

Лекция №2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

- Основные этапы построения математической модели:
- составляется описание функционирования системы в целом;
- составляется перечень подсистем и элементов с описанием их функционирования, характеристик и начальных условий, а также взаимодействия между собой;
- определяется перечень воздействующих на систему внешних факторов и их характеристик;
- выбираются показатели эффективности системы, т.е. такие числовые характеристики системы, которые определяют степень соответствия системы ее назначению;
- составляется формальная математическая модель системы;
- составляется машинная математическая модель, пригодная для исследования системы на ЭВМ.

- Требования к математической модели:
- Требования определяются прежде всего ее назначением, т.е. характером поставленной задачи:
- "Хорошая" модель должна быть:
- целенаправленной;
- простой и понятной пользователю;
- достаточной с точки зрения возможностей решения поставленной задачи;
- удобной в обращении и управлении;
- надежной в смысле защиты от абсурдных ответов;
- допускающей постепенные изменения в том смысле, что, будучи вначале простой, она при взаимодействии с пользователями может становиться более сложной.

- **Математическая модель**, в широком смысле, это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Применительно к задачам исследования качества системы математическая модель должна обеспечивать адекватное описание влияния параметров и условий функционирования на показатели ее качества. Что касается точности модели, то ее уровень должен обеспечивать достоверное сравнительное оценивание и ранжирование по уровню качества альтернативных вариантов
- В основе изучения и моделирования процессов функционирования технических систем всегда лежит эксперимент - реальный или логический. Суть реального эксперимента состоит в непосредственном изучении конкретного физического объекта. В ходе логического эксперимента свойства объекта исследуются не на самом объекте, а с помощью его математической или содержательной (словесной) модели, изоморфной объекту с точки зрения изучаемых эксперименте свойств.

- Подавая на вход системы различные входные процессы и измеряя процесс на ее выходе, исследователь получает возможность установить и записать математически существующую между ними связь в виде уравнения, связывающего для каждого интервала времени значения входных и выходных воздействий и потому называемого уравнением «вход-выход». Кроме того, для адекватного отражения связи между входом и выходом системы в системотехнике вводится понятие «состояние». По своему смыслу состояние $z(t)$ представляет собой совокупность существенных свойств (характеристик) системы, знание которых в настоящем (в момент времени t) позволяет определить ее поведение в будущем (в моменты времени $t > t$). Благодаря этому понятию, уравнение “вход-выход”-состояние принимает вид:
 - $YT = A(T, z(t), XT), (2.1)$
 - где XT, YT - входной и выходной процесс на интервале времени T ;
 - $A(*)$ - оператор выходов.

- Согласно (2.1), выходной процесс полностью определяется входным процессом и начальным состоянием и не зависит от того, каким образом система была переведена в это состояние. Отсюда ясно, что уравнение (2.1) ограничивает класс рассматриваемых систем только такими системами, функционирование которых в настоящем не зависит от того, как они функционировали в прошлом.
- Для полного описания процесса функционирования системы необходимо задать условия определения состояния системы. Для этого вводится понятие уравнения состояния:
- $\mathbf{z}(t) = \mathbf{B}(t, \mathbf{z}(t), \mathbf{X}(t))$, (2.2)
- где
- $\mathbf{B}(\cdot)$ - оператор, устанавливающий однозначную зависимость $\mathbf{z}(t)$ от пары $(\mathbf{z}(t), \mathbf{X}(t))$, которая задана на интервале t , и называемый оператором перехода.
- Уравнения (2.1) и (2.2) имеют достаточно логичное обобщение и на многомерный случай, когда каждая из компонент уравнений имеет векторный вид:

$$X \rightarrow \vec{X}, Y \rightarrow \vec{Y}, Z \rightarrow \vec{Z}$$

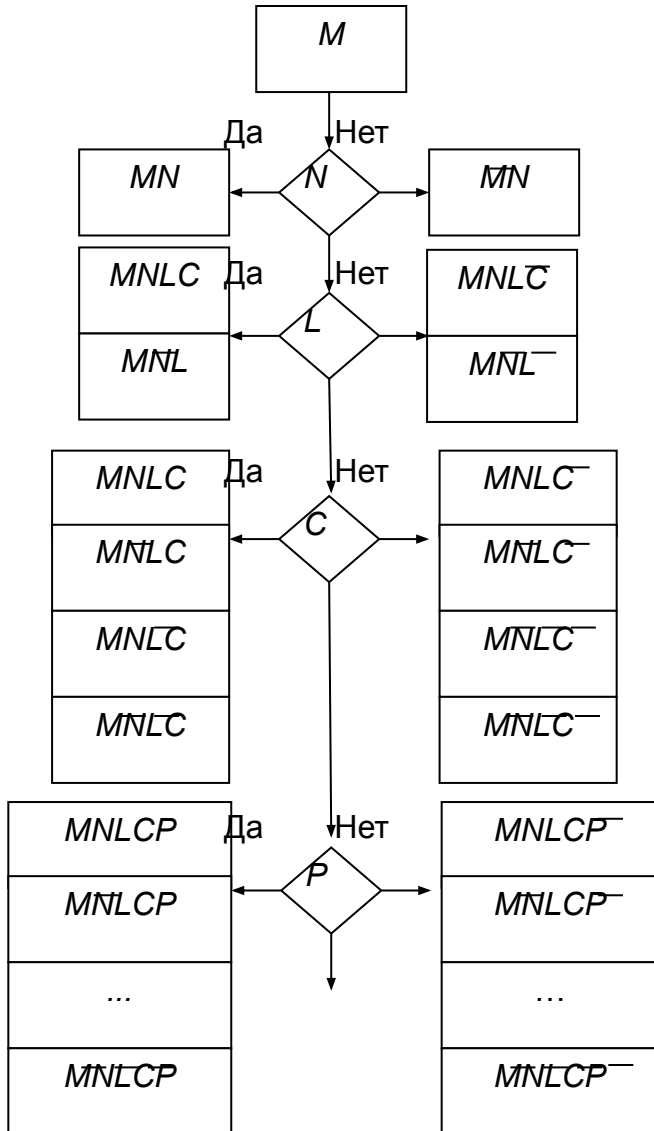
- Таким образом, модель функционирования системы должна обеспечивать прогнозирование процесса функционирования на всем интервале функционирования T (множество времени) по заданному вектору начального состояния записанном в векторном виде входному процессу (T). Согласно изложенному выше, для решения этой задачи достаточно задать множества допустимых значений входных X и выходных Y процессов, а также множество возможных состояний системы Z и операторы выхода A и перехода B . Модель функционирования системы без предыстории представляет собой кортеж
- $MF = \langle T, X, Y, Z, A, B \rangle$. (2.3)
- Если все компоненты в (2.3) известны, модель функционирования полностью определена и может быть использована для описания и изучения свойственных системе процессов функционирования. Множества и операторы, составляющие *общесистемную модель* (2.3), могут обладать различными свойствами, совокупность которых позволяет конкретизировать характер функционирования системы:
 - N – непрерывность;
 - L – линейность;
 - C – стационарность;
 - P – стохастичность (вероятность).
- Наделяя систему теми или иными свойствами общесистемная модель конкретизируется до *системной модели*.

- Системные свойства:
- 1). Если интервал функционирования системы $T = [a, b]$ представляет отрезок оси действительных чисел, заданный началом и концом, то система функционирует в непрерывном времени. Если, кроме того непрерывны операторы A и B , то система наз. непрерывной.
- 2). С т.зр. реакции на внешнее воздействие объекты подразделяют на линейные и нелинейные. Линейными наз. такой объект, реакция которого на совместное воздействие 2-х любых внешних возмущений равно сумме реакций на каждое из этих воздействий, приложенных к системе порознь.
 - - принцип суперпозиции,
 - $Z(0)=0$ (начальное состояние системы),
 - где A - оператор объекта, устанавливает связь входа и выхода.
 - Для линейных систем выполняется принцип суперпозиции.
- 3). Поскольку стационарная система при фиксированном начальном состоянии $Z(t_0)$ одинаково реагирует на эквивалентные, отличающиеся только сдвигом по времени, входные воздействия, то наложение интервала t_0, t на оси времени не оказывает влияния на процесс функционирования системы. Модель M для стационарных систем не содержит в явном виде интервал функционирования T .
- 4) Если в модели M операторы A и B каждой паре $(X, V, Z(t_0))$ (вход, состояние) ставят в соответствие единственные значения Y и Z , описываемая этой моделью система называется детерминированной. Для стохастической (вероятностной) системы Y и Z , случайные величины, заданные законами распределения.

