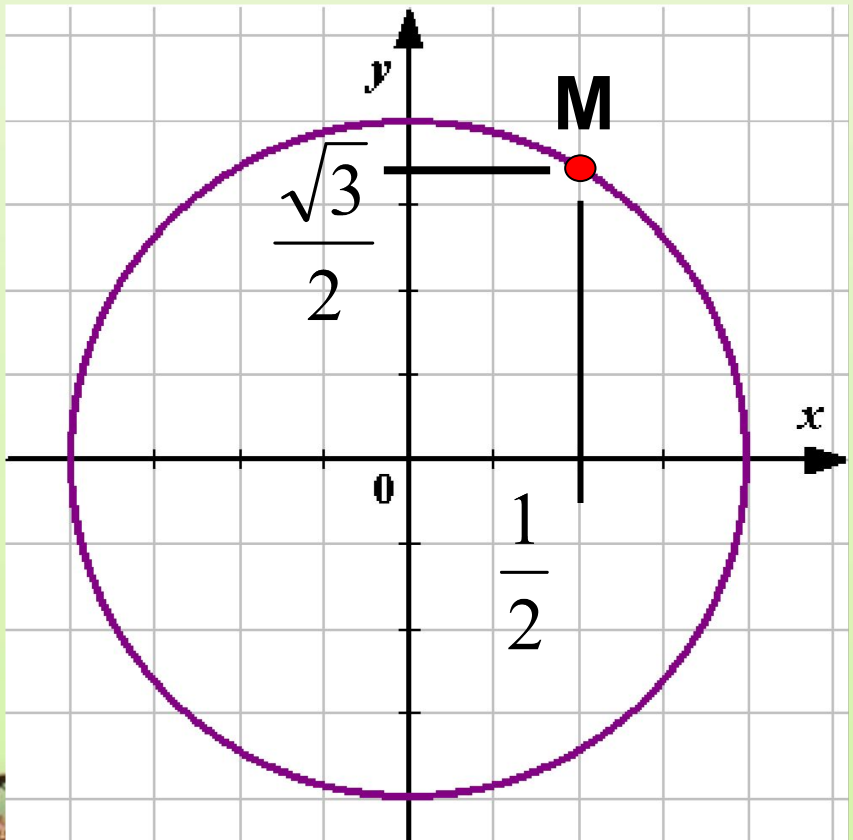
3) знать свойства основных тригонометрических функций;

4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.

# 1. Найти координаты точки М, лежащей на единичной окружности и соответствующей числу



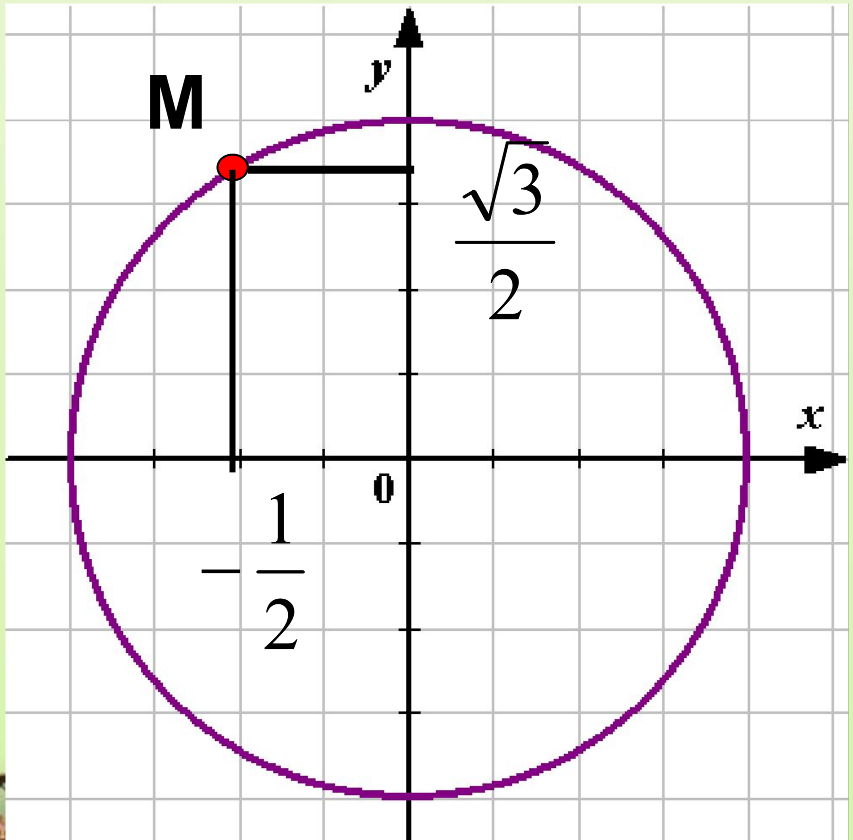
**2. Дана точка М с абсциссой ½. Найдите ординату этой точки; укажите три угла поворота, в результате которых начальная точка (1;0) переходит в точку М**




$$\frac{\pi}{3} \qquad \frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}$$

