Тема 4

Алгоритмічна система рекурсивних функцій

1. Виникнення рекурсивних функцій.
2. Основні поняття теорії рекурсивних функцій.
3. Примітивно-рекурсивні функції. Частково-рекурсивні функції. Загально-рекурсивні функції. Теза Черча
4. Універсальні рекурсивні функції.
5. Примітивна рекурсивність предикатів.

1. Виникнення рекурсивних функцій

Дослідження питання уточнення поняття алгоритму привело до створення в 1930-их рр. теорії рекурсивних функцій. При цьому процес описання класу рекурсивних функцій нагадує процес побудови аксіоматичної теорії на базі деякої системи аксіом.

Спочатку були вибрані найпростіші функції, ефективна обчислюваність яких була очевидною (т.зв. «аксіоми»). Потім були сформульовані деякі правила, названі операторами, на основі яких можна побудувати нові функції із вже існуючих (т. зв. «правила виведення»).

Тоді побудованим класом функцій буде сукупність всіх функцій, отриманих з найпростіших функцій за допомогою застосування вибраних операторів.

2. Основні поняття теорії рекурсивних функцій

Побудуємо клас рекурсивних функцій, які задані на множині натуральних чисел та приймають натуральні значення. Функції будемо брати часткові, тобто визначені не для всіх значень аргументів. Серед усіх арифметичних функцій виберемо найпростіші функцій, які називають *базисними*:

1) $S(x) = x + 1$, $\forall x \in N_0$, де N_0 – множина натуральних чисел, яка крім всіх натуральних чисел містить ще і число 0.

$S(x)$ – функція слідування або додавання одиниці.

2) Нуль-функція

$O(x) = 0$, $\forall x \in N_0$.

3) Функції-проектори

$$I_m^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_m, \text{ де } 1 \le m \le n.$$

Наприклад, найпростішими є наступні функції:

$$S(7)=8,$$

$$O(5,2,9,1)=0,$$

$$I_2^3(6,9,2)=9.$$

Операції над функціями будемо називати *<u>операторами</u>*. В якості операторів, за допомогою яких будемо будувати нові функції, виберемо наступні три: оператор суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації.

Означення 1. ОПЕРАТОР СУПЕРПОЗИЦІЇ

Нехай задано функцію $f(y_1, y_2,..., y_m)$ від m змінних та m функцій від n змінних $g_1(x_1, x_2,..., x_n)$, …, $g_m(x_1, x_2,..., x_n)$.

Тоді функція $\varphi(x_1, x_2,..., x_n)$ від n змінних, отримується з функцій f, g_1, ..., g_m, за допомогою оператора суперпозиції, якщо для всіх $x_1, x_2,..., x_n$ справедлива рівність

$$\varphi(x_1, x_2,..., x_n) = f\left(g_1(x_1, x_2,..., x_n), ..., g_m(x_1, x_2,..., x_n)\right).$$

Символічно оператор суперпозиції позначають так:

$$\varphi = S^{m+1}(f, g_1,..., g_m),$$

де $m+1$ – кількість функцій.

Приклад.

а) Нехай $g(x)=0$, $f(x)=x+1$. Записати $S^2(f,g)-?$

Тоді

$$S^2(f,g)=f(g(x))=1;$$

$$S^2(f,f)=f(f(x))=(x+1)+1=x+2.$$

б) Суперпозицією трьох функцій-проекторів I_2^2, I_1^3, I_2^3 є наступна функція:

$$S^3(I_2^2,I_1^3,I_2^3)=I_2^2(x_1,x_2)=x_2.$$

Оператор S^{m+1} визначений тоді і тільки тоді, коли функції g_1, ..., g_m мають однакову кількість аргументів, а f є m-місною.

У випадку суперпозиції функцій з різною кількістю аргументів за допомогою функцій-проекторів вводять фіктивні змінні.

