Логика и основы алгоритмизации инженерных задач

Митрохин Максим Александрович

кафедра Вычислительная техника

Ссылка на совместный конспект лекций:

https://docs.google.com/document/d/1dgUPYSSuKU8gDo1hOPt9guR7nawdjwxoBXXeaACQOVc/edit

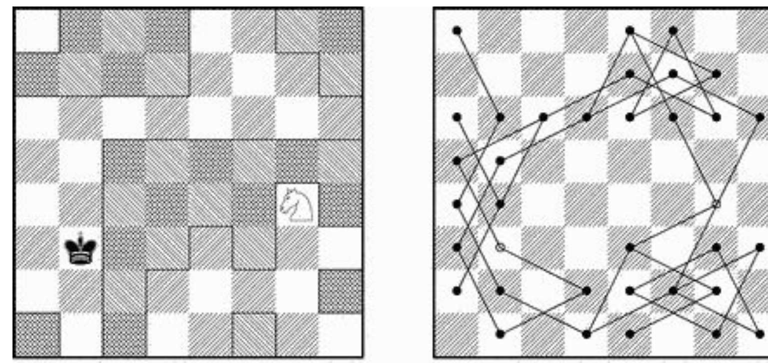
Место предмета в структуре знаний разработчика ВТ

Основные понятия о графах

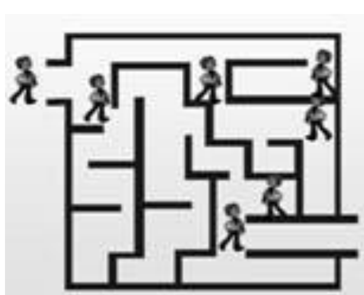
Геометрическое определение: Граф G — фигура, состоящая из заданных точек (вершин), соединенных отрезками, которые, называются ребрами (дугами) графа G.

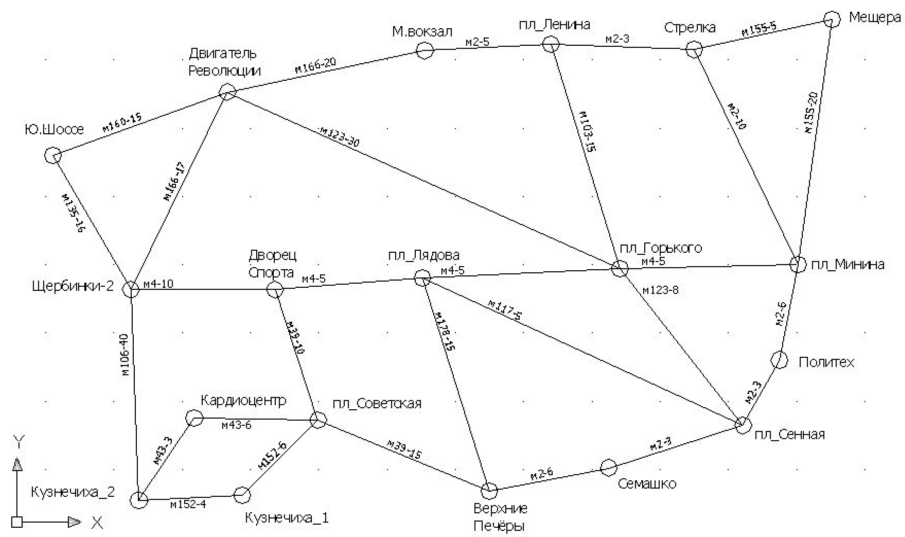
Используется для отображения связей между элементами предметной области или задания последовательности действий.

1. Можно составить граф любой **позиционной игры**: шахмат, шашек, «крестиков – ноликов». Позиции (названия клеток) - вершины, а ребра - ходы.

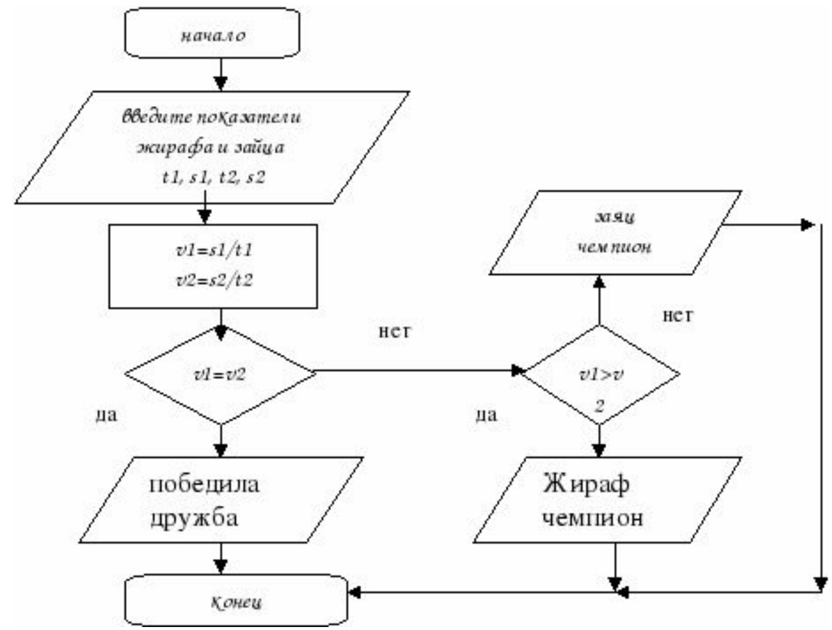


2. Задание маршрутов. Например, в лабиринте вершины - тупики, а ребра – проходы. В навигации вершины – пункты (адреса), ребра – дороги их соединяющие.

