Кафедра КБ-5 «Аппаратного, программного и математического обеспечения вычислительных систем»

Теория принятия решений в научно-исследовательской работе

Для 4 курса групп
ТВБО-01-15, ТВБО-02-15,
ТВБО-03-15, ТВБО-04-15

По направлению подготовки
09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Преподаватель
к.т.н., доцент Аждер Татьяна Борисовна

Москва, 2018

Содержание:

Москва, 2018

Теория принятия решений (ТПР) – это совокупность методов и моделей, предназначенных для обоснования решений, принимаемых на этапах анализа, разработки и эксплуатации сложных систем различной природы: информационных, технических, производственных, организационно-экономических и др.

Решение – это любой выбор параметров, зависящих от лица, принимающего решение.

Элементы решения – это параметры, совокупность которых образует решение. В качестве элементов решения могут фигурировать различные числа, векторы, функции, физические признаки и т.д.

Решение называется *допустимым*, если оно удовлетворяет ограничениям: ресурсным, юридическим, правовым, морально-этическим.

Решение является *оптимальным,* если по тем или другим признакам оно предпочтительнее перед другими.

Для того, чтобы сравнивать между собой по эффективности разные решения, необходимо иметь какой-то количественный критерий, *показатель эффективности F* (или «целевая функция»).

Основные этапы решения задач ТПР.

1. Постановка задачи (приведение входных данных к виду, удобному для построения модели).

2. Построение математической модели.

3. Нахождение метода решения.

4. Проверка и корректировка модели.

5. Выдача рекомендаций (реализация найденного решения на практике).

Схема решения задачи методами теории принятия решений выглядит следую

Классификация задач ТПР.

1. Решения принимаются в условиях определенности.

Каждому решению можно поставить в соответствие (пусть даже путем сложных расчетов) определенный результат, т.е. имеет место детерминированный тип связи. Модели, описывающие такие ситуации, называются *детерминированными*.

2. Решения принимаются в условиях риска.

Между решениями и результатами имеет место стохастическая связь: определенному решению может соответствовать более одного результата, вероятности появления которых известны. Адекватным отображением таких условий являются *вероятностные (стохастические)* модели.

3. Решения принимаются в условиях неопределенности.

Определенному решению соответствует более одного результата, а вероятностные характеристики результатов неизвестны.

Математические модели, описывающие неопределенный тип связи, разнообразны и не имеют единого названия. В частности, к этому классу относятся матричные модели, модели типа «игра», «аукционный торг», нечеткие модели.

Программирование – нахождение экстремума (*max* или *min*) функции при заданных ограничениях, т.е. нахождение оптимального решения функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при наложенных ограничениях.

Линейное программирование (задачи линейного программирования) – это нахождение оптимального решения при условии, что функция цели $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ линейна, все условия ограничения линейны и $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$.

Пусть имеется n переменных x_1, x_2, ..., x_n. Необходимо найти такие значения этих переменных, чтобы достигался *max* или *min* функции цели (линейной):

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to max(min),$$

при соответствую

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le(\ge,=)b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le(\ge,=)b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le(\ge,=)b_m; \\ x_1,x_2,\ldots,x_n\ge 0. \end{cases}$$

Для конкретной задачи система ограничений может содержать любой из знаков неравенства. Но переменные x_1, x_2, ..., x_n всегда должны быть больше либо равны нулю.

Необходимо найти решение системы ограничений $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, при котором функция цели будет принимать экстремальное значение (*max* или *min*).

При этом данное решение должно удовлетворять системе ограничений. Нахождение такого решения и составляет *задачу линейного программирования* (ЗЛП)

Стандартной задачей линейного программирования называется задача, система ограничений в которой состоит только из одних неравенств и все неизвестные больше либо равны нулю:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,2,..,m \\ x_j \ge 0, j = 1,2,..,n \end{cases}$$

Канонической задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции цели и система ограничений в которой состоит только из одних уравнений (все неизвес

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow max(min)$$

жны быть больше либо равны нулю):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1,2,..,m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,..,n \end{cases}$$

Пример

Составить математическую модель задачи.

Имеется два вида корма «№1» и «№2», содержащие питательные вещества: белки, жиры, углеводы.

Известны содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ.

Задача линейного программирования

Вид питательного вещества (витамина)	Число единиц питательных веществ в 1 кг		Необходимый минимум питательных веществ
	№1	№2	
Белки	3	1	9
Жиры	1	2	8
Углеводы	1	6	12
Стоимость 1 кг корма	4	6	

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида

Решение.

Пусть x_1 и x_2 – количество кормов «№1» и «№2».

Тогда условия – ограничения для каждого вида питательного вещества составляются следующим образом:

т.к. необходимо, чтобы содержание питательного вещества было не ниже установленного предела, то рацион должен включать питательных веществ либо больше установленного предела, либо строго этот предел.

Поэтому:

условие - ограничение для белков имеет вид:

$$3x_1 + 1x_2 \geq 9,$$

условие – ограничение для жиров:

$$1x_1 + 2x_2 \geq 8,$$

условие – ограничение для углеводов:

$$1x_1 + 6x_2 \geq 12.$$

Переменные x_1, x_2 должны быть больше или равны нулю:

$$. \, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Общая стоимость рациона составит:

$$F = 4x_1 + 6x_2 \text{ (руб).}$$

Т.к. общая стоимость дневного рациона должна быть минимальна, то необходимо найти минимум функции цели

$$F = 4x_1 + 6x_2 .$$

Математическая модель задачи имеет вид:

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 \geq 9, \\ 1x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 1x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача линейного программирования сформулирована как задача минимизации или максимизации линейной формы, переменные которой связаны некоторой системой линейных уравнений и должны быть неотрицательными.

Для решения задач с двумя переменными применяется *графический метод*.

Для решения задач с тремя или более переменными применяется *симплексный метод линейного программирования*.

Алгоритм

Шаг 1. В системе ограничений ЗЛП заменить знаки неравенств на знаки точных равенств и построить соответствующие прямые.

Шаг 2. Найти и заштриховать полуплоскости, разрешенные каждым из ограничений-неравенств ЗЛП.

Для этого необходимо подставить в конкретное неравенство координаты какой-либо точки (например, (0;0)), и проверьте истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное, то надо заштриховать полуплоскость, содержащую данную точку;

иначе (неравенство ложное) надо заштриховать полуплоскость, не содержащую данную точку.

Поскольку x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси x_1 и правее оси x_2.

Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой, поэтому необходимо выделить на графике такие прямые.

Шаг 3. Определить ОДР как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделить ее. При отсутствии ОДР задача *не имеет решений*.

Шаг 4. Если ОДР – не пустое множество, то построить целевую прямую, т.е. любую из линий уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = F$, где F – произвольное число.

Шаг 5. Построить вектор $C = (c_1; c_2)$, из точки (0;0), направленный в точку $(c_1; c_2)$. Если целевая прямая и вектор C построены верно, то они *перпендикулярны*.

Шаг 6. При поиске максимума целевой функции необходимо передвигать целевую прямую *в направлении* вектора C, при поиске минимума целевой функции – *против направления* вектора C. *Последняя* по ходу движения вершина ОДР будет точкой *max* или *min* целевой функции.

Если такой точки (точек) не существует, то *целевая функция не ограничена на множестве планов* сверху (при поиске *max*) или снизу (при поиске *min*).

Шаг 7. Определить координаты точки *max* (*min*) целевой функции $X^* = (x_1^*; x_2^*)$ и вычислить значение самой целевой функции $F(X^*)$.

Для вычисления координат оптимальной точки X^* необходимо решить систему уравнений прямых, на пересечении которых находится X^*.

Пример

Найти оптимальное решение задачи, математическая модель которой имеет вид

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

Для построения прямых ограничений необходимо вычислить координаты точек пересечения этих прямых с осями координат

(1) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ (2) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 8, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases}$

(3) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Прямая (4) проходит через точку x_2 =2 параллельно оси x_1

Графическое решение примера

Далее следует определить ОДР. Например, подставив точку (0;0) в исходное ограничение (3), результатом является неравенство , что является истинным. Поэтому стрелкой (или штрихованием) обозначается полуплоскость, содержащая точку (0;0), т.е. расположенная правее и ниже прямой (3). Аналогично определяются допустимые полуплоскости для остальных ограничений. Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, т.е. ОДР является многоугольник *ABCDEF*.

