

Численное решение
обыкновенных
дифференциальных
уравнений

Все дифференциальные уравнения делятся на 2 большие категории:

1. В ДУ входит функция только одной независимой переменной.
2. В ДУ входит функция нескольких независимых переменных.

Обыкновенные дифференциальные уравнения :

Общий вид ОДУ:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$$

Наивысший порядок производной - порядок уравнения.

ОДУ часто представляют в виде:

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

уравнение, разрешенное относительно старшей производной.

Общее решение ОДУ - бесконечное множество функций в аналитическом виде.

Точное решение ОДУ - только 1 функция (обычно в аналитическом виде).

Для нахождения точного решения необходимо задать дополнительные условия (например, начальную точку). Получаем задачу Коши или краевую задачу.

При использовании численных методов решения ОДУ решение представляет собой набор точек, которые лежат на кривой истинного решения или расположены вблизи нее (ввиду погрешности метода).

Численные методы решения ОДУ
классифицируются следующим образом:

1. ОДНОШАГОВЫЕ и
МНОГОШАГОВЫЕ.

2. ЯВНЫЕ и НЕЯВНЫЕ.

Также численные методы решения ОДУ характеризуются следующими показателями:

1. Точность
2. Устойчивость

Точность – погрешность, с которой получается решение. Все методы характеризуется определенным порядком точности. Чем выше порядок – тем выше точность.

Устойчивость метода характеризует возможность вообще получить достоверный результат.

Решение ОДУ 1-го порядка

Общий вид ОДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y')=0$$

Уравнение разрешаем относительно старшей производной:

$$y'=f(x, y)$$

Начальная точка: x_0, y_0 .

Количество точек на интегральной кривой решения n

Шаг h , с которым будет изменяться значение аргумента.

Метод Эйлера

$$y' = f(x, y)$$

Представляем производную функции y' в виде конечной разности.

За величину приращения аргумента Δx принимается величина шага h :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Тогда:
$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Аналогично:

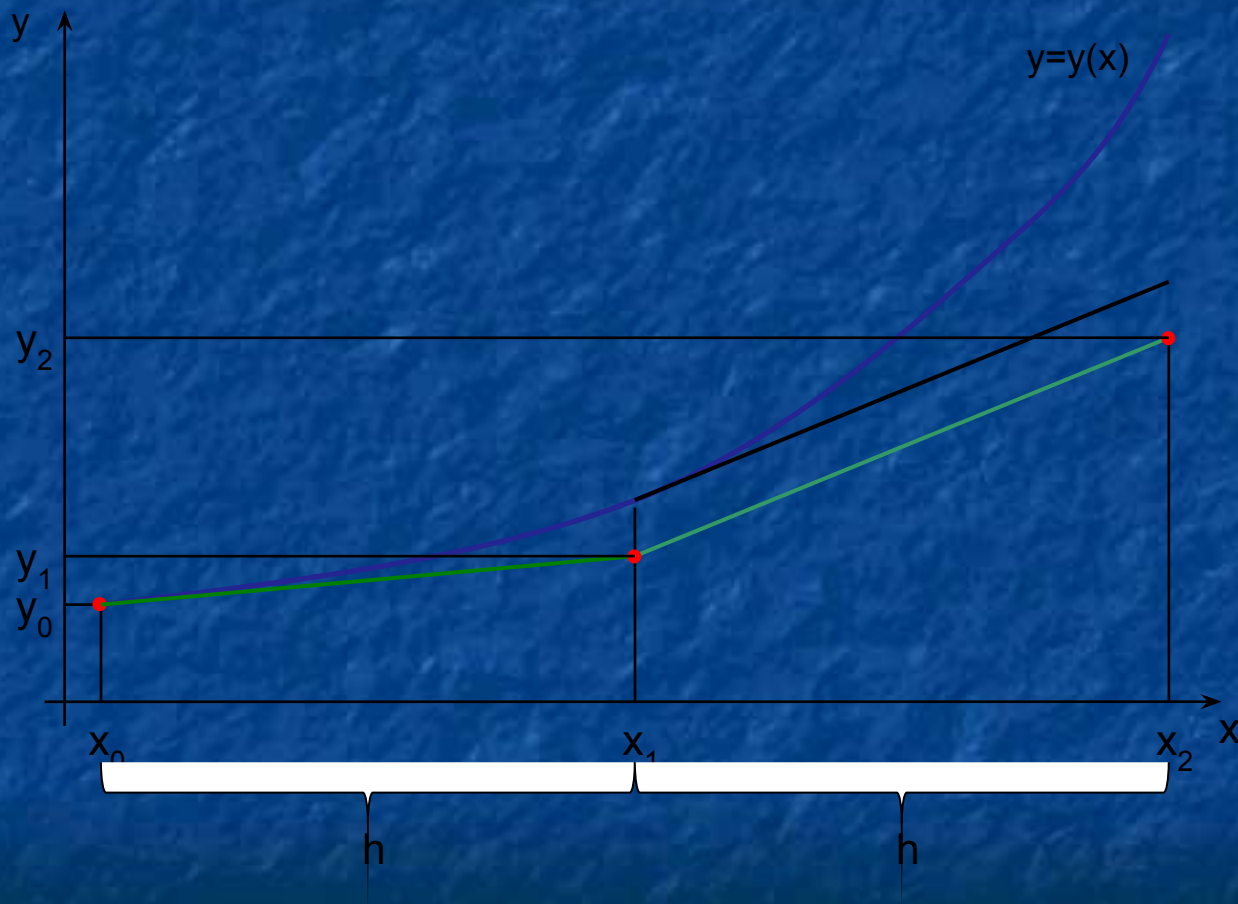
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