- **Общесистемная и системные** модели функционирования (в дальнейшем термин «модель функционирования» для краткости может заменяться термином «модель» с сохранением исходного смысла) обладают исключительно высокой степенью общности.
- ***Конструктивные модели*** в сущности представляют собой алгоритмы, пользуясь которыми, можно определить значения одних переменных, характеризующих данную систему, по заданным или измеренным значениям других переменных.

- Таким образом, наиболее важные и принципиальные этапы построения модели функционирования системы определяются процессом реализации системотехнической цепочки преобразований **«общесистемная модель системная модель конструктивная модель машинная модель»**.
- Моделирование процессов функционирования конкретной системы должно начинаться с записи всех компонент общесистемной модели (2.3), определения их содержательного смысла и областей изменения. Согласно модели (2.3), необходимо определить: интервал времени, на котором нас интересует функционирование системы; множество входных и выходных воздействий и области их возможных изменений; множество характеристик состояния системы и область их возможных изменений.

Классификация системных моделей



MNLCP - легко мат.
описание

MNLCP - нет
адекватного мат.
описания (трудно)

Инверсия (*N*) –
данное свойство не
выполняется,
например нет
свойства
непрерывности

- Общесистемная и системные модели обладающая высшей степенью общности устанавливают закономерности, которые присущи всем или достаточно широкому классу систем. В инженерной практике используют так называемые конструктивные модели, пригодные для инженерных расчетов.
- КМ – алгоритмы, пользуясь которыми можно определить значения одних переменных, характеризующих систему по заданным или измеренным значениям других переменных.
- КМ – может и должна вырастать из большой общей системной модели путем конкретизации ее свойств.
- При построении моделей функционирования систем применяют следующие подходы:
 - непрерывно-детерминированный подход (дифференцированные уравнения);
 - дискретно-детерминированный (конечные автоматы);
 - дискретно-стохастический подход (вероятностные автоматы);
 - непрерывно-стохастический подход (системы СМО)
 - обобщенный / универсальный подход (агрегативные системы)

- **Модели данных**
- **Сетевая модель**
- В сетевой модели основным внутренним ограничением является требование функциональности связей, т. е. непосредственно могут использоваться только связи 1:1, 1:M, M:1 (функциональной будет обратная связь). Это означает, что каждый экземпляр записи не может быть членом более чем одного экземпляра набора каждого типа. И у каждой записи члена в данном наборе только одна - запись-владелец набора.
- *Пример:* (очевидный, тривиальный) группа студент
- номер группы - владелец набора; запись студента - член набора.
- При этом непосредственное представление связей M:N (студент - преподаватель) невозможно: для представления этих связей вводятся вспомогательные типы записей и две функциональные связи типа 1:M.
- На связи между именами данных могут быть наложены явные ограничения, выражения, зависящие и не зависящие от времени свойства связей. Они задаются типом членства в наборе.
- Фиксированное членство. Запись нельзя разъединить с владельцем или перевести в единственный способ исключения из набора - удаление
- университет - дисплейные классы.
- Обязательное членство. Можно переводить из набора в набор. Персонал дисплейного класса (дежурные инженеры).
- Необязательное членство. Запись можно исключить из набора в произвольный момент времени и без включения в другой набор.
- **Варианты включения в набор:**
- - автоматический тип членства в наборе;
- - ручной тип членства в наборе (явное управление пользователем).

- **Сетевая модель:**
- отношения "один:много" иерархической модели иногда приводит к дублированию объектов, которые имеют связи типа "многие ко многим". Модель данных, реализующая такой тип связей - это ациклический граф.
- *Пример:* снабжение цехов некоторого производства исходными материалами, иерархическая модель - сетевая модель.
- **Организация данных определяется в терминах:**
- *элемент данных*
- агрегат данных - совокупность элементов или других агрегатов; пример: адрес = город, улица, дом, квартира.
- *Запись* - агрегат, не входящий в состав других агрегатов, основная единица обработки.
- *Ключ* - некоторая совокупность элементов, идентифицирующих запись.
- *Групповое отношение (набор)* - иерархическое отношение между записями двух типов, записи одного типа - владельцы отношения, записи второго - члены отношения или подчиненные.
- поликлиника
- диспансеризация основная
- житель работа организация