### 3. Дана точка М с абсциссой -½. Найдите ординату этой точки; укажите три угла поворота, в результате которых начальная точка (1;0) переходит в точку М

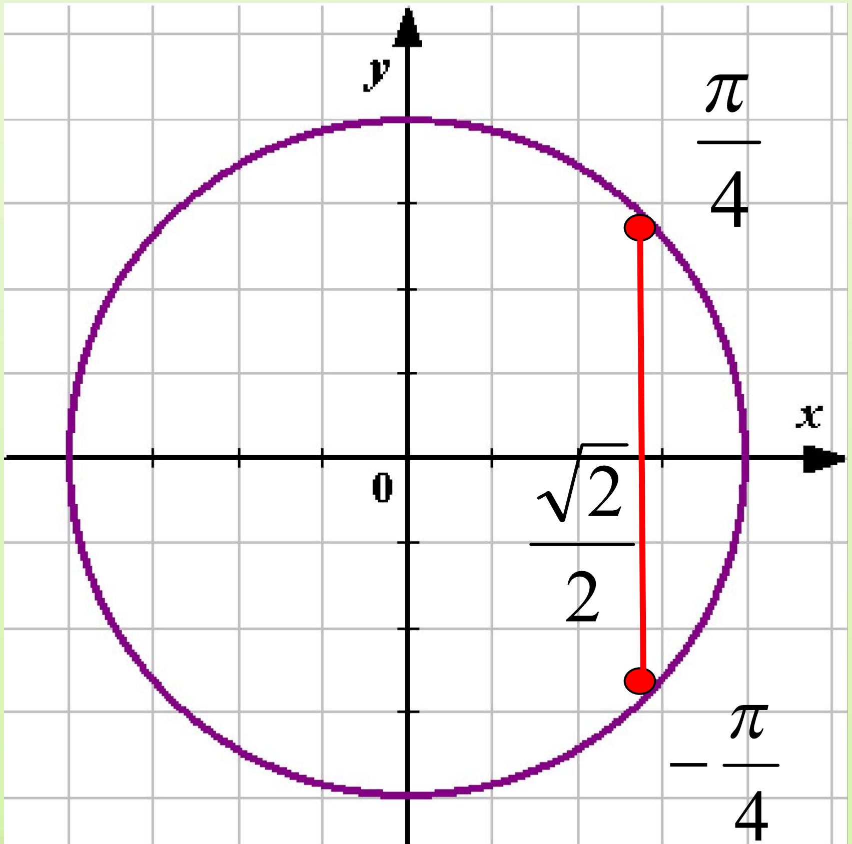



$$\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{8\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3}+8\pi=\frac{26\pi}{3}$$