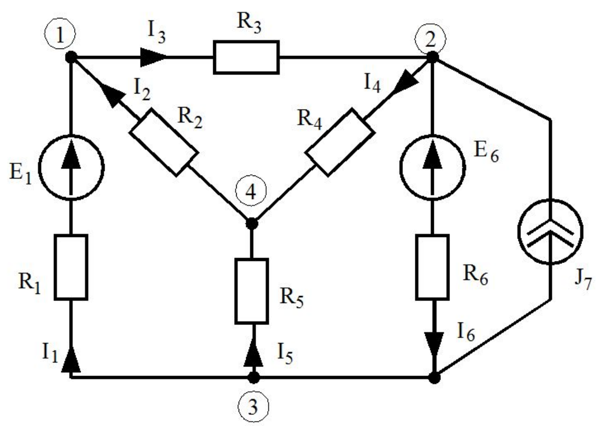


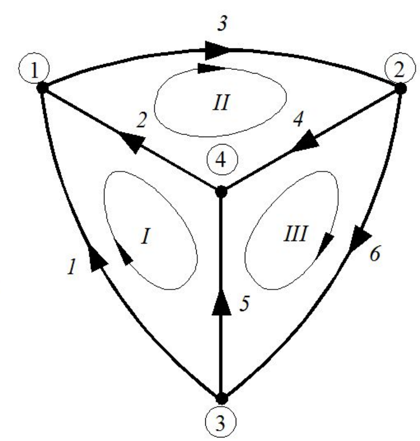


3. Блок-схема программы. Операторы – вершины, последовательность выполнения задаётся рёбрами.



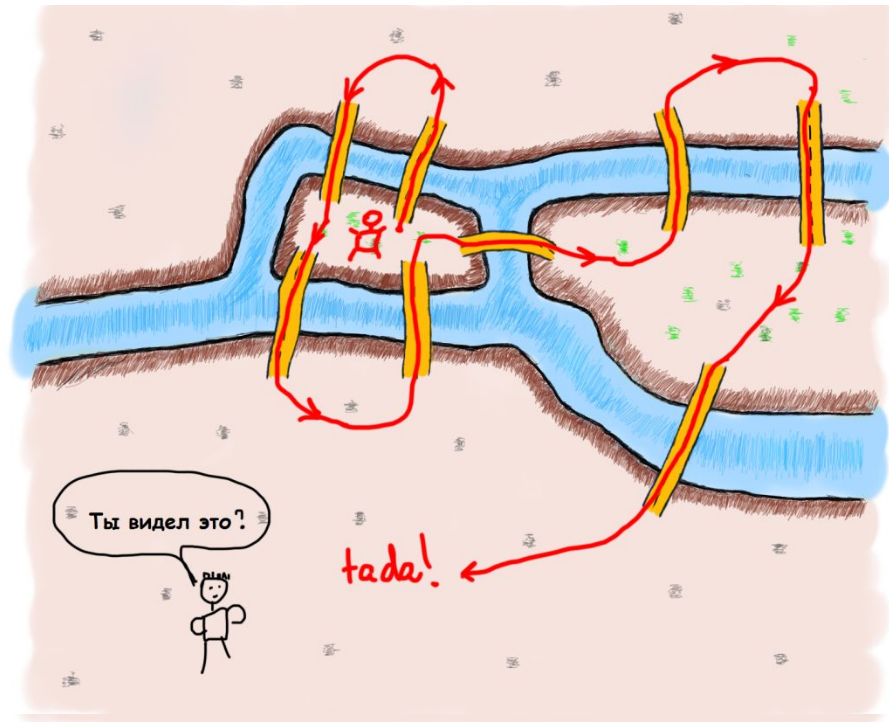
4. Электрические цепи.





Основы теории графов заложил математик Эйлер решая задачу семи мостов Кенигсберга (Калининграда).

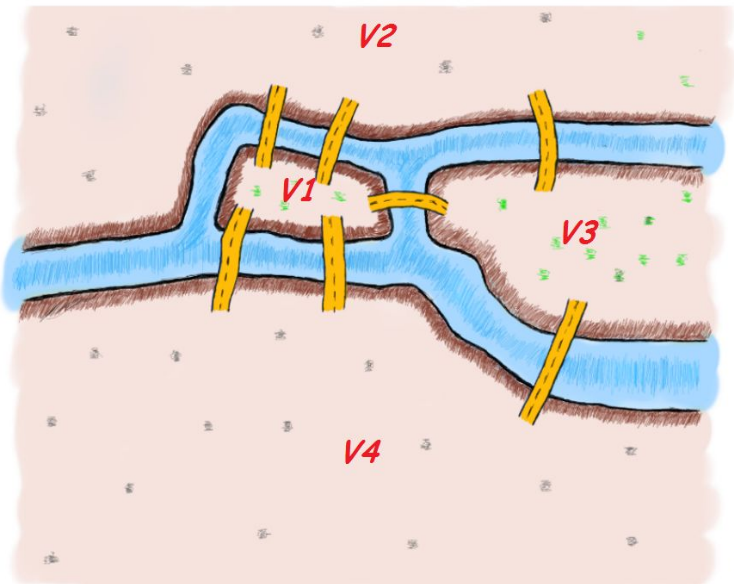
В Калининграде было семь мостов, соединяющих два больших острова, окруженных рекой Преголя, и две части материка, разделенные той же рекой.

