Полный дифференциал функции нескольких переменных

Лекция 2

Полное приращение функции 2-х переменных

Если обеим переменным дать приращение, то функция получит полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Определение дифференцируемой функции

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой в точке М(x,y),*** если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \ ,$$

где Δx и Δy -произвольные приращения аргументов x и y в некоторой окрестности точки М(x,y), А и В – постоянные, независящие от Δx и Δy , $o(\rho)$- бесконечно малая более высокого порядка, чем

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ -расстояние между $M(x,y)$ и

$M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$

Определение дифференциала

Главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции $z = f(x, y)$ называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается dz или $df(x,y)$.

Таким образом, $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Формула для вычисления дифференциала

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке М(x,y),то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x, y)$и $f'_y(x, y)$, причем $f'_x(x, y)$ =*A*, а $f'_y(x, y)$ =*B* .

Так что, $\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + 0(\rho)$

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \quad .$$

Если положить $\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy$,то

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

При малых ρ $\Delta z \approx dz$, то есть

$$f\left(x+\Delta x,\, y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)\approx f'_x\left(x,y\right)\Delta x+f'_y\left(x,y\right)\Delta y,$$

или

$$f\left(x+\Delta x,y+\Delta y\right)\approx f\left(x,y\right)+f'_x\left(x,y\right)\Delta x+f'_y\left(x,y\right)\Delta y.$$

Пример. Вычислить приближенно

$$ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right).$$

Дифференциалы высшего порядка

Дифференциалом второго порядка функции $z=f(x,y)$ называется

$$d^2z = d(dz)$$

Вообще: $d^nz = d(d^{n-1}z)$

Если x и y независимые переменные, то

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

Экстремумы функции двух переменных

Определение. Говорят, что в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x,y)$ этой окрестности, отличных от $P_0(x_0, y_0)$, выполнено неравенство

$$f(P_0) > f(P).$$

Аналогично определяется минимум функции.

Минимум и максимум функции называются ее экстремумами.

Экстремумы функции двух переменных

***Теорема (необходимое условие экстремума*)**. В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых выполнены эти условия, называются *критическими.*

Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Теорема. Пусть функция *z=f*(*x,y*) определена и имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ в которой $z'_x = z'_y = 0$. Если при этом в этой точке выполнено условие $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, то точка M_0 является точкой экстремума функции, причем точкой максимума, если $z''_{xx} < 0$, и точкой минимума, если $z''_{xx} > 0$.

Если же в этой точке $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$, то экстремума в точке M_0 нет.

В том случае, если $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ в точке M_0 теорема ответа не дает.

Пример

Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \text{åñëè} \quad x > 0 \ \text{и} \ y > 0.$$

Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется абсолютным экстремумом функции (абсолютным минимумом или абсолютным максимумом соответственно) в этой области.

Известно, что непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений.

Абсолютный экстремум достигается функцией либо в критических точках, либо на границе области.

Пусть функция непрерывна в замкнутой ограниченной области *G*, дифференцируема внутри этой области. *Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, нужно*:

1)найти критические точки, принадлежащие этой области, и вычислить в них значения функции;

2)найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;

3)из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - y$$

в треугольнике, ограниченном прямыми

$$x = 0, y = 0, x + y = 1.$$

Скалярное поле

Лекция 3

Основные определения

Пусть в области D пространства $Oxyz$ задана функция $u=u(x,y,z)$. В этом случае говорят, что в области D задано **скалярное поле**, а саму функцию $u=u(x,y,z)$называют функцией поля. Например, поле давлений, температур и т.д.