В общем виде: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ - формула Эйлера

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Графическая интерпретация метода Эйлера

Предположим, что мы имеем истинное решение ОДУ: $y=y(x)$.

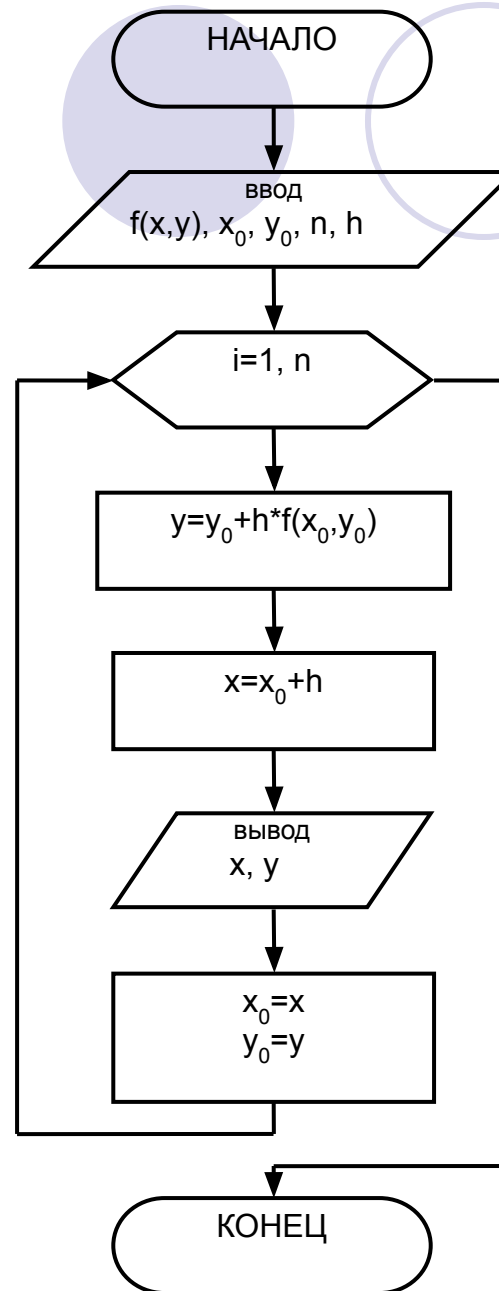


От начальной точки (x_0, y_0) проводим касательную к графику до пересечения с линией $x=x_1$. Получаем новую точку (x_1, y_1) .

Из графика видно, что с увеличением количества шагов погрешность возрастает.

Если величину шага h уменьшить, то результат получится более точным.

Блок-схема метода Эйлера



Характеристика метода Эйлера

Метод Эйлера является одношаговым методом, то есть для расчета последующей точки необходимо знать только координаты предыдущей.