# Решите уравнение

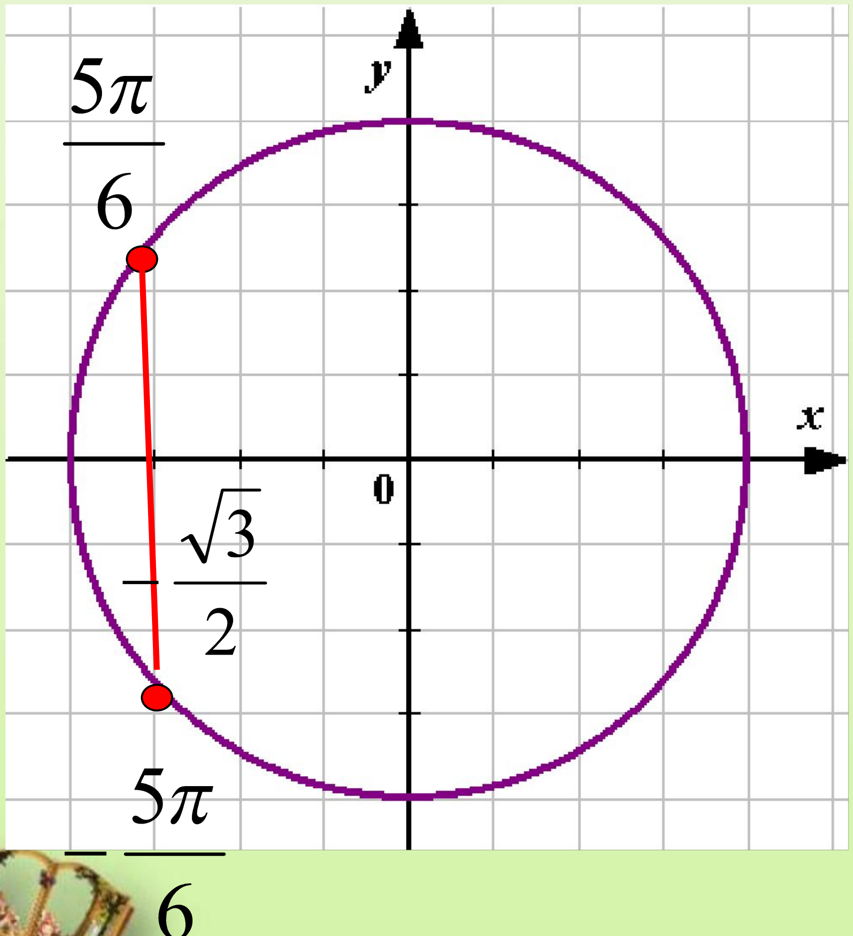



$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$$

# Решите уравнение



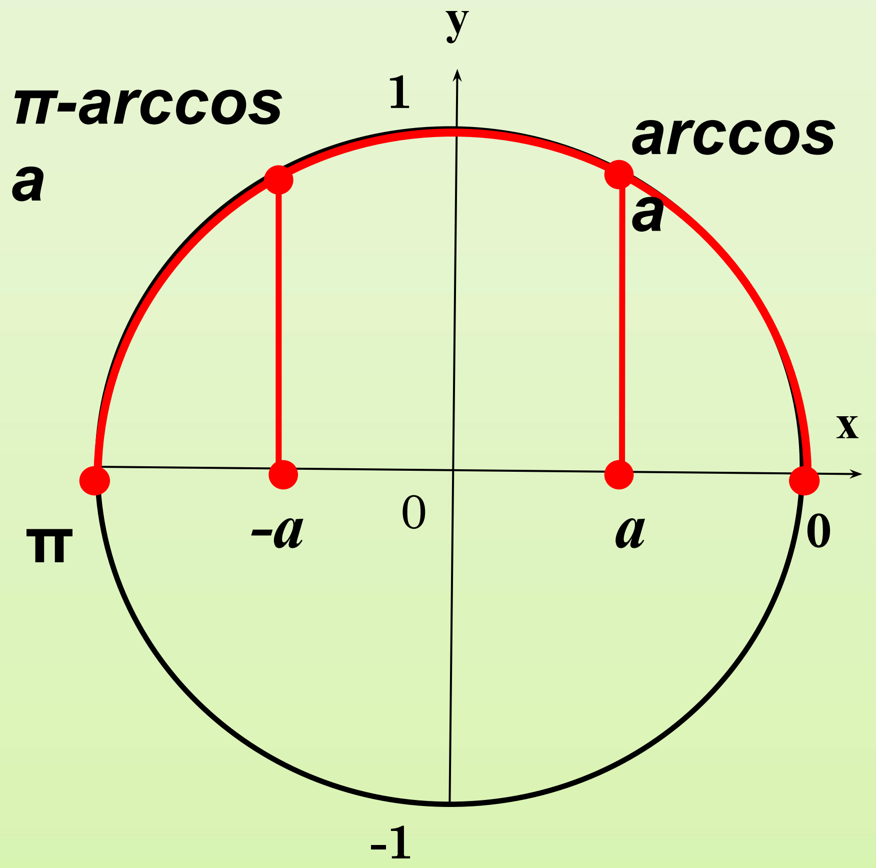

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$$

