ВИЩА МАТЕМАТИКА

для студентів ОС "Бакалавр"

ОПП: **122 "Комп'ютерні науки"**

Автор:

Доцент кафедри комп'ютерних наук, к.е.н.

Сирмаміїх Ірина Вікторівна

Диференційне числення функції однієї змінної

- **Тема 1.** Поняття похідної функції, її геометричний та механічний зміст. Основні правила і формули диференціювання. Похідна складеної функції.
- **Тема 2.** Неявно задана функція та її похідна. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції. Похідна функції, заданої параметрично.
- **Тема 3.** Диференціал функції. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.

Диференційне числення функції однієї змінної

- **Тема 4.** Похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків.
- **Тема 5.** Застосування диференціального числення до знаходження границі функції. Правила Лопіталя.
- **Тема 6.** Застосування диференціального числення для дослідження функцій і побудови їх графіків

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с. - ISBN 966-7946-15-0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://library.tneu.edu.ua/files/EVD/matematica/VM_pidr.pdf. - Назва з екрану.
2. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.
3. Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу "Вища математика": Частина І. – Ужгород: ДВНЗ УжНУ, 2015. – 96 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3472/1/Methodychka_VM_Phys.pdf

Тема1: Поняття похідної функції. Основні правила та формули диференціювання.

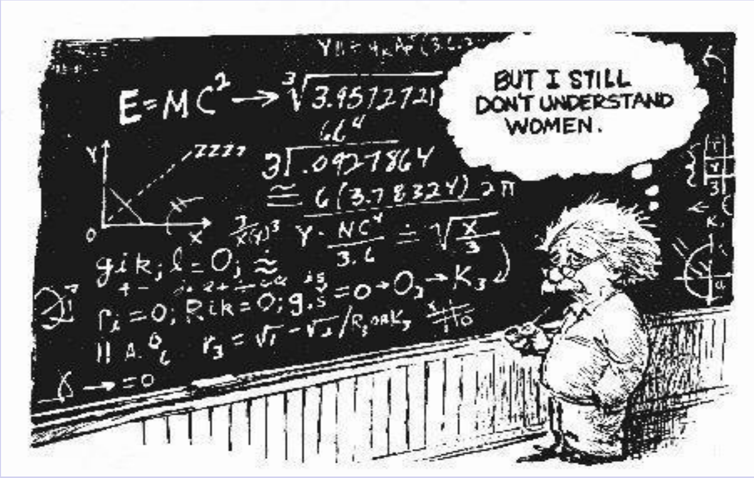
Похідна складеної функції

- *1.* **Означення похідної**
- **2. Геометричний зміст похідної**
- **3. Механічний зміст похідної**
- **4. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції**
- **5. Основні правила диференціювання**
- **6. Похідні від основних елементарних функцій.**
- **7. Похідна складеної функції**

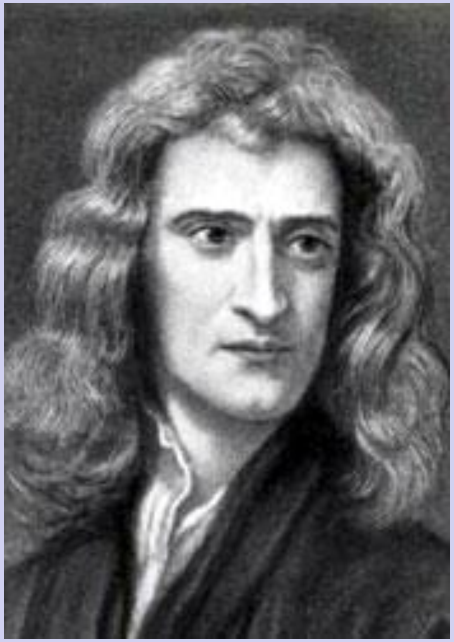
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Поняття похідної є одним з основних понять математичного аналізу.

Розділ математики, в якому вивчається поняття похідної та її застосування до дослідження функцій, називають ***диференціальним численням***.



ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

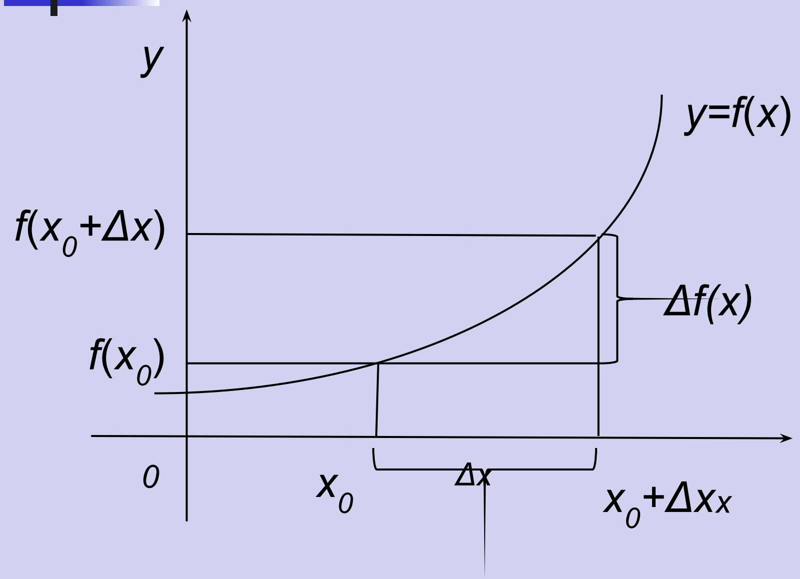


І. Ньютон

Г. Лейбніц

ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВЕЛИ ДО ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

Означення похідної



Графічне зображення приросту функції і приросту аргументу.

Похідною від функції *y=f(x)* за аргументом *x* називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Означення похідної (аналітичний вигляд)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ПОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