Приклад оператора суперпозиції. Функцію двох змінних $f(x_1, x_2)$ можна представити за допомогою оператора суперпозиції у вигляді функції від трьох змінних, одна з яких є фіктивною:

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, x_3) = f\left(I_1^3(x_1, x_2, x_3), I_2^3(x_1, x_2, x_3)\right).$$

<u>Теорема 1.</u> Якщо функції $f(x_1,...,x_m)$, $g_1(x_1,x_2,...,x_n),\dots,$ $g_m(x_1,x_2,...,x_n)$ **правильно обчислювані за Тюрінгом, то правильно обчислюваною є і складна функція (суперпозиція функцій)**

$$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=f\big(g_1(x_1,x_2,...,x_n),\ ...,\ g_m(x_1,x_2,...,x_n)\big).$$

Означення 2. ОПЕРАТОР ПРИМІТИВНОЇ РЕКУРСІЇ

Нехай задано функцію $f(x_1,...,x_n)$ від n змінних та функцію $g_1(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$ від $n+2$ змінних.

Тоді функцію $\varphi(x_1,...,x_n,y)$ від $n+1$ змінних отримують за допомогою оператора примітивної рекурсії з функцій f та g, якщо для будь-яких $x_1,...,x_n,y$ справедливі рівності, які називають *схемою примітивної рекурсії*

$$\begin{cases} \varphi(x_1,...,x_n,0) = f(x_1,...,x_n); \\ \varphi(x_1,...,x_n,y+1) = g(x_1,...,x_n,\ y,\ \varphi(x_1,...,x_n,y)). \end{cases}$$

У випадку одномісної функції φ (при $n=0$) маємо:

$$\begin{cases} \varphi(0) = k, \\ \varphi(y+1) = g(y,\varphi(y)). \end{cases}$$

де k – фіксоване ціле невід'ємне число.

Символічно оператор примітивної рекурсії позначають так: $\varphi = R(f, g)$ – у випадку, коли функція φ отримують з функцій f та g; та $\varphi = R(g)$ – у випадку, коли при $n = 0$ функція φ отримують з однієї лише функції g.

Зауважимо, що незалежно від числа аргументів в функції φ, рекурсія відбувається тільки по одній змінній y. Решта n змінних $x_1, \dots, x_n$ на момент застосування схеми примітивної рекурсії зафіксовані і відіграють роль параметрів. Крім того, схема примітивної рекурсії виражає кожне значення обчислюваної функції φ не тільки через задані функції f та g, але і через так звані попередні значення обчислюваної функції φ: перш ніж отримати значення $\varphi(x_1, \dots, x_n, i)$, необхідно провести $i+1$ обчислення по заданій схемі для $y = 0, 1, \dots, i$.

Означення 3. ОПЕРАТОР МІНІМІЗАЦІЇ (μ-оператор)

Нехай задано функції $f_1(x_1,\ldots,x_n,y)$ та $f_2(x_1,\ldots,x_n,y)$ від $n+1$ змінних.

Тоді функцію $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ від n змінних отримують за допомогою оператора мінімізації, або оператора найменшого значення, якщо для будь-яких $x_1,x_2,\ldots,x_n,y$ рівність $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=y$ виконується тоді і тільки тоді, коли значення $f_i(x_1,\ldots,x_n,0),\ldots,$ $f_i(x_1,\ldots,x_n,y-1)$, $i=\overline{1,2}$ визначені попарно і нерівні:

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,0)\neq f_2(x_1,\ldots,x_n,0),\ \ldots,$$

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,y-1)\neq f_2(x_1,\ldots,x_n,y-1),$$

і рівні, коли

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,y)=f_2(x_1,\ldots,x_n,y).$$

Інакше кажучи, величина $\varphi(x_1,..., x_n)$ дорівнює найменшому значенню аргументу y, при якому виконується остання рівність.