Целевую прямую можно построить по уравнению

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Вектор строится из точки (0;0) и направляется в точку (3;2). Точка *E* – это последняя вершина многоугольника допустимых решений *ABCDEF*, через которую проходит целевая прямая, двигаясь по направлению вектора . Поэтому *E* – это точка максимума целевой функции.

Координаты точки E определяются из системы уравнений прямых ограничений (1) и (2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases} \qquad x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$E(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})[\text{т/сутки}]$$

Максимальное значение целевой функции равно

$$F(E) = 3\cdot\frac{10}{3} + 2\cdot\frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$$

[тыс. руб./сутки]

Среди графовых моделей особую роль играют *потоковые модели*, часто называемые *транспортными сетями* только из-за того, что первоначально они возникли при решении транспортной задачи.

К транспортным сетям сводятся многие практические задачи управления, например, задача об оптимальном назначении, о складе, о поставщике, о спросе и предложении, о кратчайшем пути, об оптимальном использовании дорог, об оптимальном по стоимости сетевом графике и другие.

Графом называется пара объектов, состоящая из множества точек и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек. Эти точки называются *вершинами графа*.

Если отрезки имеют направления, то граф называется *ориентированным (сетью)*, а сами отрезки – *дугами*.

Если отрезки не имеют направления, то граф называется *неориентированным*, а вершины графа соединены *ребрами*.

Смешанным называется граф, в котором содержатся как ориентированные, так и неориентированные отрезки.

Пусть:

G – граф;

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ – вершины графа;

u_{ij} – дуга, соединяющая вершину X_i с X_j в направлении от X_i к X_j;

G – граф, образованный множеством вершин X и множеством дуг U, обозначают $G(X,U)$.

Тогда $G(X,U)$ – граф, образованный множеством вершин X и множеством дуг U.

Путь в ориентированном графе – это последовательность дуг, в которой конец предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Путь $\mu=\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ – это пусть, состоящий из последовательности вершин $X_1, X_2, ..., X_k$.

Путь, в котором ни одна вершина не встречается дважды, называется *элементарным*.

Путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды, называется *простым*, в противном случае – *составным*.

Конечный путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной, называется *контуром*.

Задача о максимальном потоке в сети

Рассматривается ориентированный граф с $(n+1)$ вершинами $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$, где некоторые упорядоченные пары точек X_i, X_j соединены дугами u_{ij}, причем каждой такой дуге поставлено в соответствие неотрицательное число $c_{ij}=c(u_{ij})$ называемое *пропускной способностью.*

Пусть зафиксированы какие-нибудь две вершины графа, например, X_0 и X_n, где

X_0 – *вход сети*, X_n – *выход сети*.

Пропускная способность c_{ij} *дуги* (X_i, X_j) определяет максимальное количество вещества, которое может пропустить эта дуга за единицу времени.

Потоком z_{ij} *по дуге* (X_i, X_j) называется количество вещества, проходящее через эту дугу в единицу времени.

Потоком по сети, или просто *потоком*, называется совокупность $\{z_{ij}\}$ потоков по всем дугам сети. Потоки удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 \le z_{ij} \le c_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad i \ne j \qquad (1)$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (2)$$

Из (1) следует – поток по любой дуге неотрицателен и не превышает пропускной способности дуги.

Из (2) следует – количество вещества, притекающего в произвольную точку сети (кроме X_0 и X_n), равно количеству вещества, вытекающего из этой точки.

Из (2) следует – общее количество вещества $\sum_{j=1}^{n} z_{0j}$, вытекающего из вершины X_0 (входа сети), совпадает с общим количеством вещества $\sum_{i=0}^{n-1} z_{in}$, притекающего в вершину X_n (выход сети), т. е.

(3) ,

$$\sum_{j=1}^{n} z_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} z_{in} = w$$

где w – *величина потока в сети.*

Задача о максимальном потоке в сети представляет собой задачу ЛП: среди всех решений системы линейных ограничений (1) – (2) следует найти такое решение, которое максимизирует линейную форму (3). Это решение называется *максимальным потоком в сети*.

Дуга u_{ij} с началом в X_i и концом в вершине X_j является *насыщенной*, если $z_{ij}=c_{ij}$, т. е. величина потока по этой дуге равна пропускной способности дуги.

Если же величина потока по дуге меньше пропускной способности дуги $z_{ij} < c_{ij}$, то такую дугу называют *ненасыщенной*.

Алгоритм определения максимального потока

Шаг 1. Построить какой-нибудь начальный поток $\{z_{ij}^{0}\}$.

Шаг 2. Проверить, можно ли построить путь из X_0 в X_n, состоящий только из ненасыщенных дуг. Если нет, то построенный поток максимален. Иначе, перейти к шагу 3.

Шаг 3. Выделить любой путь, ведущий из X_0 в X_n по ненасыщенным дугам, найти минимальную пропускную способность дуг этого пути θ и увеличить поток через каждую дугу этого пути на θ. Построить новый поток. Перейти к шагу 2.

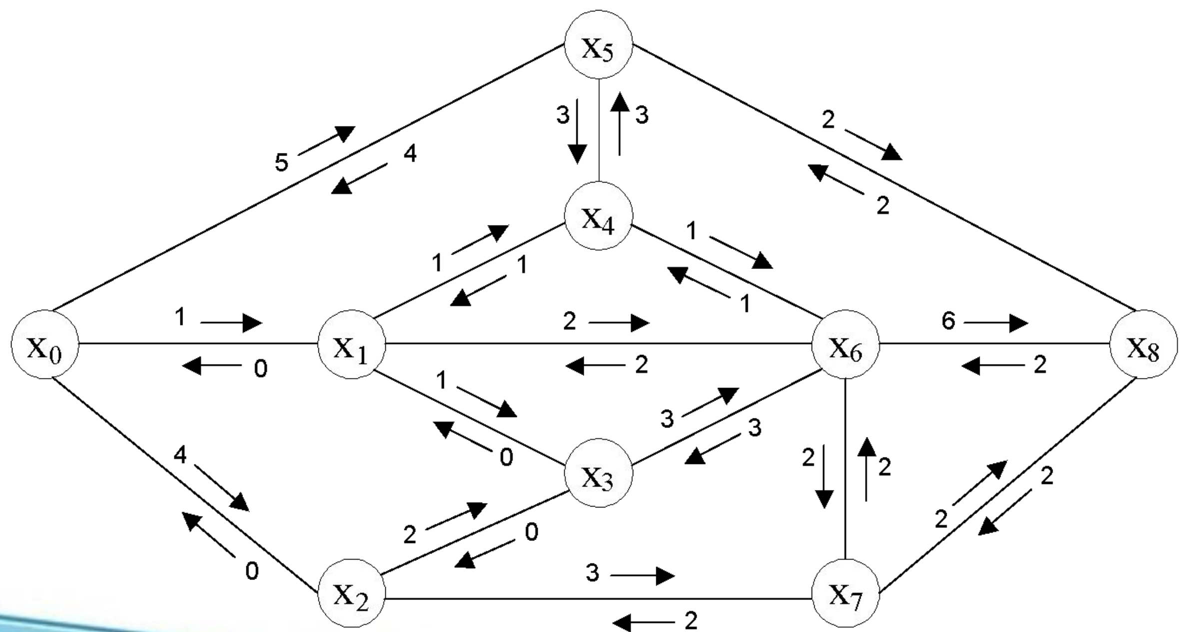
Вычисления продолжаются до тех пор, пока удается построить путь из X_0 в X_n по ненасыщенным дугам.

Алгоритм обрывается, как только будет получена сеть, в которой нельзя построить ни одного пути из X_0 в X_n, идущего по ненасыщенным дугам.