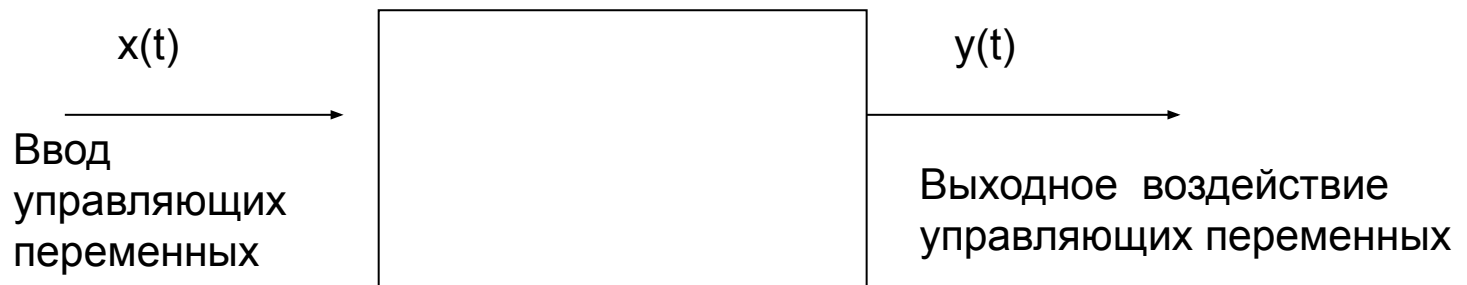
- Жительство в групповом отношении может быть обязательным и необязательным, (т.е. запись может или не может существовать без владельца.) Обязательное членство может быть фиксированным (автор - книга), или возможен переход к другому владельцу (смена места работы).
- **Операции:**
- *Запомнить* - занести в БД и включить в групповые отношения; включить в групповое отношение - связать подчиненную запись с владельцем;
- *переключить*;
- *обновить* - изменить в извлеченной записи значения элементов;
- *извлечь* - или по ключу или используя групповые отношения (от владельца можно перейти к записям - членам, а от записи - члена к владельцу);
- *удалить* - если удаляемая запись - владелец в групповом отношении, то анализируется класс членства подчиненных записей. Обязательные должны быть откреплены от владельца, фиксированные удаляются вместе с владельцем, необязательные останутся в БД;
- *исключить из группового отношения* - разорвать связь между записью - владельцем и записью членом.

- **Непрерывно детерминированные модели (Д - схемы).**
- Рассмотрим особенности непрерывно детерминированного подхода на примере, используя в качестве ММ дифференциальные уравнения.
- Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными будут функции одной переменной или нескольких переменных, причём в уравнение входят не только их функции но их производные различных порядков.

Пусть имеем уравнение:

$$a_0 \frac{d^k y}{dt^k} + a_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + a_k y = x$$

уравнение «ВХОД-ВЫХОД» (1)



- Решение уравнения (1) зависит от $K(t)$, от начальных условий . Эти координаты определяют начальное состояние системы.
- Левую часть нужно привести к уравнению 1-го порядка.

- - переменные состояния

- (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \\ z_1 = z_2 \\ \bullet \\ z_2 = z_3 \\ \dots \\ \bullet \\ z_k = -\frac{a_k}{a_0} z_1 - \frac{a_{k-1}}{a_0} z_2 - \dots - \frac{a_1}{a_0} z + \frac{1}{a_0} x \end{array} \right.$$

- (2) – уравнение в нормальной форме Коши, которое можно записать в матричной форме

$$\begin{cases} \bullet \\ \dot{z} = Az + Bx \\ y = Cz + Dx \end{cases}$$

- (3) – уравнение в пространстве состояний
- z – в-р столбец переменного состояния

$$Z = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_k \end{vmatrix}, \text{ необходимое условие}$$

- матрица коэффициентов координат
состояния

- - матрица коэффициентов входных воздействий
- - некоторые числовые матрицы
- Сопоставляя (2) и (3) получим числовые матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_k}{a_0} & -\frac{a_{k-1}}{a_0} & -\frac{a_{k-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

- $D = 0$ (4)
- В общем случае, когда передаточная функция системы имеет полиномиальную функцию, где, то матрица A определяется выражением (4), а B имеет вид