Оператор мінімізації ще також називають μ-оператором і позначають наступним чином:

$$\varphi(x_1,..., x_n) = \mu_y\big(f_1(x_1,...,x_n,y) = f_2(x_1,..., x_n, y)\big), \text{ або } \varphi = \mu(f).$$

Можливий випадок, коли $f_2 = 0$. Тоді маємо

$$\varphi(x_1,..., x_n) = \mu_y\big(f(x_1,...,x_n,y) = 0)\big).$$

Приклад оператора мінімізації.

Нехай задано функцію

$$f(x,y)=x\dot{-}y=\begin{cases}x-y, \text{ якщо } x\geq y,\\ 0, \text{ якщо } x<y.\end{cases}$$

Неважко бачити, що тоді функція $\varphi(x)$, яку отримують з функції $f(x,y)$ за допомогою оператора мінімізації, буде наступною: $\varphi(x)=x$.

3. Примітивно-рекурсивні функції. Частково-рекурсивні функції. Загально-рекурсивні функції. Теза Черча

<u>Означення.</u> **Функція φ називається *примітивно-рекурсивною*, якщо її можна отримати з найпростіших, тобто базисних функцій, $O(x), S(x), I_m^n$ за допомогою застосування скінченного числа операторів підстановки та примітивної рекурсії.**

Тобто, якщо існує така скінченна послідовність функцій φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, для яких $\varphi_n = \varphi$ і для кожного $i = \overline{1,n}$ функція φ_i або базисна, або може бути отримана з деяких попередніх функцій безпосередньо за допомогою застосування операторів підстановки або примітивної рекурсії.

<u>Означення.</u> Функція φ називається *часткова-рекурсивною*, якщо її можна отримати з базисних функцій $O(x), S(x), I_m^n$ за допомогою застосування скінченного числа операторів суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації.

<u>Означення.</u> Функція φ називається *загально-рекурсивною*, якщо вона визначена у всій області, а також є частково рекурсивною.

Зауважимо, що кожна примітивно рекурсивна функція є в той же час і загально рекурсивною. Однак ці два класи функцій не збігаються. Існують загально рекурсивні функції, які не є примітивно рекурсивними.

Поняття частково-рекурсивної функції – одне з головних понять теорії алгоритмів. Значення його полягає в наступному:

1. **Кожну частково-рекурсивну функцію можна обчислити за допомогою певної процедури механічного характеру (алгоритму);**
2. **Які б класи точно визначених алгоритмів не будували, у всіх випадках неодмінно виявляли, що числові функції, обчислювані за алгоритмами цих класів, є частково-рекурсивними.**

Подібно до тези Тюрінга в теорії рекурсивних функцій існує гіпотеза, яку ще називають тезою Черча:

> ***«Числова функція є обчислюваною алгоритмічно або за допомогою машини тоді і тільки тоді, коли вона є частково рекурсивною».***

Теорема. *Функція, отримана за допомогою оператора суперпозиції з примітивно рекурсивних функцій, є примітивно рекурсивною.*

Доведення: Дійсно, компоненти заданої функції отримані з базисних функцій $O(x), S(x), I_m^n$ за допомогою застосування скінченного числа операторів суперпозиції та примітивної рекурсії. Щоб отримати функцію, яку розглядаємо, потрібно добавити ще одну суперпозицію. В результаті дана функція також отримується із базисних застосуванням скінченного числа операторів суперпозиції та примітивної рекурсії, тобто є примітивно-рекурсивною. Теорема доведена.

<u>Приклад</u>: Покажемо, як виходячи із базисних функцій за допомогою оператора примітивної рекурсії отримати функцію $\varphi(x, y) = x + y$.

Для даної функції справедливі наступні рівності:

$$\begin{cases} x + 0 = x, \\ x + (y+1) = (x+y) + 1, \end{cases}$$

які можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x, \\ \varphi(x, y+1) = \varphi(x, y) + 1, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = I_1^1(x), \\ \varphi(x, y+1) = S(\varphi(x, y)). \end{cases}$$

Це і є схема примітивної рекурсії, що базується на найпростіших функціях I_1^1 та S.