Если по пути μ пропустить поток θ, то пропускные способности всех дуг этого пути следует уменьшить на θ, т. е. $c'_{ij}=c_{ij} - \theta$. При этом пропускные способности всех дуг, симметричных дугам старого пути, следует увеличить на θ, т. е.

$$c'_{ji}=c_{ji} + \theta.$$

Пример. Определить максимальный поток в сети, изображенный на рисунке 1 из вершины X_0 в вершину X_8, где числа на дугах, снабженные стрелками, означают пропускные способности этих дуг в указанных направлениях.



Решение.

В качестве начального взять нулевой поток, когда все $z_{ij} = 0$.

Найти какой-нибудь путь из X_0 в X_8, например, $\mu_1=\{ X_0, X_5, X_8\}$.

По этому пути можно пропустить поток величиной не более

$$\theta_1 = \min\{ c_{05}, c_{58}\} = \min \{5, 2\} = 2.$$

Пропустить поток величины 2 единицы по указанному пути. Получен новый поток $\{z'_{ij}\}$. При этом пропускные способности дуг пути и симметричных им дуг изменяются.

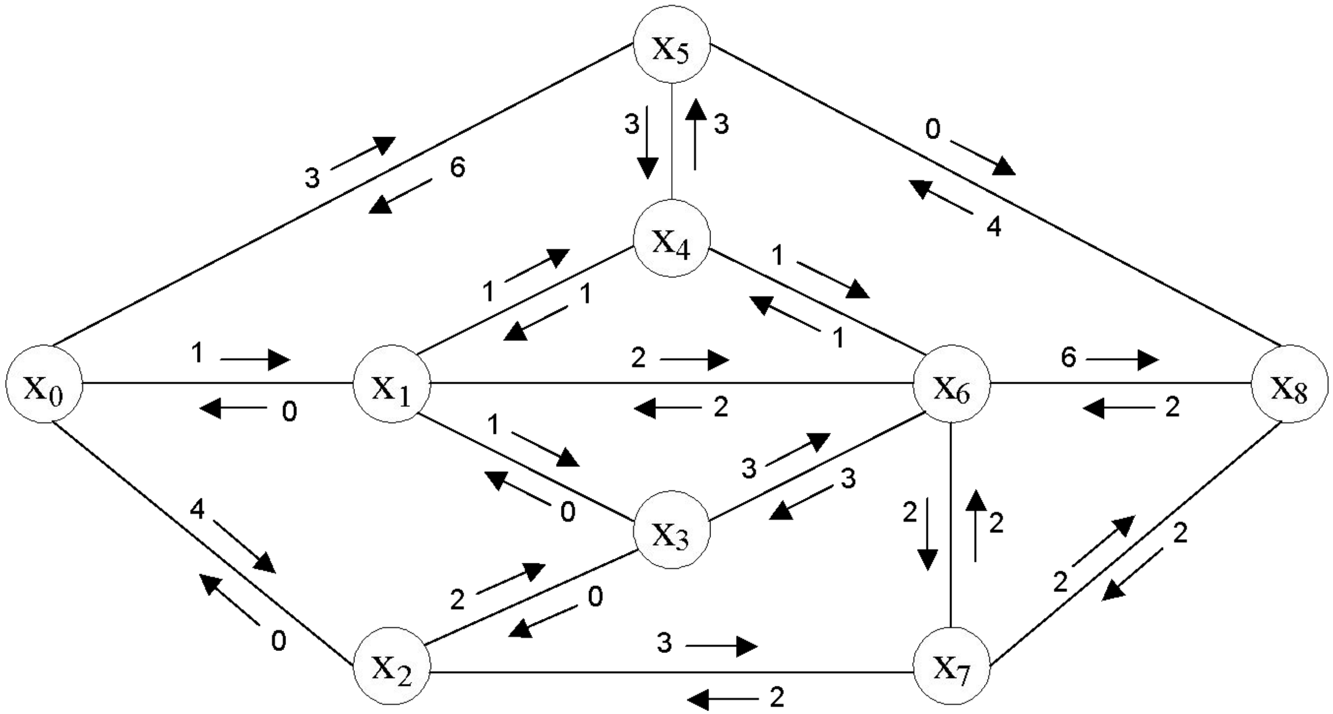
Пропускные способности дуг пути уменьшаются на 2 единицы:

$$c'_{05} = c_{05} - \theta_1 = 5 - 2 = 3, \qquad c'_{58} = c_{58} - \theta_1 = 2 - 2 = 0,$$

т. е. дуга (X_5, X_8) становится насыщенной, а пропускные способности дуг, симметричных дугам пути, увеличиваются на 2 единицы:

$$c'_{50} = c_{50} + \theta_1 = 4 + 2 = 6 \qquad c'_{85} = c_{85} + \theta_1 = 2 + 2 = 4$$

Сеть с новыми пропускными способностями дуг приведена на рисунке 2.



Определить новый путь из X_0 в X_8, проходящий по ненасыщенным дугам, например, $\mu_2=\{X_0, X_5, X_4, X_6, X_8\}$, где

$$\theta_2 = \min\{c_{05}, c_{54}, c_{46}, c_{68}\} = \min\{3, 3, 1, 6\} = 1,$$

и пропустить по этому пути поток величиной в одну единицу. Поменяв пропускные способности дуг этого пути и симметричных им дуг формируются новые пропускные способности:

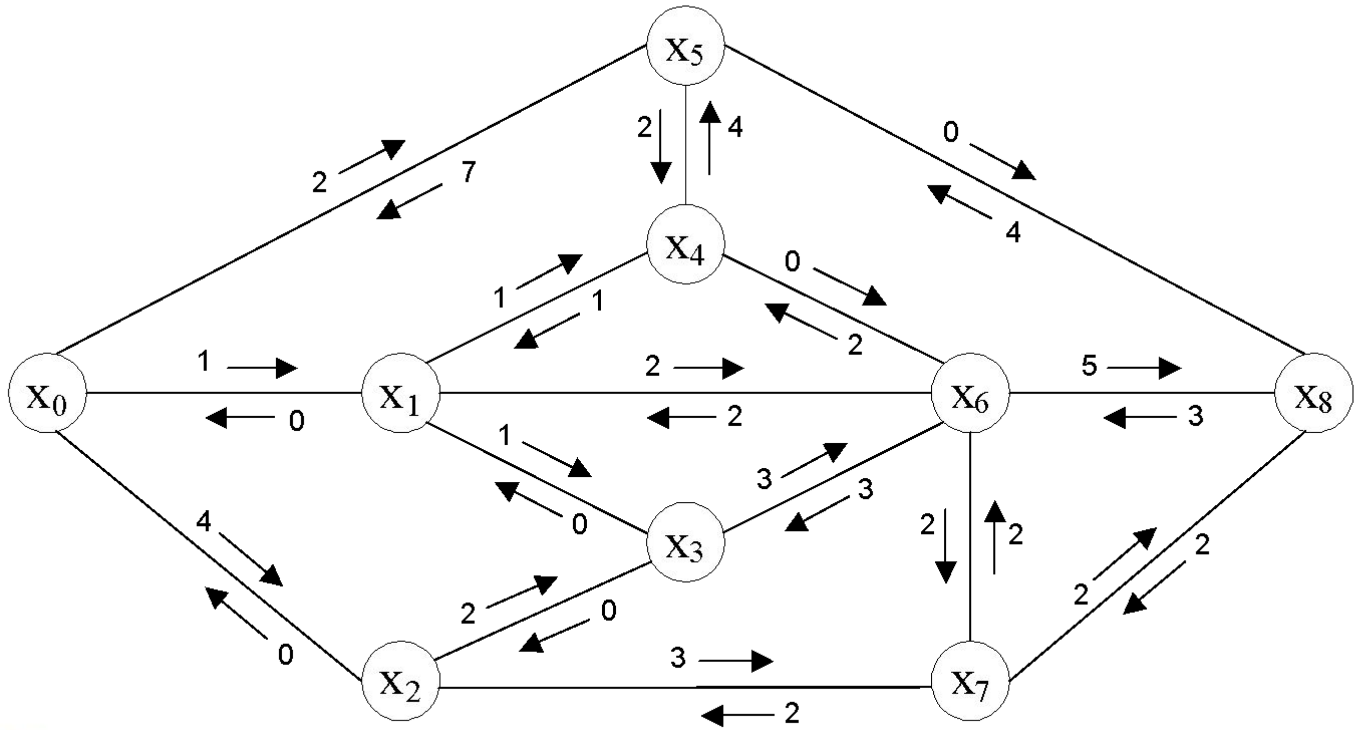
$$c'_{05} = c_{05} - \theta_2 = 3 - 1 = 2 \qquad c'_{50} = c_{50} + \theta_2 = 6 + 1 = 7$$

$$c'_{54} = c_{54} - \theta_2 = 3 - 1 = 2 \qquad c'_{45} = c_{45} + \theta_2 = 3 + 1 = 4$$

$$c'_{46} = c_{46} - \theta_2 = 1 - 1 = 0 \qquad c'_{64} = c_{64} + \theta_2 = 1 + 1 = 2$$