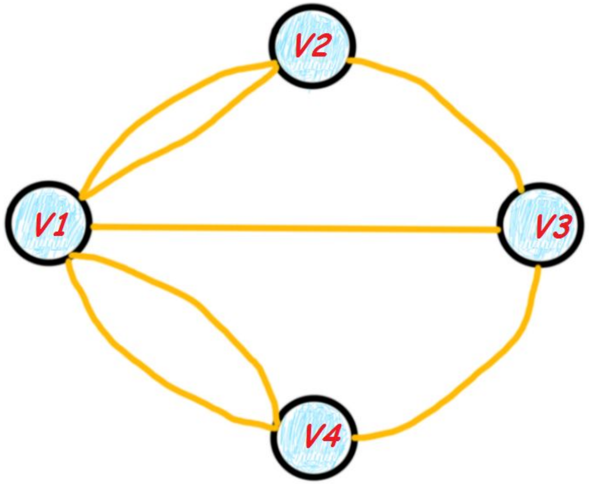


Задача состояла в том, что необходимо было найти такой маршрут, который проходил через каждый мост ровно один раз.
Т.е. непосещённых мостов быть не должно и пройти по каждому мосту можно только один раз.

Для одного участка земли, в случае чётного количества мостов всегда можно покинуть землю, а в случае нечётного – нет.
Заходя на землю по одному мосту, всегда можно её покинуть, пройдя по второму мосту. Но, когда появляется третий мост, вы не сможете покинуть землю, как только войдёте в нее.

В математике, **графом** называют пару (**V**, **E**) где **V** это множество **вершин**, а **E** множество пар, каждая из которых представляет собой связь (эти пары называют **рёбрами**).





Инцидентность

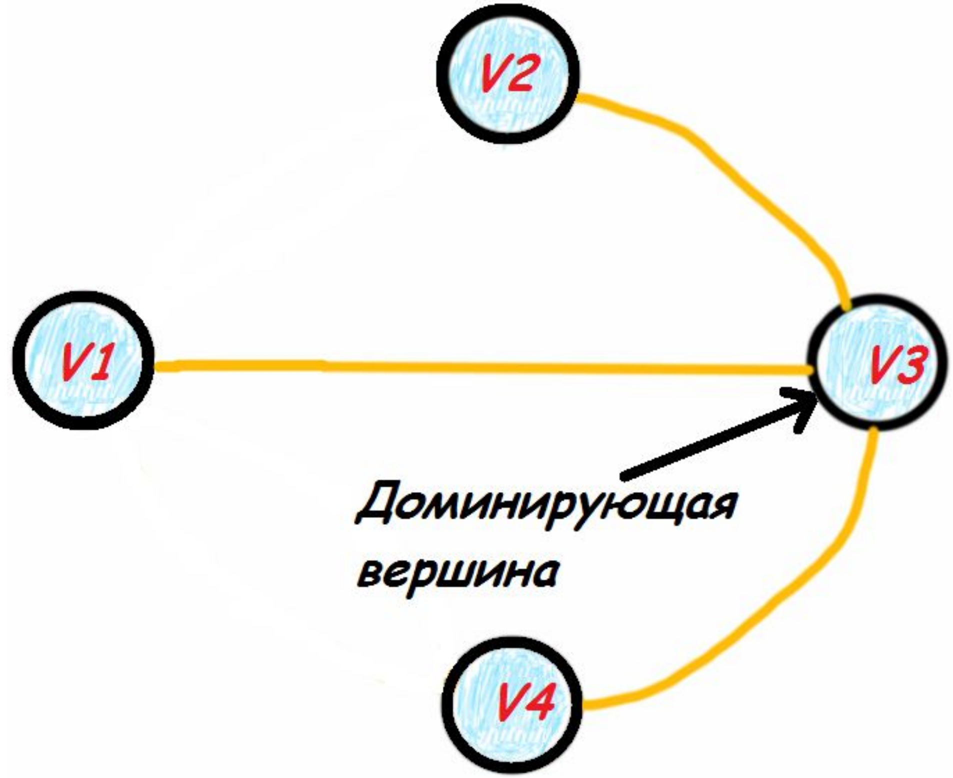
Пусть *V1* и *V2* - вершины тогда пара *E1*(*V1, V2*) – ребро соединяющее их. Вершина и ребро **инцидентны**, если ребро соединено с вершиной.