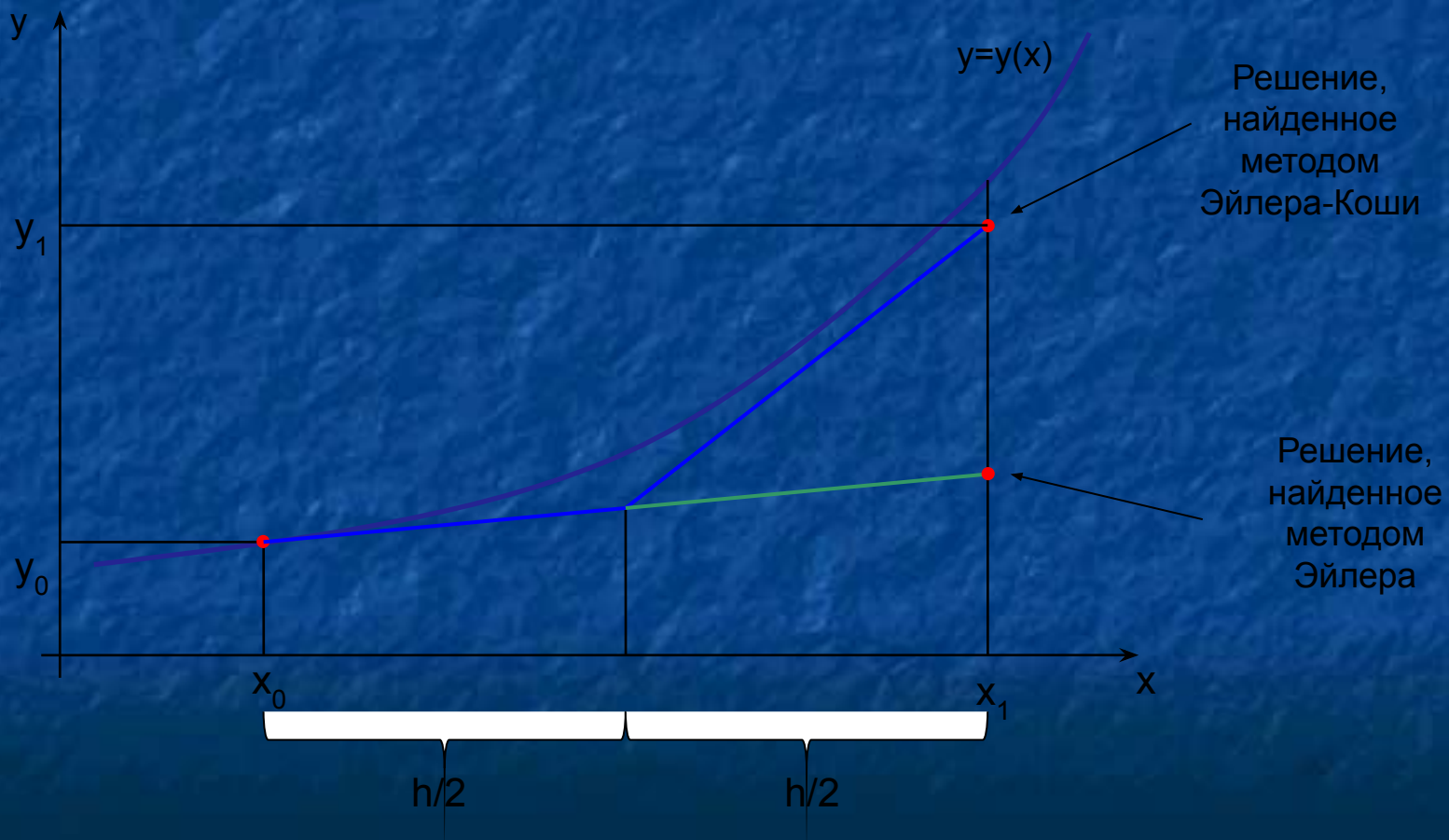
Данный метод использует явную схему. В правой части формулы Эйлера стоят все известные величины.

Метод Эйлера не является устойчивым методом, поэтому он применяется только для ОДУ, решением которых являются достаточно гладкие функции.

Этот метод характеризуется первым порядком точности (точность низкая).

Метод Эйлера-Коши

Данный метод является модификацией метода Эйлера. Он основан на том, что половину шага совершается с тангенсом угла наклона касательной в предыдущей точке, а вторую – с тангенсом угла наклона в последующей точке.



Таким образом, формула для решения ОДУ методом Эйлера-Коши будет следующей:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

формула Эйлера-Коши

В левой и в правой части формулы Эйлера-Коши стоит неизвестная искомая величина y_{i+1} - метод является **неявным**.

Для его реализации находится приближенное значение y_{i+1} методом Эйлера, подставляется в правую часть формулы Эйлера-Коши и находится уточненное значение y_{i+1} .