# Арккосинус и решение уравнений cos x=a.

**Арккосинусом числа *a* называют такое <u>число</u> из промежутка [0;π ], *косинус которого равен a***

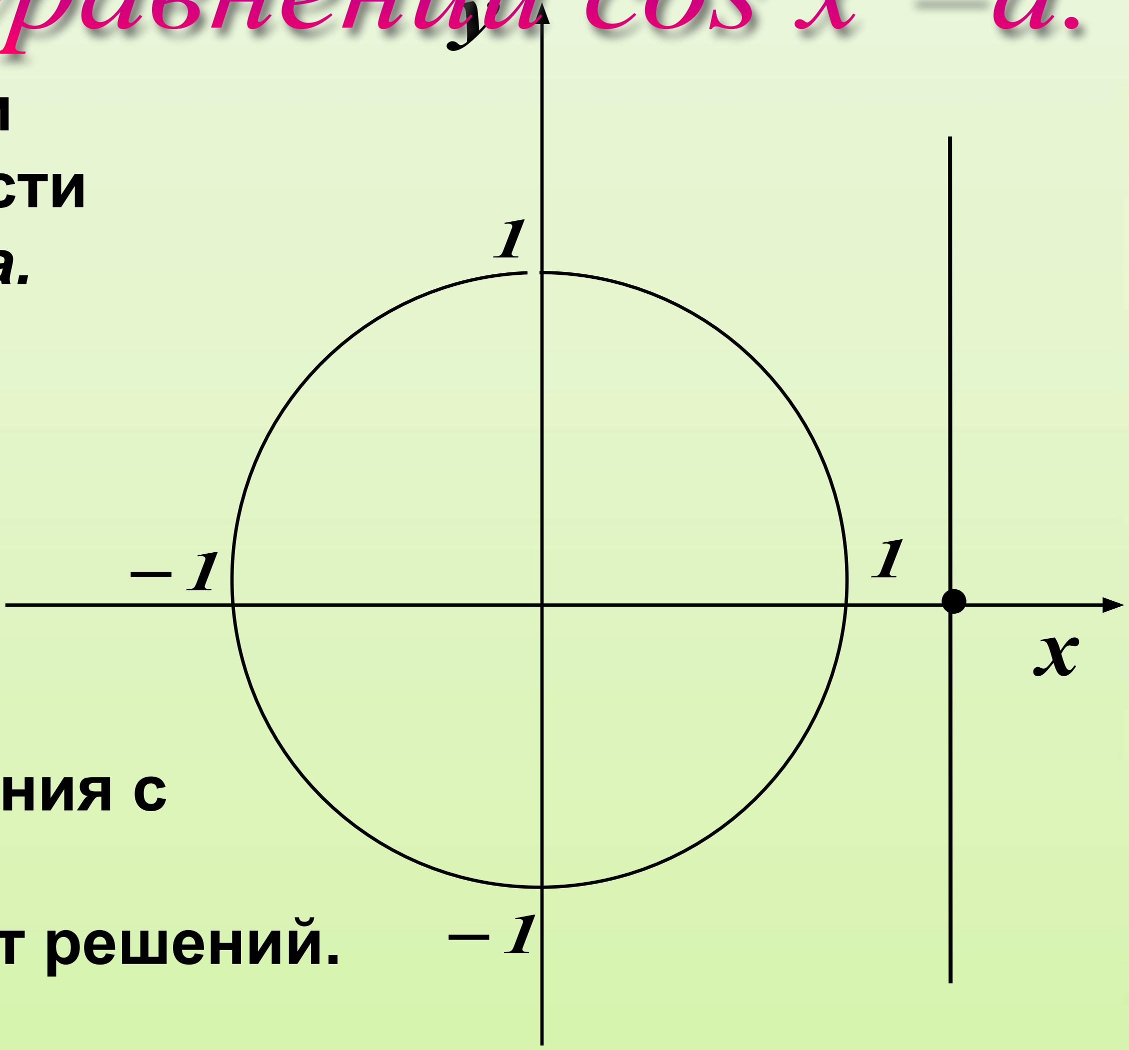



**arccos (-a)= π -arccos a**

# Решение уравнений cos x =a.

**Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a.