Або:

$$\varphi(x,0) = f(x) = x + 0 = x = I_1^1(x)$$

$$\varphi(x, y+1) = g(x, y, \varphi(x, y)) = S(I_3^3(x, y, z)) = z + 1 = S(\varphi(x, y))$$

$$\varphi(x,0) = x,$$

$$\varphi(x,1) = g(x,0,\varphi(x,0)) = g(x,0,x) = x + 1,$$

$$\varphi(x,2) = g(x,1,\varphi(x,1)) = g(x,1,x+1) = x + 2,$$

$$\varphi(x,3) = g(x,2,\varphi(x,2)) = g(x,2,x+2) = x + 3,$$

....

Приклад: Аналогічно операції додавання очевидне співвідношення для операції множення.

$$\varphi(x, y) = x \cdot y$$

$$\varphi(x,0) = f(x) = x \cdot 0 = 0 = O(x),$$

$$\varphi(x, y+1) = g(x, y, \varphi(x, y)) = x + \varphi(x, y) = xy + x = S(x, \varphi(x, y)),$$

$$\varphi(x,1) = g(x,0,0) = x + \varphi(x,0) = x + 0 = x,$$

$$\varphi(x,2) = g(x,1,x) = x + \varphi(x,1) = x + x = 2x,$$

$$\varphi(x,3) = g(x,2,2x) = x + \varphi(x,2) = x + 2x = 3x$$

<u>Приклад:</u> **Покажемо, як виходячи із найпростіших функцій за допомогою оператора примітивної рекурсії отримати**

$$f(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ якщо } x \geq y, \\ 0, \text{ якщо } x < y. \end{cases}$$

По-перше, розглянемо функцію $x - 1$, яку отримують із функції $f(x,y) = x \dot{-} y$ фіксуванням другого аргументу і задовольняє наступні співвідношення:

$$x \dot{-} 0 = 0 = O(x),$$
$$(x+1) \dot{-} 1 = x = I_1^1(x).$$

По-друге, задана функція задовольняє наступні рівності:

$$x \dot{-} 0 = x = I_1^1(x),$$
$$x \dot{-} (y+1) = (x - y) \dot{-} 1 = \varphi(x,y) \dot{-} 1.$$

4. Універсальні рекурсивні функції

Поняття класів примітивно-рекурсивних, частково-рекурсивних та загально-рекурсивних функцій можна записати як наступні співвідношення:

$$K_{п.р.} \subset K_{з.р.} \subset K_{ч.р.}$$

У кожній універсальній алгоритмічній системі повинен існувати універсальний алгоритм, еквівалентний довільному, наперед заданому алгоритму. Як доведено раніше, для системи НАМ та МТ такий алгоритм існує. Розглянемо питання про існування універсальних функцій для класів примітивно-, загально- та частково-рекурсивних функцій ($K_{п.р.}$, $K_{з.р.}$, $K_{ч.р.}$).

<u>Означення.</u> **Часткову $(n+1)$-місну функцію $\varphi_u(x_0, x_1, ..., x_n)$ називається *універсальною* для сім'ї σ всіх n-місних часткових функцій, якщо виконуються наступні умови:**

1. **для кожного фіксованого числа i n-місна функція $\varphi_u(i, x_1, ..., x_n)$ належить σ;**
2. **для кожної функції $f(x_1, ..., x_n)$ з σ існує таке число i, що для всіх $x_1, ..., x_n$ справедливе співвідношення**

$$\varphi_u(i, x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n).$$

Іншими словами, функція φ_u є універсальною для сім'ї σ, якщо всі функції з σ можна розташувати у наступній послідовності:

$$\varphi_u(0, x_1, ..., x_n),\ \varphi_u(1, x_1, ..., x_n), \ldots,\ \varphi_u(i, x_1, ..., x_n),\ \ldots .$$

Число i називають *номером функції* φ_u.