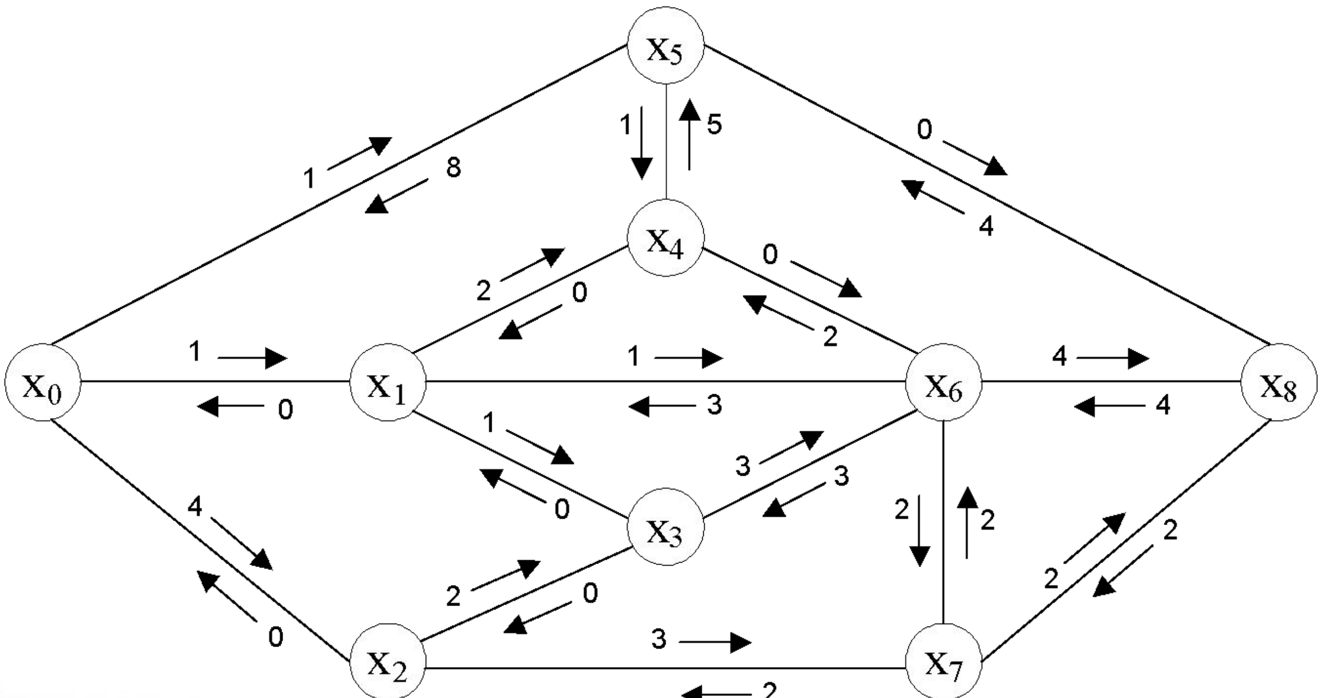
$$c'_{68} = c_{68} - \theta_2 = 6 - 1 = 5 \qquad c'_{86} = c_{86} + \theta_2 = 2 + 1 = 3$$

Дуга (X_4, X_6) становится насыщенной. Сеть с измененными пропускными способностями приведена на рисунке 3.



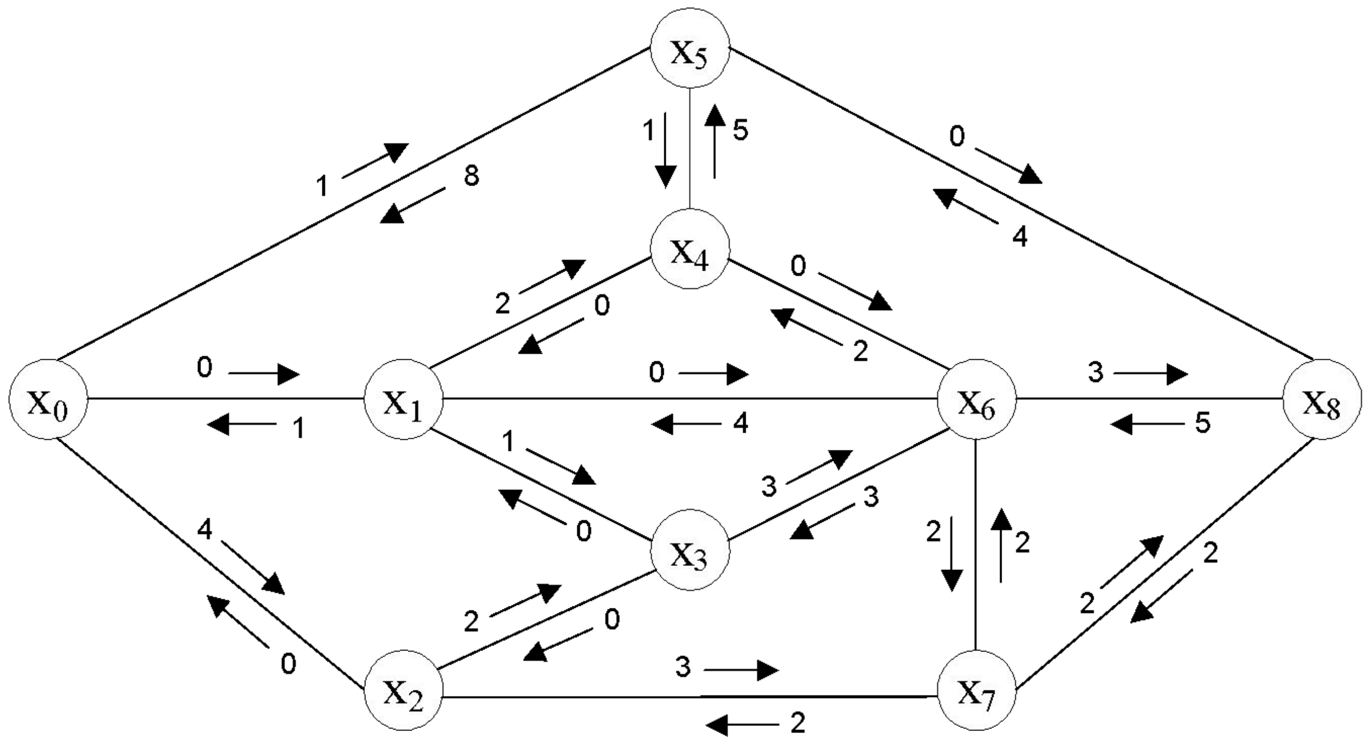
Далее последовательно найти пути μ_3, μ_4, μ_5, μ_6 и по ним пропустить потоки величиной θ_3, θ_4, θ_5, θ_6 соответственно:

$$\mu_3=\{X_0, X_5, X_4, X_1, X_6, X_8\}, \quad \theta_3 = \min\{2, 2, 1, 2, 5\} = 1$$