***

**1)** $|a| > 1$




**Нет точек пересечения с окружностью.**
**Уравнение не имеет решений.**

# Решение уравнений cos x =a.

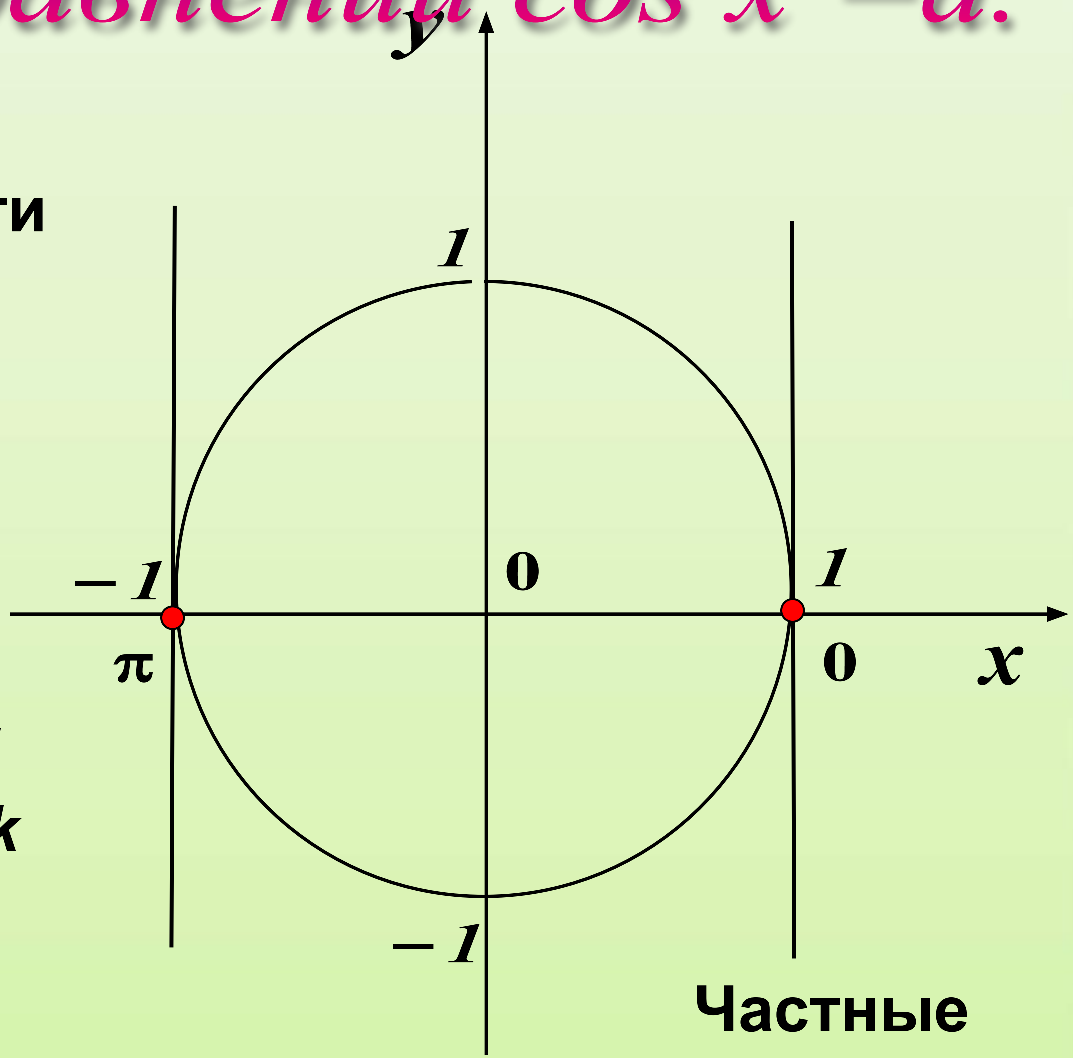
**Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a.***