Основные определения

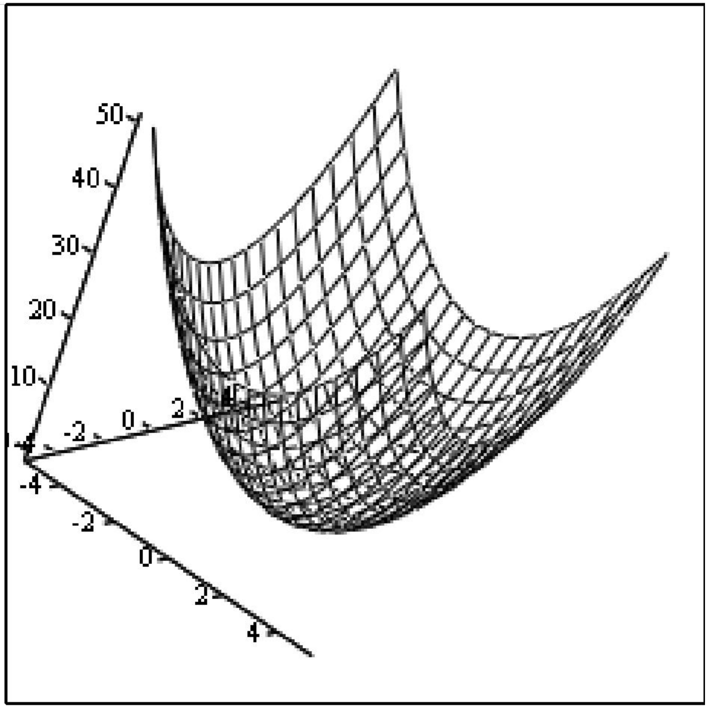
Множество точек *M* области *D*, для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение, т. е. $u(M)=C$, называется *поверхностью уровня* (или изоповерхностью) скалярного поля.

Если область D расположена на плоскости Oxy, то поле $u=u(x,y)$ является плоским.

Поверхности уровня называют в этом случае *линиями уровня*.

Пусть

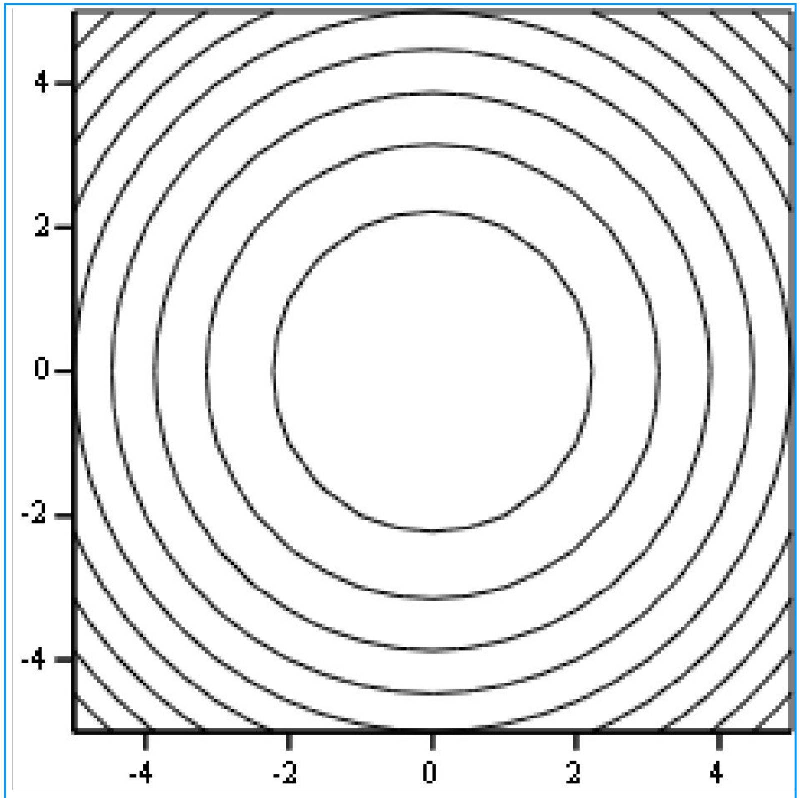
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$