У теорії рекурсивних функцій доведені наступні три теореми:

<u>Теорема 1:</u> Для всіх $n = 1, 2, \dots$ система всіх n-місних примітивно-рекурсивних функцій не містить примітивно рекурсивної універсальної функції.

<u>Теорема 2:</u> Система всіх n-місних загально-рекурсивних функцій не містить загально-рекурсивної універсальної функції $(n = 1, 2, \dots)$.

<u>Теорема 3</u>: Для кожного $n = 1, 2, \dots$ клас всіх n-місних примітивно-рекурсивних функцій містить $(n+1)$-місну загально-рекурсивну універсальну функцію.

Наступна теорема є головним результатом теорії частково-рекурсивних функцій і аналогом теореми Маркова про УНА.

<u>Теорема 4</u>: Для кожного $n = 1, 2, \dots$ існує частково-рекурсивна функція $\varphi_u^{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ універсальна для класу всіх n-місних частково-рекурсивних функцій.

5. Примітивна рекурсивність предикатів

<u>**Означення.**</u> **Нехай заданий n-місний предикат $P(x_1,\dots,x_n)$ на деяких множинах $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n$.**

Характеристичною функцією **даного предиката називають функцію, задану на тих же множинах $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n$ і яка приймає значення 0 або 1**

$$\chi_p(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{якщо висловлювання } P(x_1,\dots,x_n) \text{ хибне;}\\ 1, & \text{якщо висловлювання } P(x_1,\dots,x_n) \text{ істина.}\end{cases}$$

Ми розглядатимемо функцію χ_p у випадку, коли $M_1=M_2=M_3=\dots=M_n=N$ (N – натуральні числа).

<u>Означення.</u> **Предикат** $P(x_1,...,x_n)$ **називається** ***примітивно-рекурсивним***, **якщо його характеристична функція** χ_p – **примітивно-рекурсивна.**

Досить часто, особливо в теорії алгоритмів, функції задають за допомогою ***оператора умовного переходу***. **Даний оператор по заданих функціях** $f_1(x_1,...,x_n)$, $f_2(x_1,...,x_n)$ **та предикатові** $P(x_1,...,x_n)$ **будує функцію** φ:

$$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n), \text{ якщо } P(x_1,...,x_n) - \text{істина}; \\ f_2(x_1,...,x_n), \text{ якщо } P(x_1,...,x_n) - \text{хибно.} \end{cases}$$

Так, наприклад, за допомогою характеристичної функції предиката P та його заперечення $\neg P$ функцію φ можна виразити наступним чином:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n)\chi_P(x_1, \dots, x_n) + f_2(x_1, \dots, x_n)\chi_{\neg P}(x_1, \dots, x_n).$$

<u>Теорема:</u> Якщо функції f_1, f_2 та предикат P примітивно-рекурсивні, то функція φ, побудована з функцій f_1, f_2 та P за допомогою оператора умовного переходу, є примітивно-рекурсивною. Тобто оператор умовного переходу є примітивно-рекурсивним.

Оператор умовного переходу може мати і багатозначний характер, тобто визначатись скінченним набором предикатів P_1, P_2, …, P_k, з яких істинним є завжди один і тільки один предикат. В даному випадку оператор умовного переходу є також примітивно-рекурсивним, оскільки його можна представити в наступному вигляді:

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1\chi_{P_1} + f_2\chi_{P_2} + ... + f_k\chi_{P_k}.$$

У випадку, коли жоден із предикатів P_1, P_2, …, P_k не є істинним, маємо $\varphi = 0$. Таким чином, можна довести примітивну рекурсивність функцій, заданих на скінченних множинах, оскільки всі функції можна задати за допомогою оператора умовного переходу.

Однак, при цьому функції потрібно буде довизначити за допомогою якоїсь константи на тих натуральних числах, на яких функція невизначена.