Вершина *V1* и ребро *E1* – инцидентны, вершина *V2* и *E1* тоже инцидентны.
!!! Две вершины (или два ребра) инцидентными друг другу быть не могут !!!

Смежность

2 ребра инцидентные 1 вершине называются **смежными**, 2 вершины инцидентные 1 ребру тоже **смежные**.

Число вершин в графе – называется **порядком графа**, число рёбер — **размером** графа.



Два ребра называются **кратными**, если множества их концевых вершин совпадают.

Ребро называется **петлёй**, если его концы совпадают, то есть *E*(*V1, V1*).

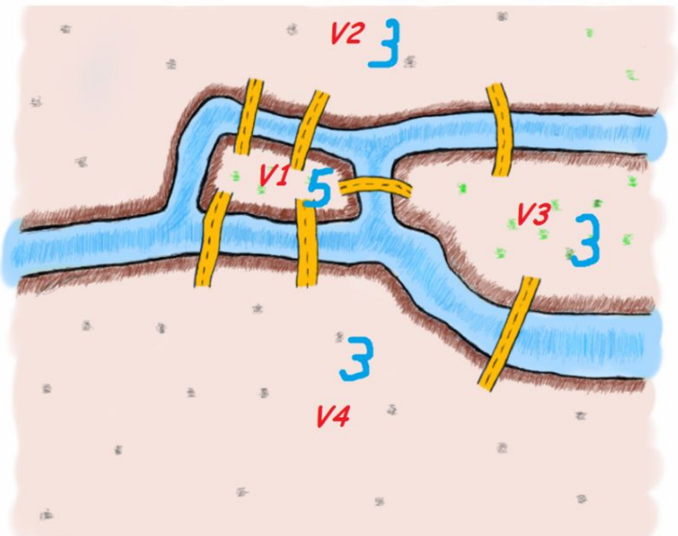
Граф без петель и кратных рёбер называется **простым**.

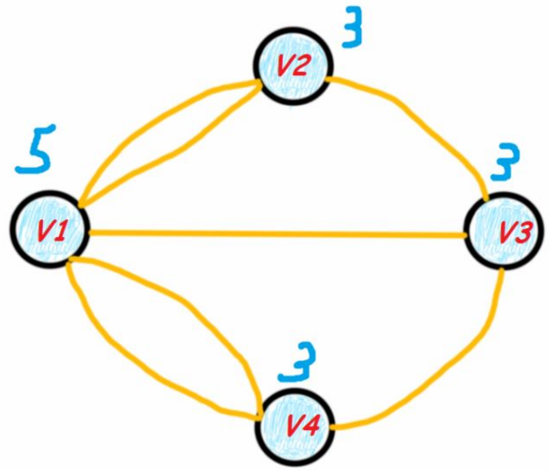
Вершина называется **изолированной**, если она не является концом ни для одного ребра.

Вершина называется **висячей** (или **листом**), если она является концом ровно одного ребра.

Вершина графа смежная с **каждой другой**, называется **доминирующей**.

Степенью вершины *deg*(V) называют количество инцидентных ей рёбер (при этом петли считают дважды).