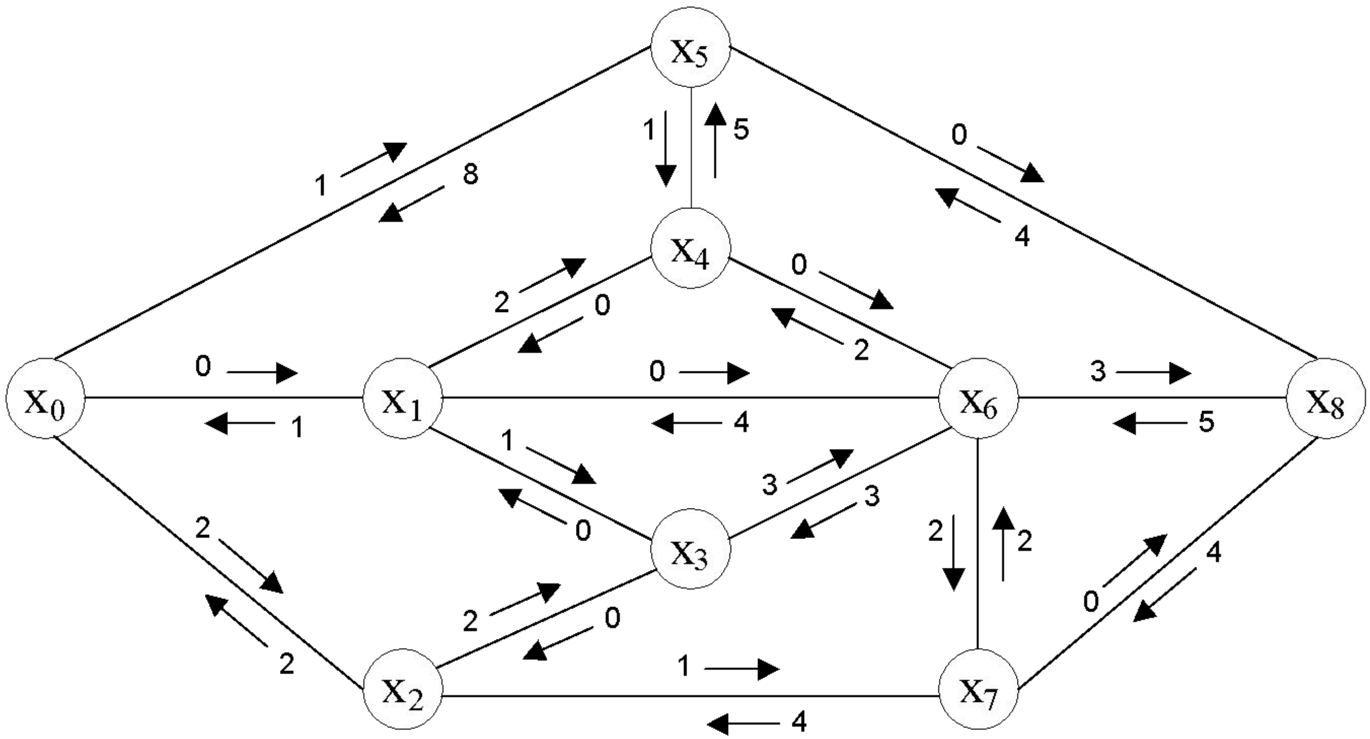


Задачи принятия решений, связанные с оптимизацией на графах

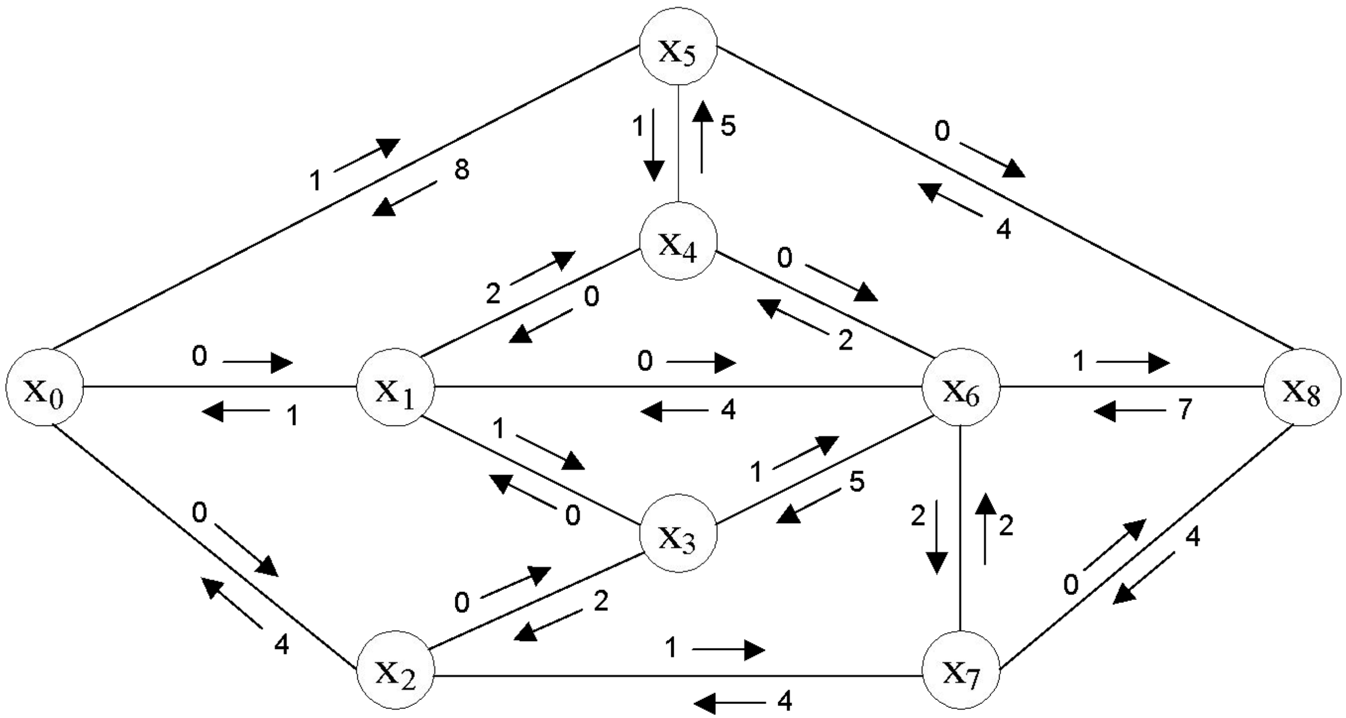
$\mu_4 = \{ X_0, X_1, X_6, X_8 \}$, $\theta_4 = \min \{1, 1, 4\} = 1$



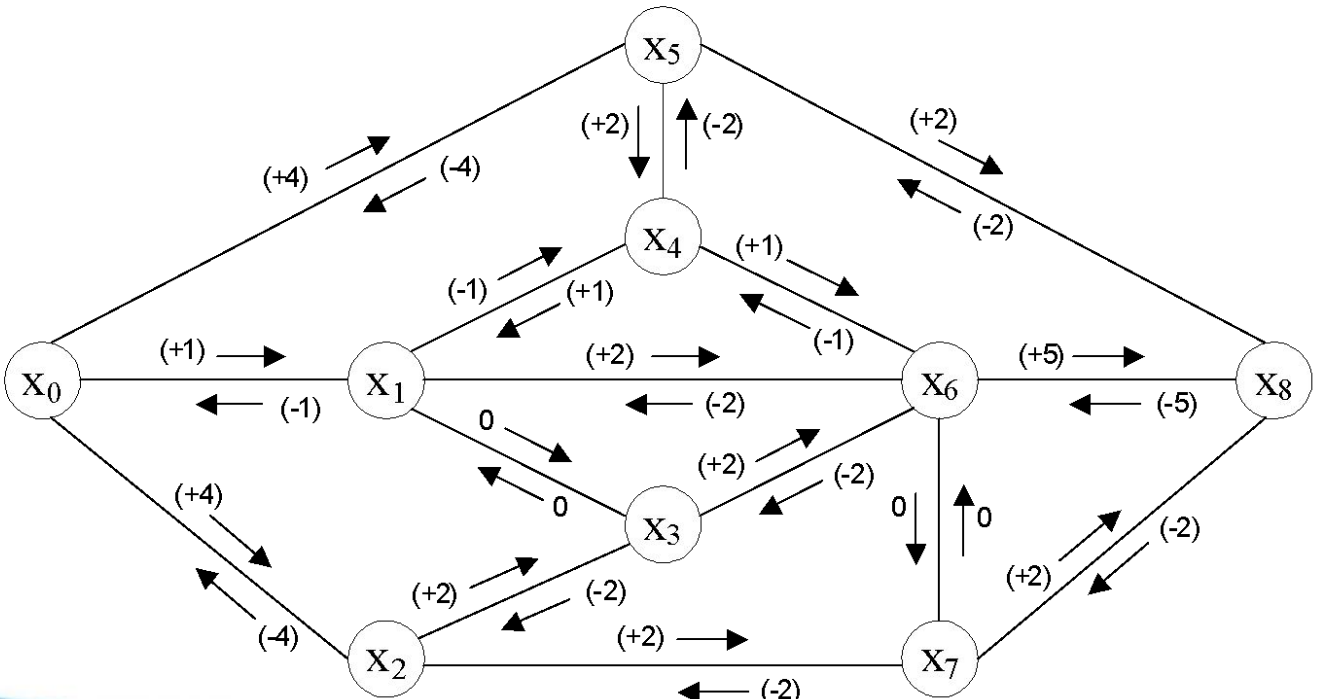
$\mu_5 = \{ X_0, X_2, X_7, X_8 \}$, $\theta_5 = \min\{4, 3, 2\} = 2$