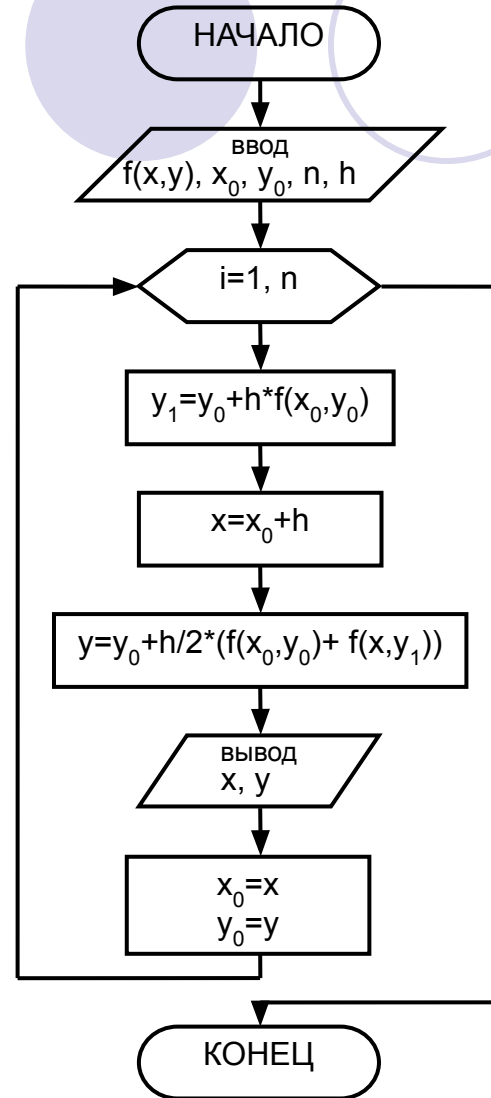
$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h/2 \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}))$$

Метод является одношаговым, устойчивым, 2-го порядка точности (более точным, по сравнению с методом Эйлера)

Блок-схема метода Эйлера - Коши



Метод Рунге-Кутта 4 порядка

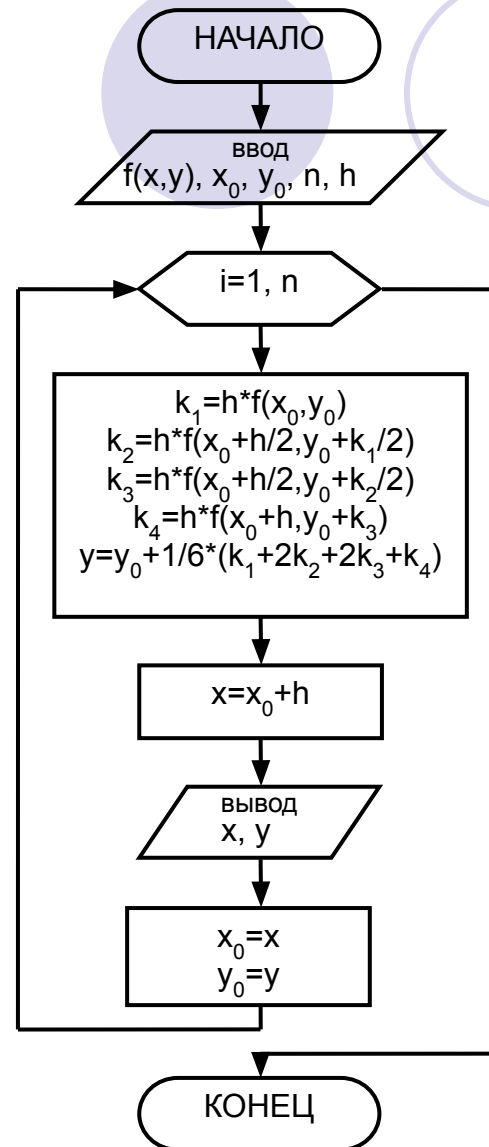
Данный метод 4-й порядок точности, является одношаговым, имеет явную схему, но не всегда устойчив.

Для реализации этого метода используются достаточно громоздкие формулы Рунге-Кутта:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\k_2 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3) \\y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\x_{i+1} &= x_i + h\end{aligned}$$

Несмотря на сложные формулы, данный метод является самым распространенным.

Блок-схема метода Рунге-Кутта 4 порядка



Метод Адамса

Многошаговый метод (4-шаговый)

Для расчета последующей точки необходимо знать координаты четырех предыдущих точек.

Как правило в задачах обычно известна только одна начальная точка. Поэтому три последующие точки вычисляются с использованием одношаговых методов, а затем используется 4-шаговый метод Адамса.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3}))$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Данный метод имеет 4-й порядок точности, явную схему, но не всегда устойчив.