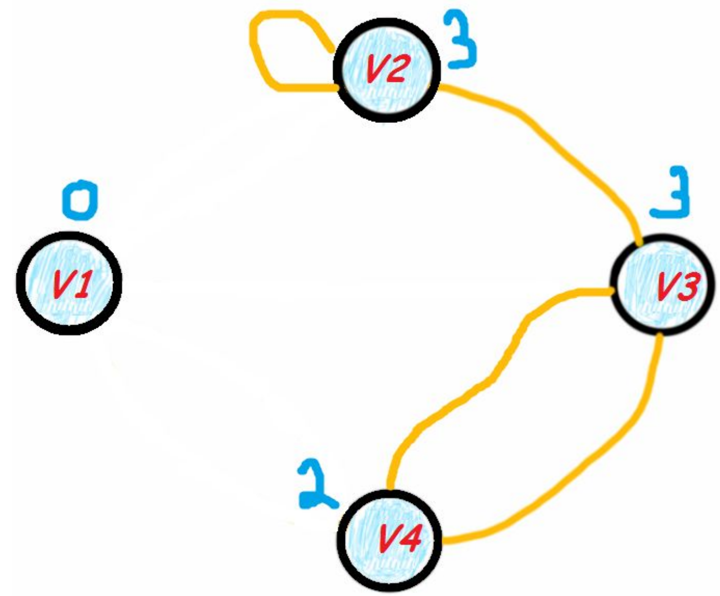




$deg(A) = 5$

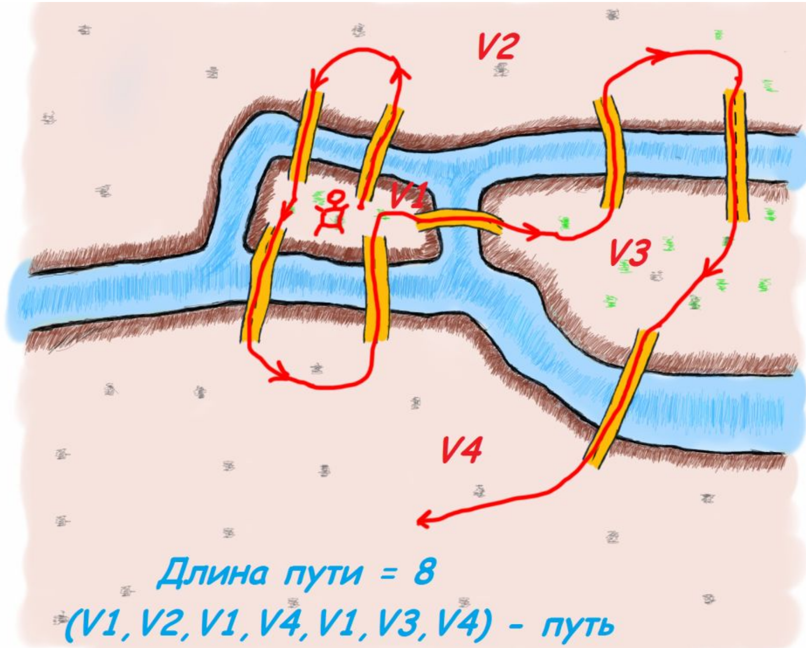
$deg(B) = deg(C) = deg(D) = 3$

При вычислении степени вершины **петли считают дважды**!!!



Эйлер показал, что возможность прохода графа (города) по каждому ребру (мосту) один и только один раз строго зависит от степеней вершин (земель).

Путь (маршрут) — последовательность вершин (или ребер), в которой каждая вершина (ребро) соединена со следующим ребром (вершиной).

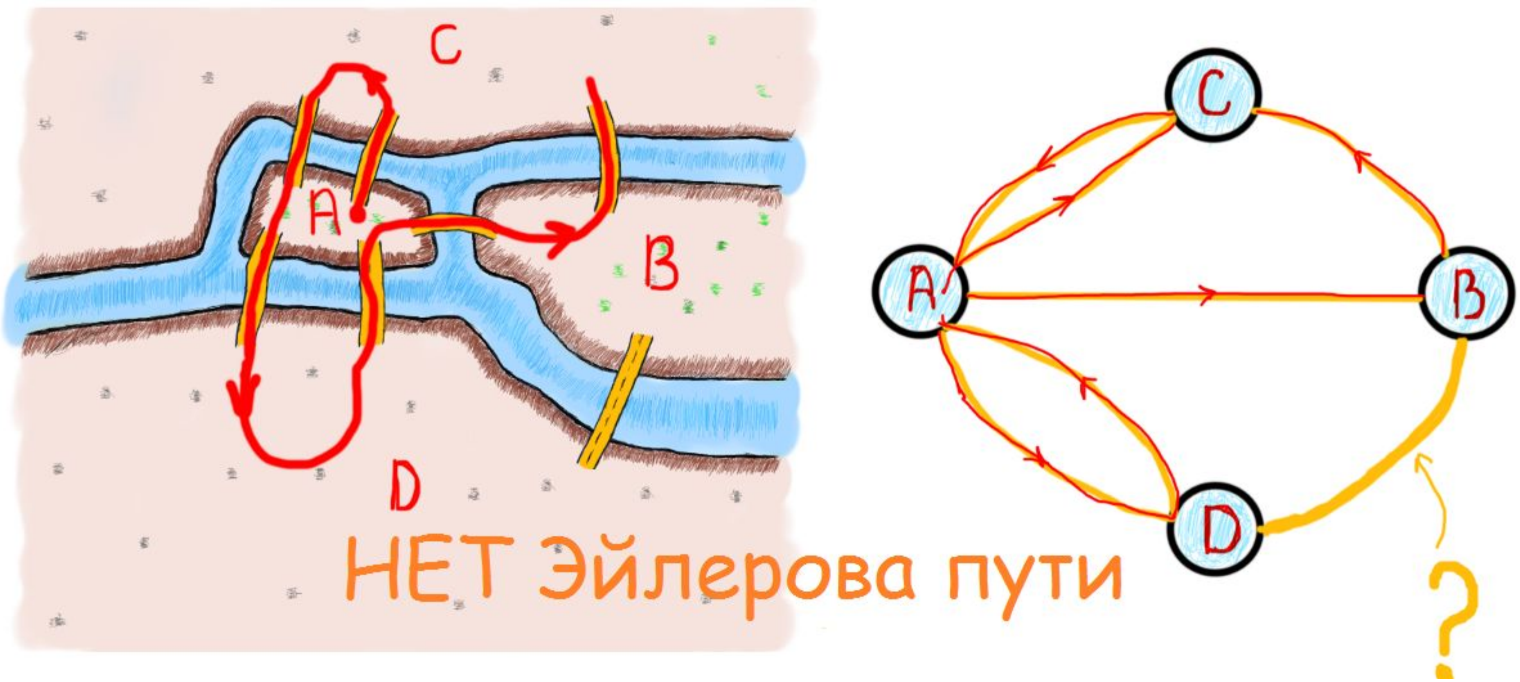


Длина пути — это число рёбер, используемых в пути, при этом многократно используемые рёбра считаются соответствующее число раз. Длина может равняться нулю, если путь состоит из одной только вершины.