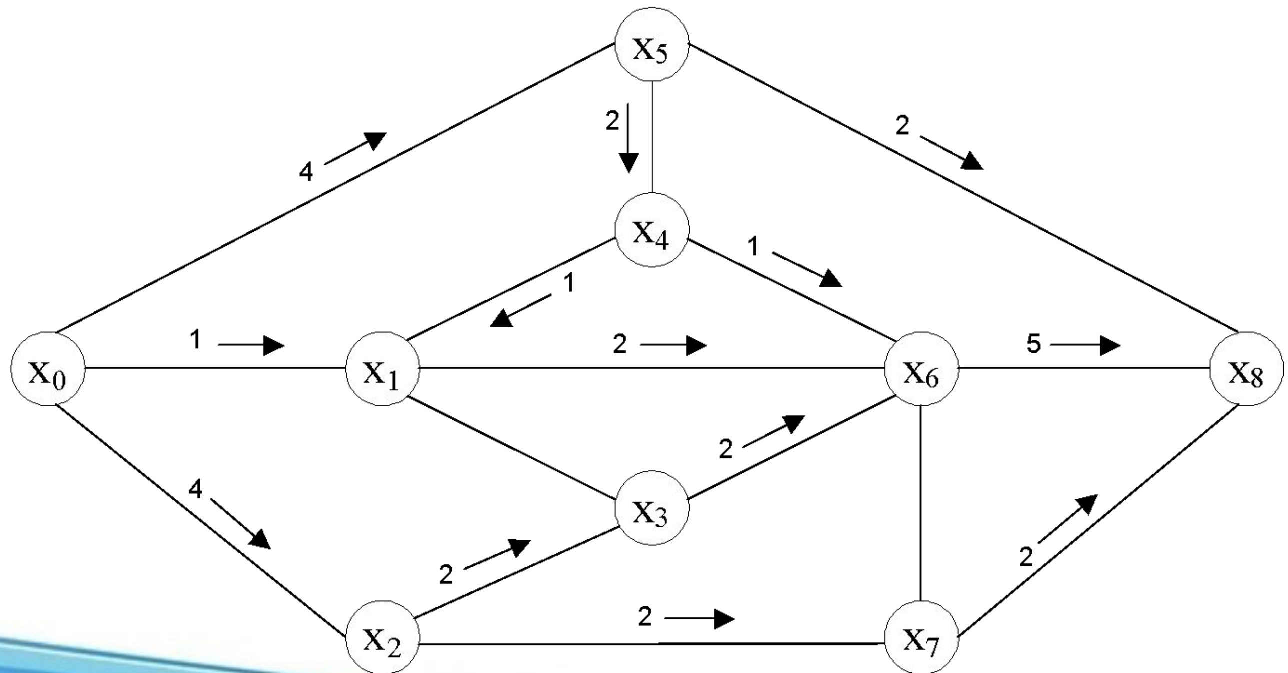
$\mu_6 = \{X_0, X_2, X_3, X_6, X_8\}, \quad \theta_6 = \min\{2, 2, 3, 3\} = 2$



Чтобы определить максимальный поток, следует вычесть из пропускных способностей дуг исходной сети измененные пропускные способности тех же дуг последней сети



Положительные значения найденных разностей дают величины z_{ij} потоков по соответствующим дугам (X_i, X_j) в максимальном потоке из X_0 в X_8. Искомый максимальной поток приведен на рисунке



Числа, стоящие у каждой дуги, показывают величину потока по данной дуге, а стрелки – направление потока по этой дуге. Величина максимального потока равна

$$w_{max} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 = 9$$

или, как видно из последнего графа

$$w_{max} = z_{05} + z_{01} + z_{02} = 4 + 1 + 4 = 9,$$

$$w_{max} = z_{58} + z_{68} + z_{78} = 2 + 5 + 2 = 9.$$

Ответ.

Максимальный поток по заданной сети равен 9 единицам.

Пусть имеется игра, в которой участвуют два игрока, причем каждый из игроков имеет конечное число стратегий.

Пусть игрок A имеет m стратегий – A_1, A_2, ... , A_m, а игрок B имеет n стратегий B_1,B_2, ... ,B_n.

Пусть игрок A выбрал стратегию A_i, а игрок B – стратегию B_j. Тогда выбор игроками стратегий A_i и B_j однозначно определяет исход игры – *выигрыш* a_{ij} игрока A и *выигрыш* b_{ij} игрока B, причем эти выигрыши связаны равенством $b_{ij} = - a_{ij}$ (отрицательный выигрыш обычно называют *проигрышем*).

Значения a_{ij} выигрыша при каждой паре стратегий (в каждой ситуации) $\{A_i, B_j\}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (если они известны), удобно записывать или в виде:

1) прямоугольной таблицы, где строки – стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

2) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Равновесная ситуация

Два игрока A и B, не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного (r), зеленого (g) или синего (b) цветов, сравнивают цвета кружков и расплачиваются друг с другом так, как показано в матрице игры

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(строки – стратегии игрока A, а столбцы – стратегии игрока B).

Считая, что эта игра повторяется многократно, необходимо определить оптимальные стратегии каждого из игроков.

Анализ стратегии игрока A.

Выбирая стратегию игрока A необходимо принимать в расчет ответную стратегию игрока B, которую он может выбрать так, чтобы свести выигрыш игрока A к минимуму.

На стратегию A_r он может ответить стратегией B_r (минимальный выигрыш равен -2 означает проигрыш игрока A, равный 2),

на стратегию A_g – стратегией B_g или B_b (минимальный выигрыш игрока A равен 1),

на стратегию A_b – стратегией B_g (минимальный выигрыш игрока A равен -3).

	B_r	B_g	B_b	
A_r	-2	2	-1	-2
A_g	2	1	1	1
A_b	3	-3	1	-3

…писаны в правом столбце таблицы

Maxmin. Игрок *A* останавливает свой выбор на стратегии *Ag,* при которой его минимальный выигры[illegible] …сел -2, 1 и -3 максимальным является 1

	B_r	B_g	B_b	
A_r	-2	2	-1	-2
$\boldsymbol{A_g}$	**2**	**1**	**1**	**1**
A_b	3	-3	1	-3

$$max\ min = 1$$

Если игрок *A* будет придерживаться этой стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший 1, при любом поведении противника в игре.

Аналогичные рассуждения можно провести и за игрока *B*. Т. к. игрок *B* заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш игрока *A* в минимум, то ему нужно проанализировать каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша игрока *A*.

Выбирая свою стратегию, игрок B должен учитывать, что при этом стратегией его противника А может оказаться та, при которой выигрыш игрока A будет максимальным:

– на стратегию B_r он может ответить стратегией A_b (максимальный выигрыш игрока A равен 3),

– на стратегию B_g – стратегией A_r (максимальный выигрыш игрока A равен 2),

– на стратегию B_b – стратегией A_g или A_b (максимальный выигрыш игрока A равен 1).