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, y', z') = 0 \\ F_2(x, y, z, y', z') = 0 \end{cases}$$

Оба уравнения необходимо разрешить относительно старшей производной:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

Пусть заданы начальные условия: x_0, y_0, z_0 .

Данную систему можно решить любым методом, применимым для решения единичных ОДУ.

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$
$$z_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$
$$x_{i+1} = x_i + h$$

Метод Эйлера-Коши:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$\tilde{z}_{i+1} = z_i + h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f_1(x_i, y_i, z_i) + f_1(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1}))$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} \cdot (f_2(x_i, y_i, z_i) + f_2(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1}))$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$k_1 = h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i)$$

$$l_1 = h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i)$$

$$k_2 = h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$

$$l_2 = h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$

$$l_3 = h \cdot f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}\right)$$

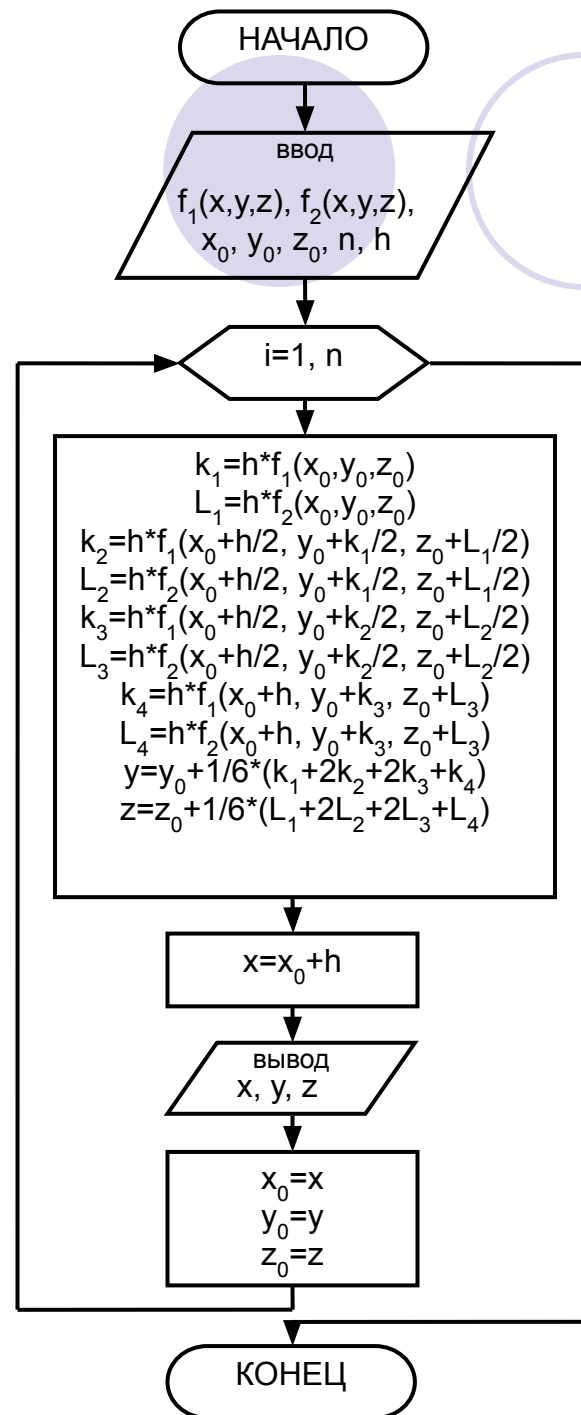
$$k_4 = h \cdot f_1(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

$$l_4 = h \cdot f_2(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6} \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Блок-схема
метода
Рунге-Кутта
4 порядка
для системы
двух ОДУ



Решение обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

Любое дифференциальное уравнение высшего порядка можно привести к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка путем замены переменных.

Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Заданы начальные условия: x_0, y_0, y'_0

Разрешим уравнение относительно старшей производной:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Заменяем первую производную y' функцией z . Тогда $y'' = z'$, а $y'_0 = z_0$

Получим систему:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Решаем полученную систему известными методами.

Пример решения ОДУ 2-го порядка:

$$2x^4 y'' - 3,5 y' x + y = 0, \quad y(2) = 4.5, \quad y'(2) = 3.2$$

Разрешим уравнение относительно старшей производной:

$$y'' = 1,75 \frac{y'}{x^3} - \frac{y}{2x^4}. \quad \text{Произведем замену } y' = z$$

Получим систему:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 1,75 \frac{z}{x^3} - \frac{y}{2x^4} \end{cases} \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 4.5, \quad z_0 = 3.2$$