Цепью называется маршрут без повторяющихся рёбер. **Простой цепью** называется маршрут без повторяющихся вершин (откуда следует, что в простой цепи нет повторяющихся рёбер).

Путь, состоящий из ребер, встречающихся один раз называется путем Эйлера.

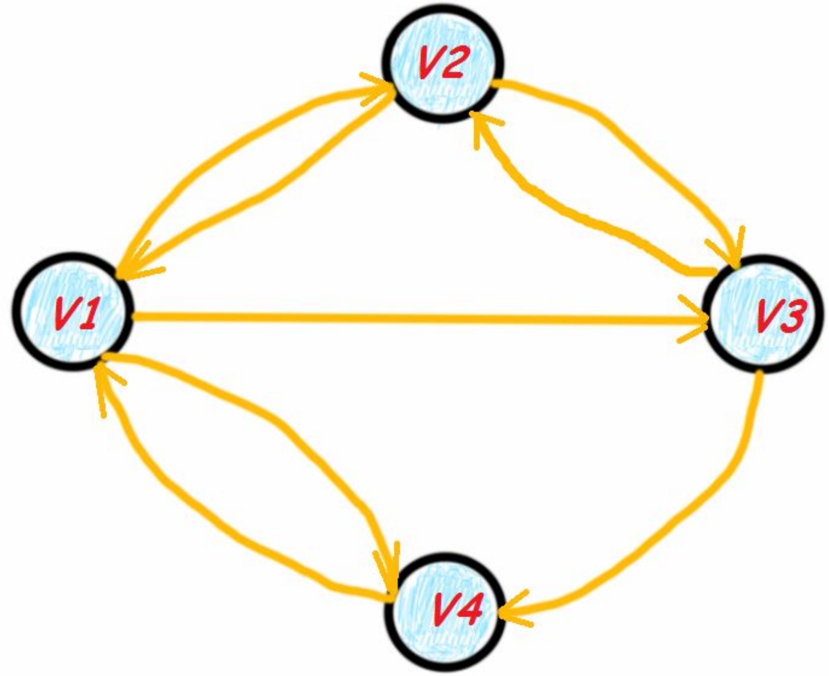
Путь Эйлера конечного неориентированного графа G(V, E) является таким путём, что каждое ребро G появляется на нём один раз. Если G имеет путь Эйлера, то он называется графом Эйлера.



Конечный неориентированный связный граф – это граф Эйлера тогда и только тогда, когда ровно две вершины имеют нечётную степень, или все вершины имеют чётную степень.

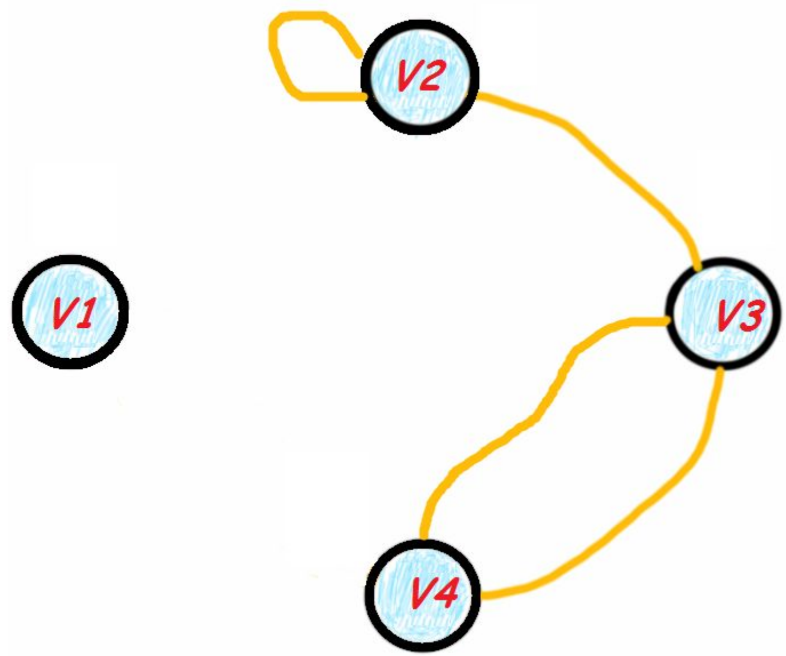
Неориентированный граф – граф, рёбра которого не имеют определённого направления.

Ориентированный граф – граф, рёбра которого имеют определённое направление.