	B_r	B_g	B_b	
A_r	-2	2	-1	-2
A_g	2	1	1	1
A_b	3	-3	1	-3
	3	2	1	

аписаны в нижней строке таблицы

Minmax. Игрок *B* остановит свой выбор на стратегии B_b, при которой максимальный выигрыш игро

чисел 3, 2 и 1 минимальным является 1

	B_r	B_g	$\boldsymbol{B_b}$	
A_r	-2	2	**-1**	-2
A_g	2	1	**1**	1
A_b	3	-3	**1**	-3
	3	2	**1**	

$$min\ max = 1$$

Если игрок *B* будет придерживаться этой стратегии, то при любом поведении противника он проиграет не больше 1.

В рассматриваемой игре числа maxmin и minmax совпали:

$$max\ min = min\ max = 1$$

стратегии A_g и B_b

оптимальными

ими игроков *A* и *B*

	B_r	B_g	$\boldsymbol{B_b}$
A_r	-2	2	-1
$\boldsymbol{A_g}$	2	1	**1**
A_b	3	-3	1

В общем виде: $\max_i \min_j a_{ij} = \alpha \qquad \min_j \max_i a_{ij} = \beta$

Число α называется *нижней ценой игры*.

Число β называется *верхней ценой игры*.

Если $\alpha=\beta$ то ситуация оказывается равновесной, и ни один из игроков не заинтересован в том, чтобы ее нарушить.

В этом случае, общее значение α и β называется просто ценой игры и обозначается через $\nu = \alpha = \beta$.

Цена игры совпадает с элементом a_{ij} матрицы игры A, рас положенным на пересечении i-й строки (стратегия A_i игрока A) и j-го столбца (стратегия B_j игрока B) – минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Этот элемент называют *седловой точкой матрицы A*, или *точкой равновесия*, а про игру говорят, что она *имеет седловую точку.*

Стратегии A_i и B_j, соответствующие седловой точке, называ ются *оптимальными*.

Смешанные стратегии

Пусть имеется произвольная $m \times n$ игра, заданная $m \times n$ –матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Т.к. игрок A имеет m чистых стратегий, то его смешанная стратегия может быть описана набором m неотрицательных чисел $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \ldots, p_m \geq 0,$ сумма которых равна 1,

.

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Смешанная стратегия второго игрока В, имеющего *n* чистых стратегий, описывается набором *n* неотрицательных чисел

$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, ..., q_n \geq 0,$ сумма которых равна 1,

$$\sum_{k=1}^{k} q_k = 1$$

Задав два набора $P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ и $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ можно оказаться в ситуации смешанных стратегий.

Математическое ожидание выигрыша игрока *A* в условиях ситуации в смешанных стратегиях (*P*, *Q)* равно

$$M(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_i q_j a_{ij}$$

Это число принимается за *средний выигрыш* игрока *A* при смешанных стратегиях $P=\{p_1,p_2,...,p_m\}$ · $Q=\{q_1,q_2,...,q_n\}$

Стратегии $P^*=\{p_1^*,p_2^*,...,p_m^*\}$ и $Q^*=\{q_1^*,q_2^*,...,q_n^*\}$ называются *оптимальными смешанными стратегиями* игроков *A* и *B* соответственно, если

$$M(P,Q^*)\le M(P^*,Q^*)\le M(P^*,Q)$$

Пара (P^*,Q^*) называется *решением игры*, а число $v=M(P^*,Q^*)$ – *ценой игры.*

Пример.

Пусть имеется игра, заданная 2×6 матрицей:

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Найти цену игры и оптимальные стратегии игроков *A* и *B*.

Решение.

Шаг 1. Анализ игры на наличие седловой точки.

Нижняя цена игры равна –1, верхняя цена игры равна 1.

Седловой точки нет. Решение игры нужно искать в смешанных стратегиях.

Шаг 2. Вычисление средних выигрышей игрока А (проводится при условии, что игрок *B* выбирает только чистые стратегии).

Из таблицы

$$\begin{array}{c|cccccc} p & 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1-p & -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}$$

легко получить:

(*1*): $\omega = 6p - 2(1-p)$,

(*2*): $\omega = 4p - 1(1-p)$;

(*3*): $\omega = 3p + 1(1-p)$,

(*4*): $\omega = 1p + 0(1-p)$,

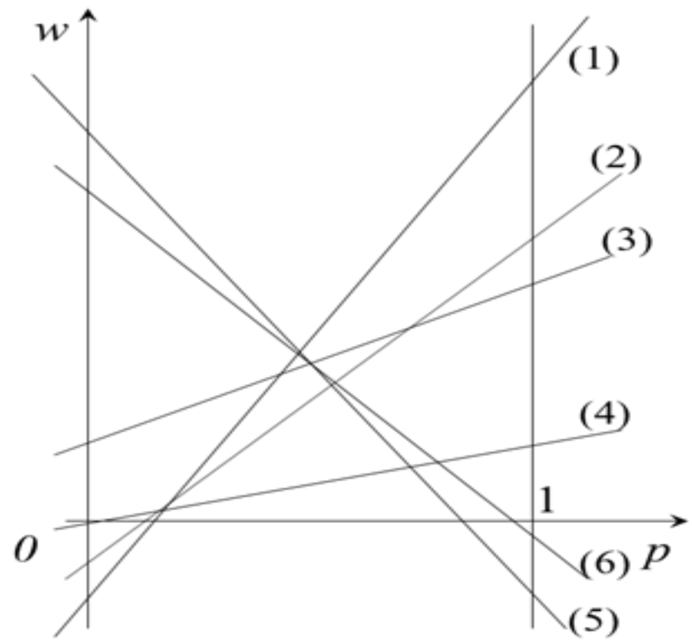
(*5*): $\omega = -1p + 5(1-p)$,

(*6*): $\omega = -1p + 5(1-p)$;

$\omega = 0p + 4(1-p)$

Шаг 3. Построение нижней огибающей.

Аккуратно построив на координатной плоскости (p, ω) все шесть прямых, уравнения которых получены на 2-м шаге, находится их нижняя огибающая.



Шаг 4. Отыскание цены игры и оптимальной смешанной стратегии игрока А.

При аккуратном построении нижней огибающей нетрудно определить какие две из построенных шести прямых пересекаются в ее наивысшей точке.

В данном случае это прямые:

(*4*): $\omega =, p$

(*5*): $\omega = -. p + 5(1 - p)$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \omega = p \\ \omega = -p + 5(1 - p) \end{cases}$$

вычисляется p^0:

$p = -p + 5(1 - p),$

$7p = 5,$

$$p^0 = \frac{5}{7} \qquad \omega^0 = \frac{5}{7}$$

Верхняя точка p^0 построенной нижней огибающей определяет цену игры v и оптимальную стратегию $P^0 = \{p^0, 1 - p^0\}$ игрока A.

Цена игры $v = \frac{5}{7}$, а оптимальная стратегия игрока A равна $P^0 = \left\{\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right\}$

Зная стратегии игрока A определим оптимальную смешанную стратегию $Q^0 = \{q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0, q_5^0, q_6^0\}$ игрока B.

Для этого:

Шаг 1. Положить

$$q_1^0 = 0 \qquad q_2^0 = 0 \qquad q_3^0 = 0 \qquad q_4^0 = q \qquad q_5^0 = 1 - q \qquad q_6^0 = 0$$

(выделяя тем самым из шести чистых стратегий игрока B стратегии B_4 и B_5, которым соответствуют прямые (4) и (5), определяющие наивысшую точку нижней огибающей).

Шаг 2. Приравнять любой из двух средних выигрышей игрока *B* (игрок *A* выбирает только чистые стратегии), отвечающих предложенной смешанной стратегии

0	0	0	q	1- q	0
6	4	3	1	-1	0
-2	-1	1	0	5	4

к цене игры

при A_1: $$1 \cdot q - 1 \cdot (1 - q) = \frac{5}{7}$$

при A_2: $$0 \cdot q + 5 \cdot (1 - q) = \frac{5}{7}$$

Шаг 3. Получить результат

$$q^0 = \frac{6}{7}$$

Полное решение игры имеет следующий вид

$$P^0 = \left\{\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right\} \qquad Q^0 = \left\{0,0,0,\frac{6}{7},\frac{1}{7},0\right\} \qquad v = \frac{5}{7}$$

Дерево решений — это графическое изображение процесса принятия решений, в котором отражены альтернативные решения, альтернативные состояния среды, соответствующие вероятности и выигрыши для любых комбинаций альтернатив и состояний среды.