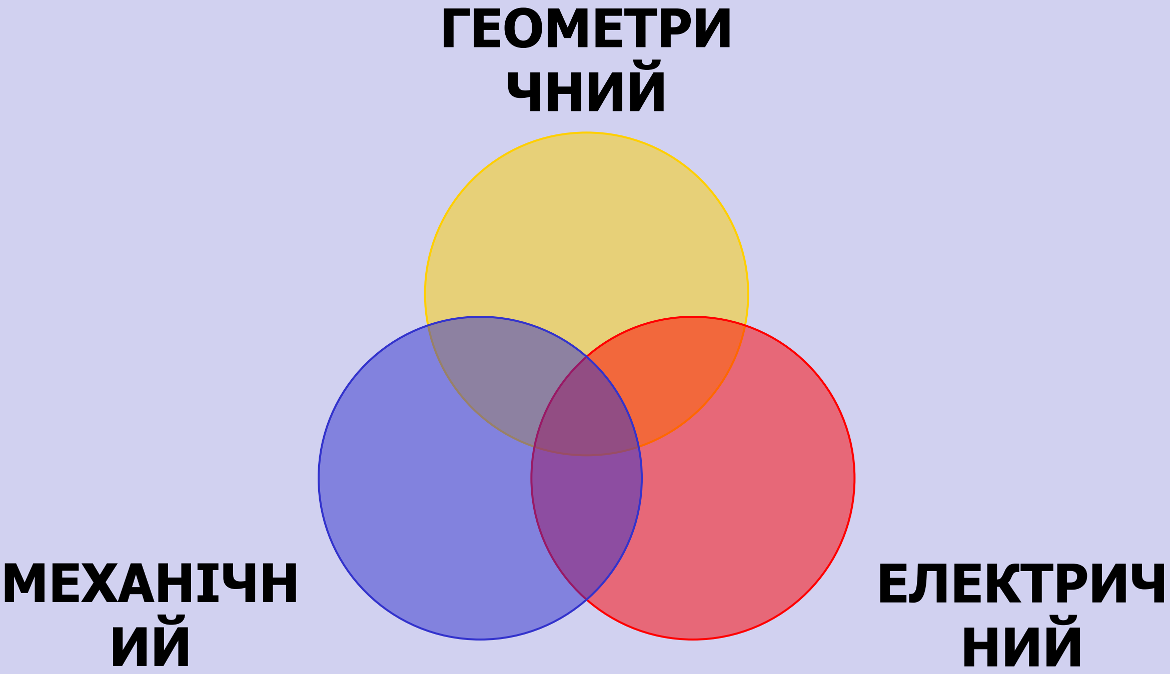
$y',\ y'_x,\ f'(x),$

позначення Лагранжа

$\frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$

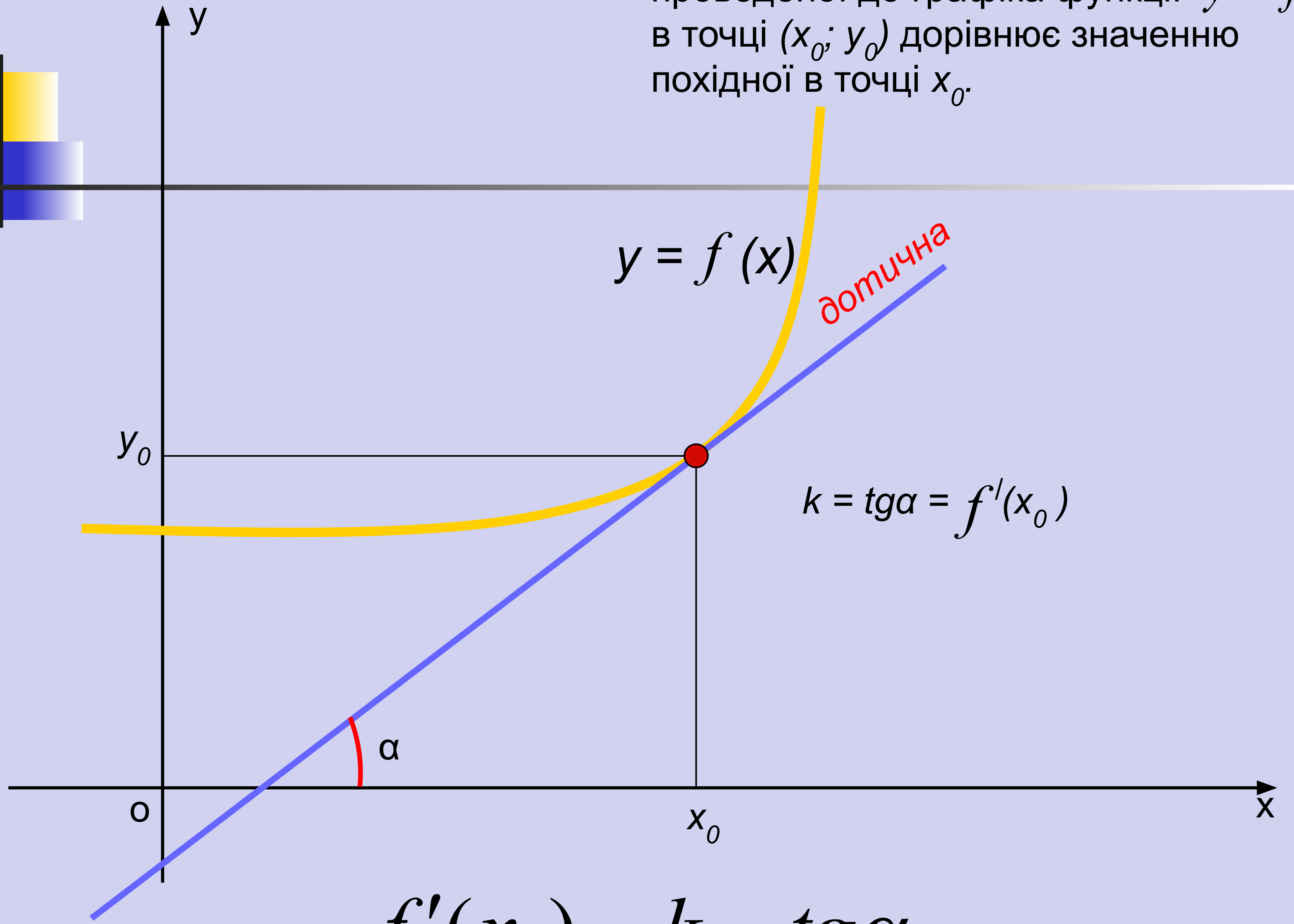
позначення Лейбніца

ЗМІСТ ПОХІДНОЇ



Геометричний зміст похідної:

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; y_0)$ дорівнює значенню похідної в точці x_0.



$$f'(x_0) = k = tg\alpha$$

Рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$

Дотичною до кривої в точці М називається граничне положення січної, якщо точки січної необмежено наближається вздовж кривої до точки М

Нормаллю до кривої (або поверхні) в заданій точці М називається пряма (або площина), яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної прямої (або площини) в цій точці кривої (поверхні).

Рівняння дотичної в точці $M(x_0; y_0)$ запишеться у вигляді

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі в цій точці буде

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Механічний зміст похідної функції

Нехай функція $y = f(x) = S(t)$

описує деякий фізичний процес:

x_0 – *координата точки*

$v(t_0)$- *швидкість точки в момент часу* t_0

$a(t_0)$ – *прискорення точки в момент часу* t_0

Механічний зміст похідної функції

$$S'(t_0) = \upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$ - *миттєва швидкість*

$$S''(t_0) = \upsilon'(t_0) = a(t_0)$$ - *прискорення*

- ***Миттєва швидкість*** прямолінійного руху дорівнює похідній шляху за часом руху

- Похідна від швидкості по часу(або друга похідна від шляху) є ***прискоренням***

ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

- Нехай $Q = Q(t)$ - кількість електрики, яка пройшла через поперечний переріз провідника за час t. Сила струму $i(t)$ в момент часу t є похідна від кількості електрики $Q(t)$ по часу t, тобто

$$i(t) = Q'(t)$$

Зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона диференційовна в кожній точці даного інтервалу.

Зв’язок між диференційовністю та неперервністю функції.

Зв’язок між неперервністю і диференційовністю функції встановлює теорема.

Теорема. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то у цій точці функція неперервна.

Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

Висновок: необхідною умовою диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x є її неперервність у цій точці.

Правила диференціювання

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim \frac{\Delta y}{} = f'(x)$.

Теорема 2. **Сталий множник можна виносити за знак похідної:**

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

Теорема 3. **Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:**

$$(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$$

Правила диференціювання

Теорема 4. **Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:**

$$(u \cdot \upsilon)' = u' \cdot \upsilon + \upsilon' \cdot u$$

Теорема 5. **Якщо чисельник і знаменник дробу диференційовні функції (знаменник не перетворюється в нуль), то похідна дробу також дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу:**

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u' \cdot \upsilon - \upsilon' \cdot u}{\upsilon^2}$$

Похідні від основних елементарних функцій

Похідна степеневої функції:

$$y = x^n$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Похідні від основних елементарних функцій:

Похідна показникової функції

$$y = a^x$$

$$y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

Похідні від основних елементарних функцій:

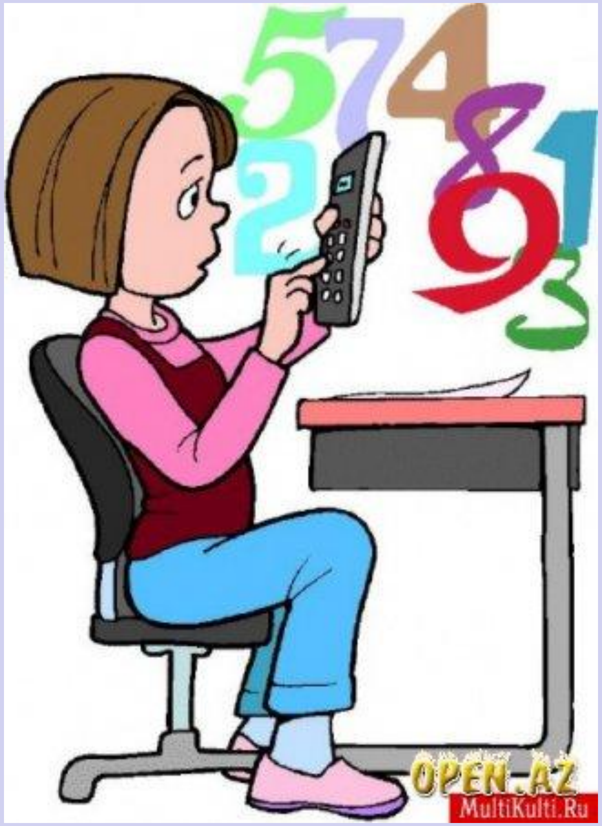
Похідна логарифмічних функцій

$$y = \log_a x$$

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$



Похідні від основних елементарних функцій

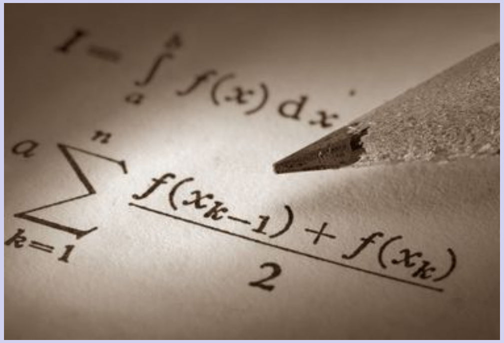
Похідна тригонометричних функцій

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$



$$y = tgx$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = ctgx$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Похідні від основних елементарних функцій:

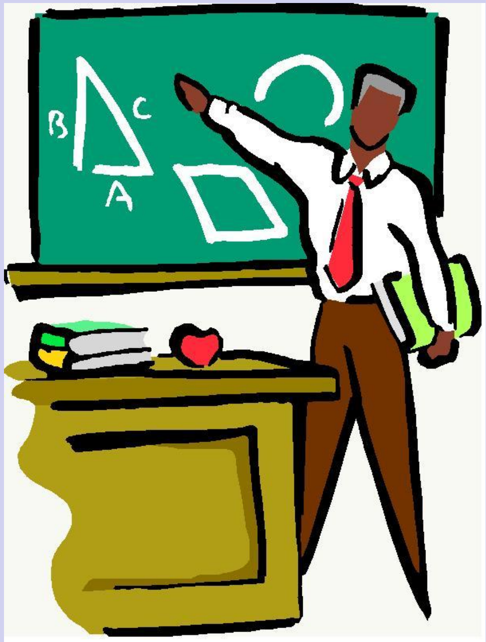
Похідні від обернених тригонометричних функцій

$$y = \arcsin x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = arctgx$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$



$$y = \arccos$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = arcctgx$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Приклади визначення похідної функції

№1

$$(y)' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$$

№2

$$(y)' = (\sqrt{x} \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$$

№3

$$(y)' = (\frac{x}{\cos x})' = \frac{(x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot x}{\cos^2 x} = \frac{1 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

Похідна складеної функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційовною в точці*, якщо у цій точці вона має похідну, тобто якщо існує кінцева границя: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Приклади знаходження похідних складених функцій

№1

$$(\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot (4x)' = -4\sin 4x$$

№2

$$(\cos^3 4x)' = 3\cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = -12\cos^2 4x \cdot \sin 4x$$

Контрольні запитання

1. **Означення похідної.**
2. **Алгоритм знаходження похідної за означенням.**
3. **Механічний зміст похідної.**
4. **Геометричний зміст похідної.**
5. **Електричний зміст похідної.**
6. **Залежність між неперервністю і диференційовністю функції.**
7. **Похідна суми.**
8. **Похідна добутку.**
9. **Похідна частки.**
10. **Похідна складеної функції.**
11. **Похідна функції** $y = e^x$ **.**
12. **Похідна функції** $y = a^x$ **.**
13. **Похідна логарифмічної функції.**
14. **Похідна степеневої функції.**
15. **Похідні тригонометричних функцій.**
16. **Похідні обернених тригонометричних функцій.**