**2)** $|a| = 1$

***cos x = 1***
***x = 2πk***

***cos x = -1***
***x = π+2πk***

$\kappa \in Z$




**Частные решения**

# Решение уравнений cos x =a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a.*

3) ***a = 0***

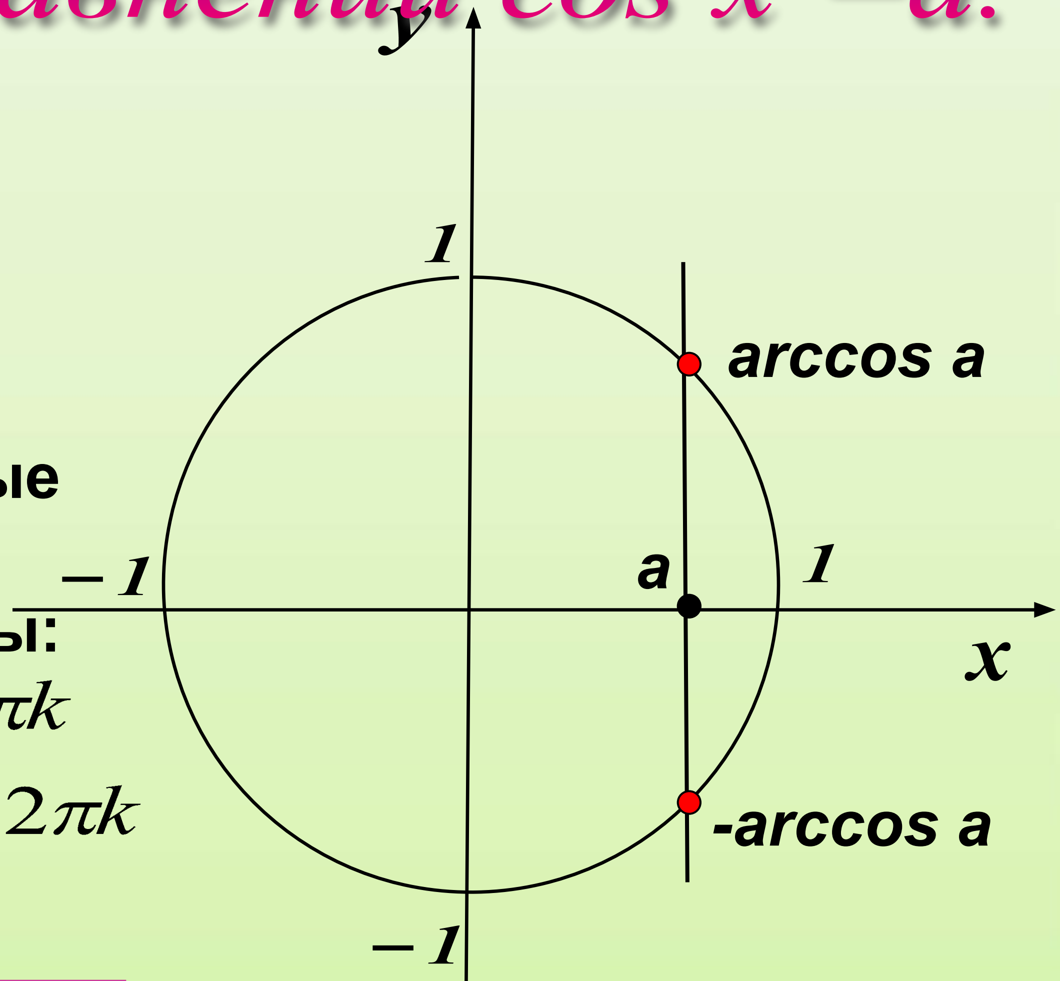
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in Z$$


Частное решение

# Решение уравнений cos x =a.

**Решим при помощи числовой окружности уравнение *cos x = a*.**

**4)** $|a| < 1$




**Корни, симметричные относительно Ox могут быть записаны:**

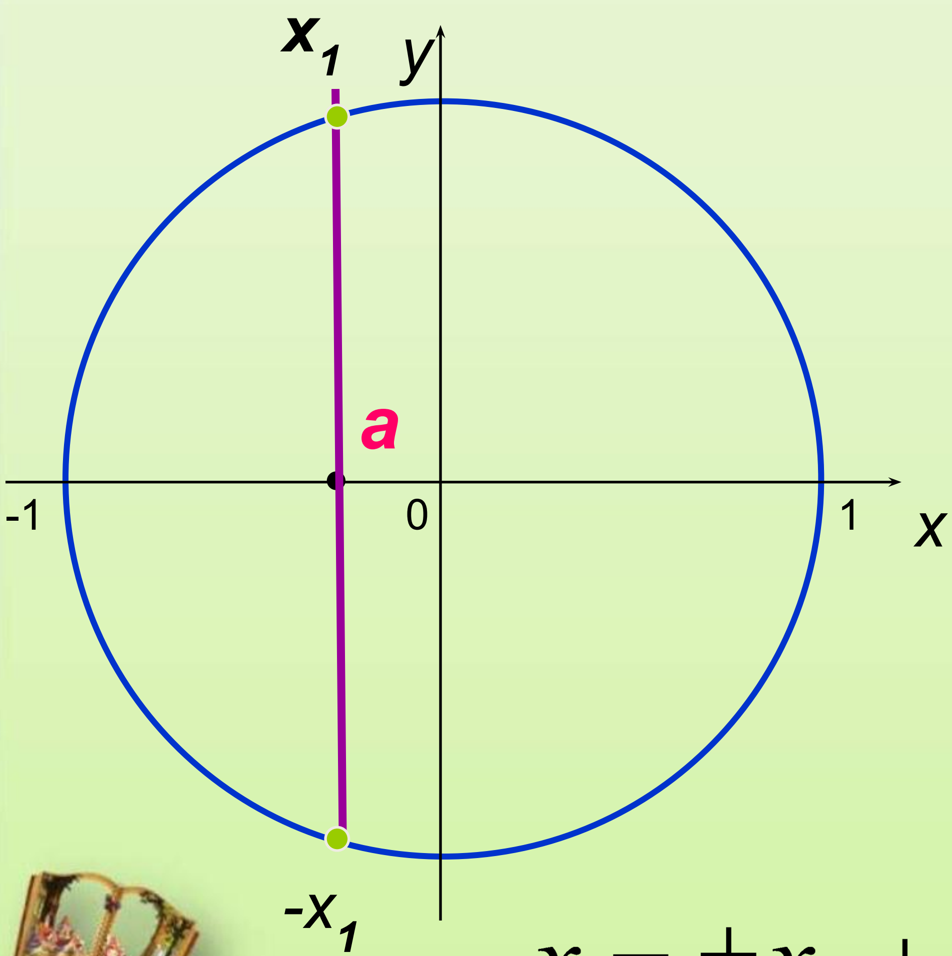
$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi k \\ -\arccos a + 2\pi k \end{array}\right.$$