Схему дерева решений используют, когда нужно принять несколько решений в условиях неопределенности, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего или исходов испытаний.

Дерево решений состоит из *узлов* и *ветвей*. Располагаются деревья слева направо.

Узлы дерева бывают двух видов:

1) места, где принимаются решения, обозначают квадратами □;

2) места появления исходов — кругами ○.

Ветви обозначают возможные альтернативные решения, которые могут быть приняты, и возможные исходы, возникающие в результате этих решений:

1) (------) – соединение квадратов возможных решений

2) (——) – соединение кружков возможных исходов

Когда все решения и их исходы указаны на дереве, просчитывается каждый из вариантов, и в конце проставляется его денежный доход.

Все расходы, вызванные решением, проставляются на соответствующей ветви.

Для каждой альтернативы следует просчитать *ожидаемую стоимостную оценку (EMV)* — максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов

Пример.

Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию (ПЛ), использующую новейшую технологию. Если новая ПЛ будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн. рублей. Если же она откажет, компания может потерять 150 млн. рублей.

По оценкам главного инженера, существует 60% шансов, что новая ПЛ откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет ПЛ.

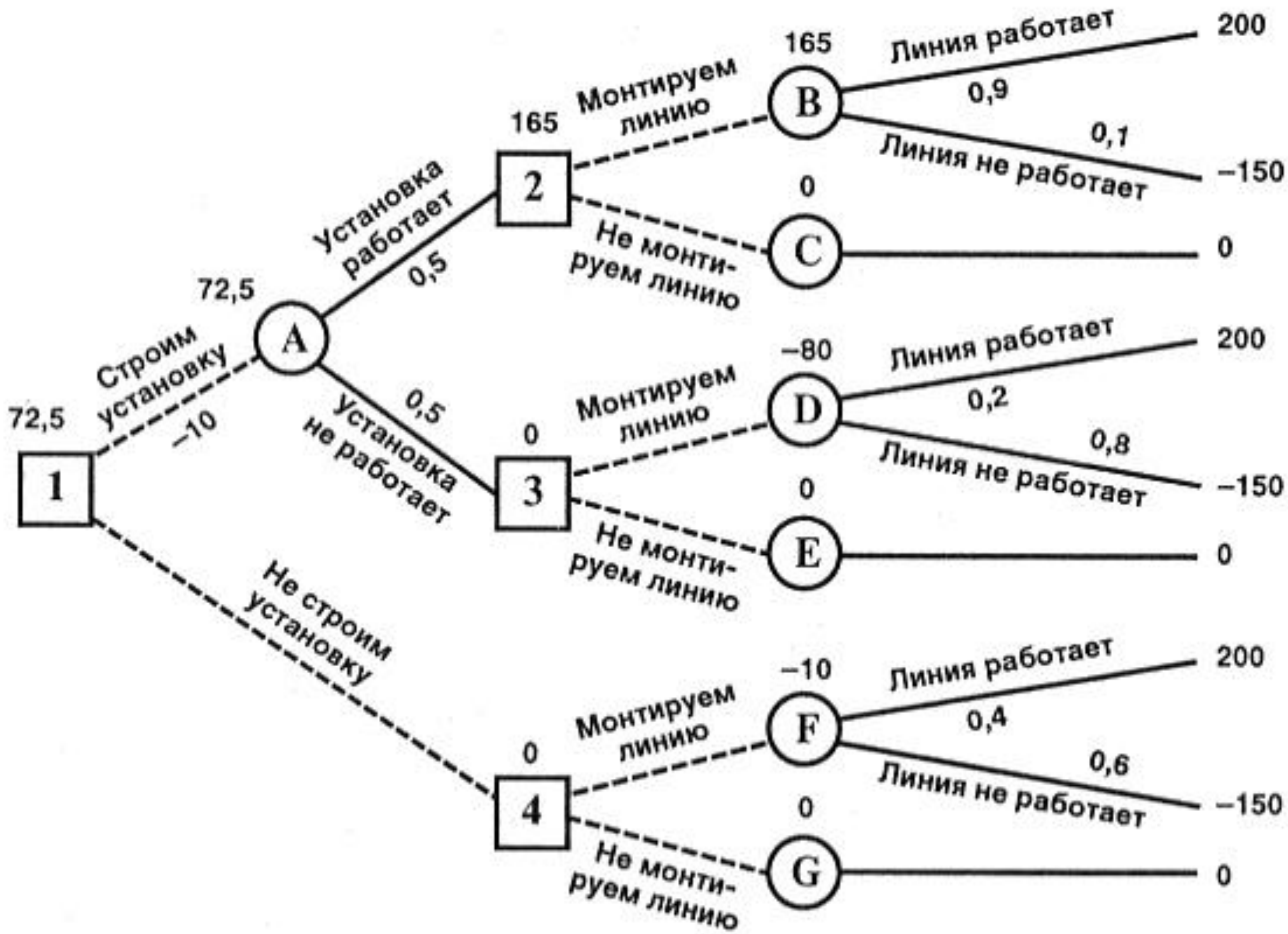
Эксперимент обойдется в 10 млн. рублей.

Главный инженер считает, что существует 50% шансов, что экспериментальная установка будет работать.

Если экспериментальная установка будет работать, то 90% шансов за то, что смонтированная ПЛ также будет работать. Если установка не будет работать, то только 20% шансов за то, что ПЛ заработает.

Следует ли строить экспериментальную установку? Следует ли монтировать ПЛ? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

Дерево решений



Решение.

В узле *F* возможны исходы «линия работает» с вероятностью 0,4 (что приносит прибыль 200) и «линия не работает» с вероятностью 0,6 (что приносит убыток -150). Следовательно, оценка узла *F* определяется следующим образом:

$$EMV(F) = 0{,}4 \cdot 200 + 0{,}6 \cdot (-150) = -10.$$

Это число записывается над узлом *F*.

Оценка узла G: $EMV(G) = 0.$

В узле 4 необходимо выбрать между решениями:

1) «монтируем линию» (оценка этого решения EMV(F) = -10) ,

2) «не монтируем линию» (оценка этого решения EMV(G) = 0)

$$EMV(4) = \max \{EMV(F), EMV(G)\} =$$

$$= \max \{-10, 0\} = 0 = EMV(G).$$

Эта оценка записывается над узлом 4, а решение «монтируем линию» отбрасывается и зачеркивается.

Аналогично оцениваются узлы B, C, 2, D, E, 3, A:

EMV(B) = 0,9 · 200 + 0,1 · (-150) = 180 – 15 = 165.

EMV(C) = 0.

EMV(2)= max{EMV(B), EMV(C} = max {165, 0} = 165 = EMV(5).

Поэтому в узле 2 отбрасывается возможное решение «не монтируем линию».

EMV(D) = 0,2 · 200 + 0,8 · (-150) = 40 – 120 = -80.

EMV(E) = 0.

EMV(3) = max {EMV(D), EMV(E)} = max {-80, 0} = 0 = EMV(E).

Поэтому в узле 3 отбрасывается возможное решение «монтируем линию».

EMV(A) = 0,5 · 165 + 0,5 · 0 – 10 = 72,5.

EMV(l)=max{EMV(A), EMV(4)}= max {72,5; 0}= 72,5= EMV(A).

Поэтому в узле 1 отбрасывается возможное решение «не строим установку».

Ответ.

Экспериментальную установку строить следует.

Если установка работает, то монтируем линию. Если установка не работает, то линию монтировать не надо.

Ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения равна 72,5 млн. рублей.

Список рекомендуемой литературы

1. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений: учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2001.

2. Фомина Т.П. Элементы исследования операций и теории игр: учебное пособие. 2–е изд., перераб. И. доп. – М.: SPSL–«Русская панорама», 2006.

3. Палий И.А. Линейное программирование: Учебное пособие. – М.: Эксмо, 2008.