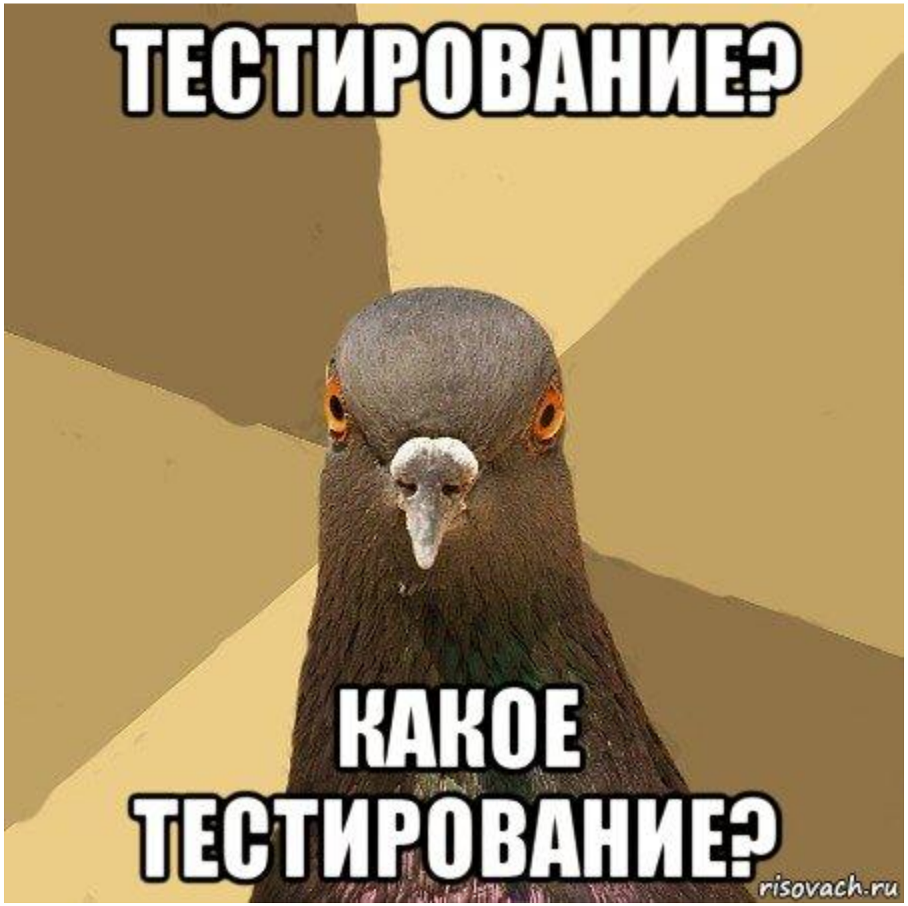


Связный граф – граф, в котором отсутствуют недостижимые вершины (вершины, не связанные с остальными).

Несвязный граф – граф, в котором существуют недостижимые вершины.



Пройди тест !!!

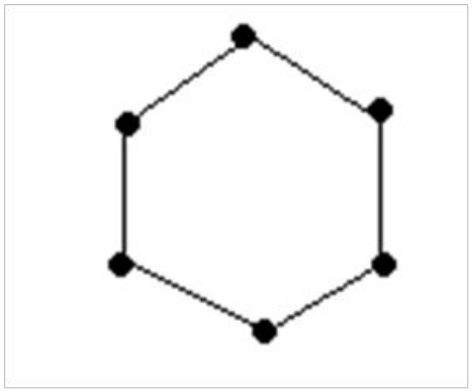


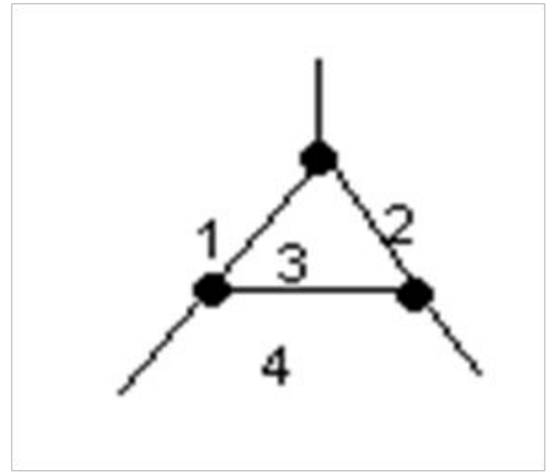
https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSd8BT-EUkltIBKC9ucDppgRTHIss-P6OZ4ExEYwF4sX4GPLYQ/viewform?usp=sf_link

Представление графов

Конечный граф – граф с конечным количеством рёбер и вершин.

Бесконечный граф – граф, конец которого в определённом направлении(-ях) простирается до бесконечности.





Задать граф означает описать множество вершин, рёбер, а также отношения инцидентности.

Когда граф конечный, для описания вершин достаточно их пронумеровать.

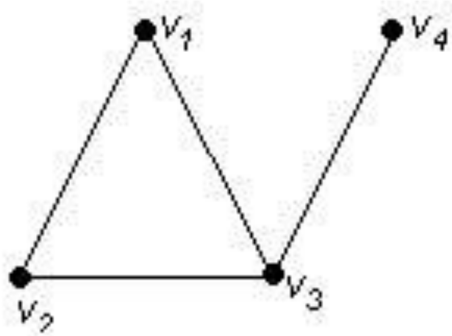
Матрицей смежности *графа G(V,X)* – граф, где *$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ называется квадратная матрица $A(G)=[a_{ij}]$ порядка n, у которой*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } (v_i, v_j) \in X; \\ 0, \textit{если } (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Матрицей инцидентности *графа G называется $(n \times m)$ –матрица $B(G)=[b_{ij}]$, у которой*