**или**

$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi k}$ **Общее решение**

# Уравнение $\cos x = a$ называется простейшим тригонометрическим уравнением

**Решается с помощью единичной окружности**




1. Проверить условие $|a| \le 1$
2. Отметить точку *a* на оси абсцисс (линии косинусов)
3. Провести перпендикуляр из этой точки к окружности
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные числа– решения уравнения $\cos x = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

$$x = \pm x_1 + 2\pi n \qquad n \in Z$$

# Уравнение cos t = a

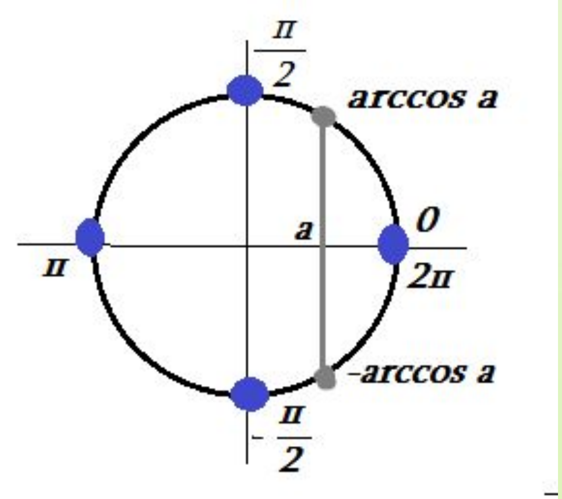
- а) при **-1< t < 1** имеет две серии корней

  $t_1$ = ***arccos*** **a + 2πk, k є Z**

  $t_2$ = **- *arccos* a + 2πm, m є Z.**

  Эти серии можно записать так

  **t = ± *arccos* a + 2πn, n є Z ;**




- б) при **a = 1** имеет одну серию решений

  **t = 2πn, n є Z** ;

- в) при **a = -1** имеет одну серию решений

  **t = π + 2πn, n є Z** ;

- г) при **a = 0** имеет две серии корней

  $t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k є Z

  $t_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, m є Z. Обе серии можно записать в одну серию

  **$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n є Z.**

  д) при a > 1 и a < -1 уравнение не имеет корней.

# Решите уравнение

1) $\cos x = \frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

# ***Решите уравнение***

**3)** cos 4x = 1

4x = 2πn, n є Z

$$x = \frac{2\pi n}{4}, n \epsilon Z$$

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \epsilon Z$$

4) $\cos\frac{x}{2} = -1$

$$\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$$

$$x = 2\pi + 4\pi n, n\epsilon Z$$

# Решите уравнение

5) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z$$

# Уравнение    $\sin t = a$

- а)  при  **-1< t < 1** имеет две серии корней

  $t_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$

  $t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$

  Эти серии можно записать так

  $t = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z;$

- б)  **при  a** = **1** имеет одну серию решений

  $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

- в)  при  **a** = **-1** имеет одну серию решений

  $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$

- г)  при  **a** = **0** имеет две серии корней

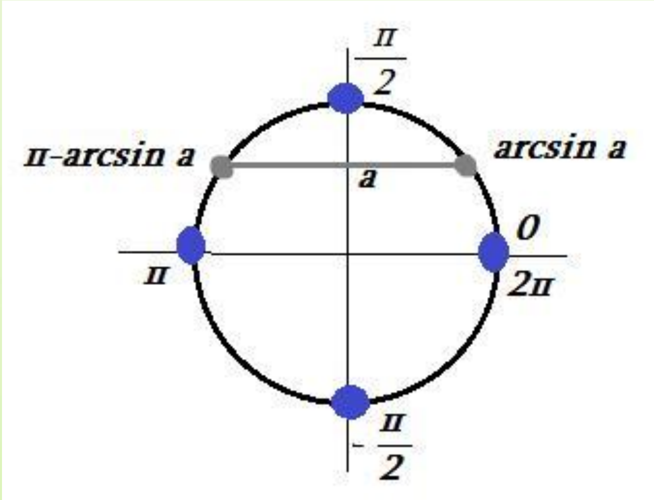
  $t_1 = 2\pi k,\ k \in Z,$

  $t_2 = \pi + 2\pi m,\ m \in Z.$

  Обе серии можно записать в одну серию

  $t = \pi n,\ n \in Z;$

- д)  при  **a > 1**  и  **a < -1**  уравнение не имеет корней.



# Решите уравнение

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

•

# Решите уравнение

2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

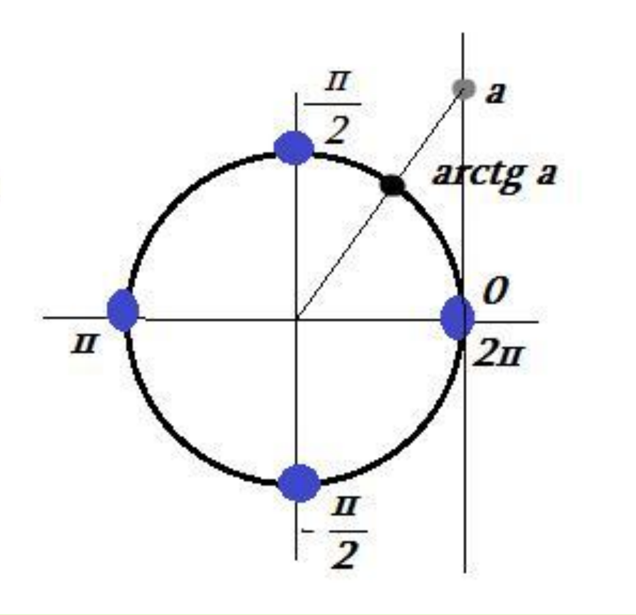
$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

# Уравнение    tg t = a

при любом ***a* є *R*** имеет одну серию решений

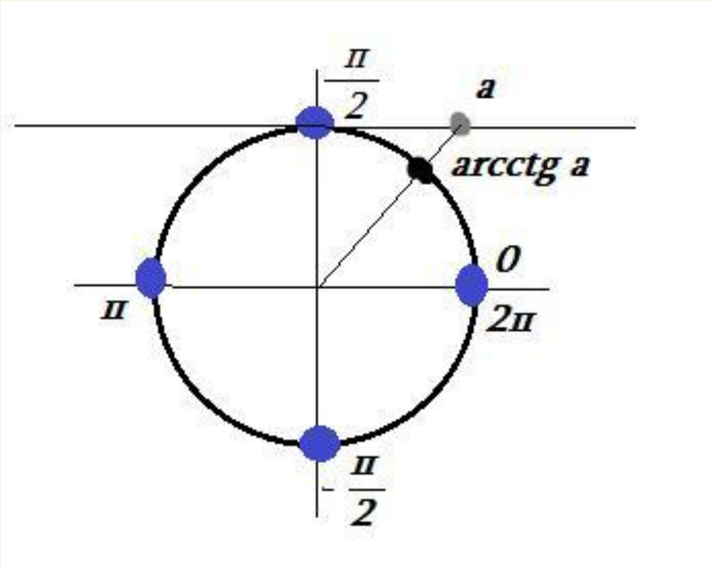
**x = arctg a + πn, nє Z.**



# Уравнение *ctg t = a*

при любом ***a є R*** имеет одну серию решений

**x = arcctg a + πn, nє Z.**



$x = \frac{\pi}{2} + \pi n_n \pi n$ $- \pi n + \pi n$

# Подводим итоги

| Значение *a* | *cos x = a* | *sin x = a* | *tg x = a* | *ctg x = a* |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert a \rvert > 1$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ |
| $\lvert a \rvert < 1$ | $x = \pm \arccos a + 2\pi n$ | $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ |
| $a = 1$ | $x = 2\pi n$ | $x = \pi/2 + 2\pi n$ | $x = \pi/4 + \pi n$ | $x = \pi/4 + \pi n$ |
| $a = -1$ | $x = \pi + 2\pi n$ | $x = -\pi/2 + 2\pi n$ | $x = -\pi/4 + \pi n$ | $x = 3\pi/4 + \pi n$ |
| $a = 0$ | $x = \pi/2 + \pi n$ | $x = \pi n$ | $x = \pi n$ | $x = \pi/2 + \pi n$ |

Продолжите фразу :

Сегодня на уроке я повторил …

Сегодня на уроке я узнал …

Сегодня на уроке я научился …