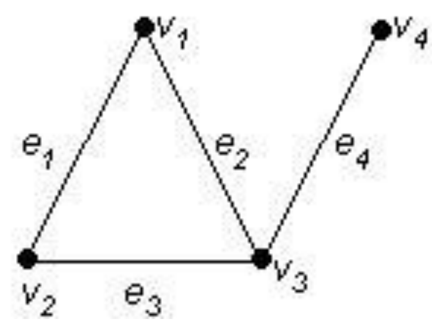
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если веошина } v_i \textit{ инцидентно ребру } x_j; \\ 0, \textit{если вершина } v_i \textit{ не инцидентна ребру } x_j. \end{cases}$$

Матрица смежности



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица инцидентности



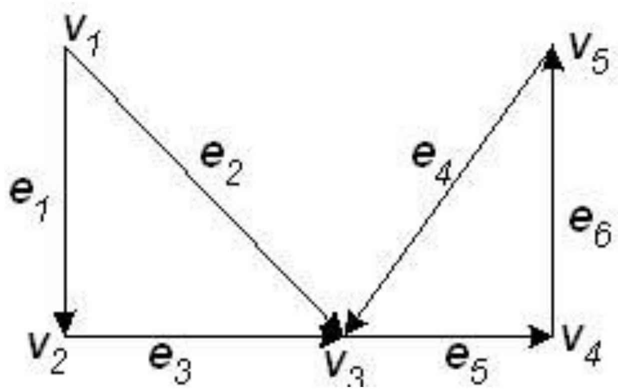
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицей смежности ориентированного *графа G(V,X)* – граф, где *V={v_1, v_2, …,v_n}, X={x_1, x_2, …, x_m}* *называется квадратная матрица A(G)=[a_{ij}] порядка n, у которой*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } (v_i, v_j) \in X; \\ 0, \textit{если } (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Матрицей инцидентности ориентированного *графа G называется (nxm) –матрица B(G)=[b_{ij}], у которой*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если веошина } v_i \textit{ является концом дуги } x_j; \\ -1, \textit{ если вершина } v_i \textit{ является началом дуги } x_j; \\ 0, \textit{ если вершина } v_i \textit{ не инцидентна дуге } x_j. \end{cases}$$



Матрица смежности

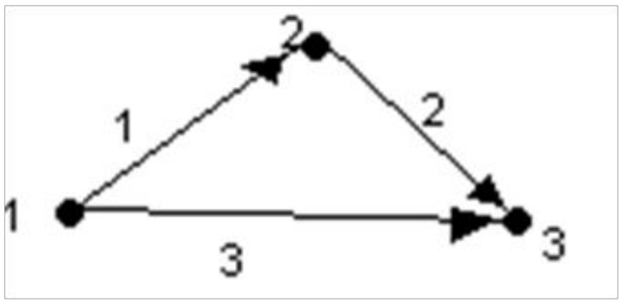
$$\grave{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

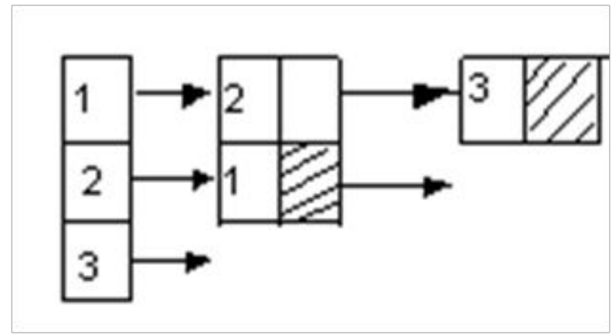
Матрица инцидентности

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

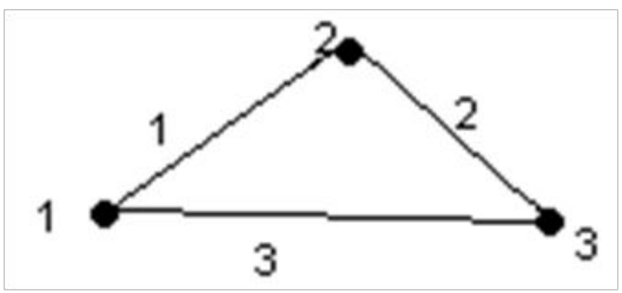
Представление графа с помощью списочной структуры, отражающей смежность вершин и состоящей из массива указателей

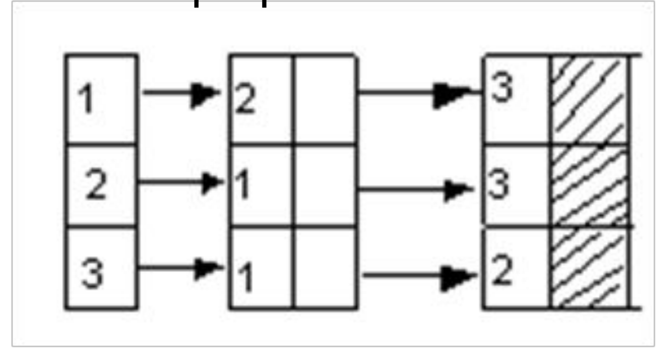
Для ориентированного графа





Для не ориентированного графа





https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdRGTSu79ay60t34y7EsM7HO77sQVBE8c4E5jhH9q4OoDuDGA/viewform?usp=sf_link