f

Линии уровня

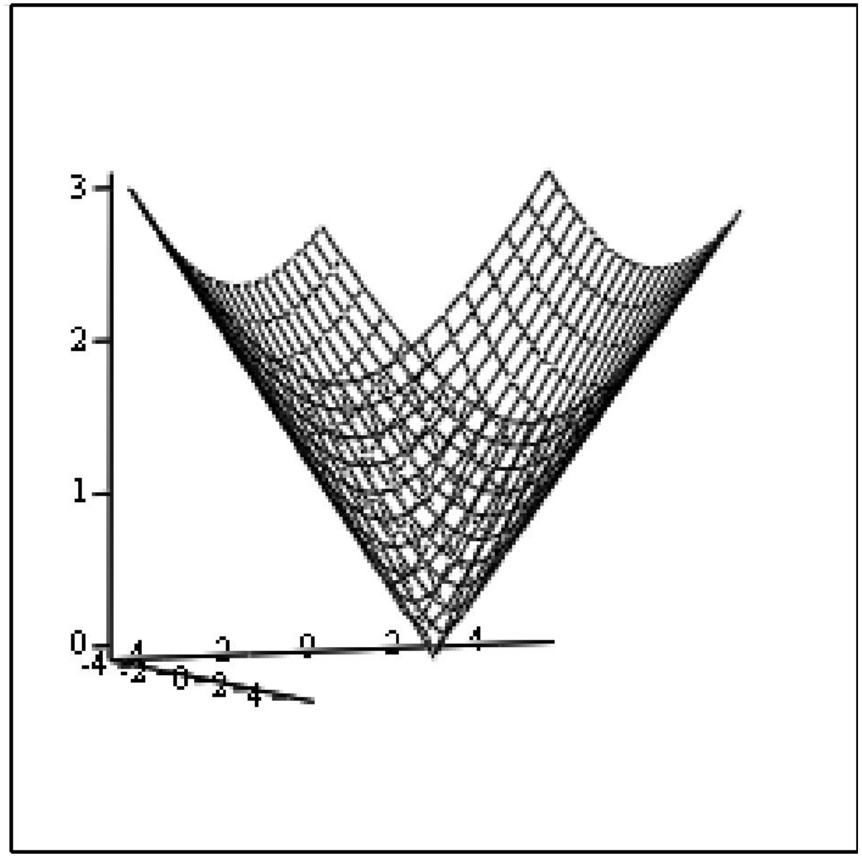
Пусть $z = x^2 + y^2$. Линии уровня этой поверхности имеют вид



f

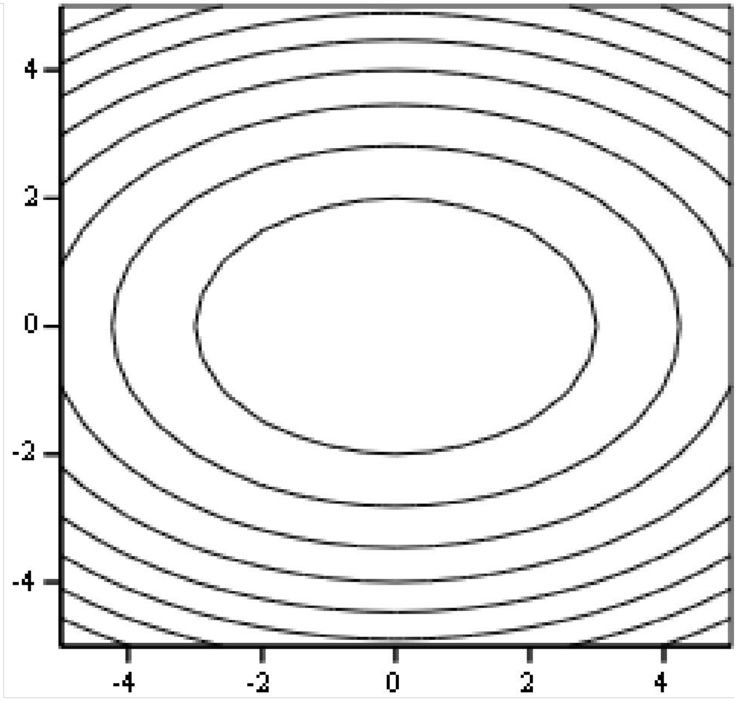
Пусть дан конус

$$f(x, y) := \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$



f

Линии уровня конуса



f

Пусть задана дифференцируемая функция $u = u\left(x, y, z\right)$ скалярного поля. Рассмотрим точку $P\left(x, y, z\right)$ этого поля и луч $\boxtimes$, выходящий из точки Р в направлении единичного вектора

$$\overline{\boxtimes}^0 = \left(cos\,\alpha;\, cos\,\beta;\, cos\,\gamma\right),$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ –углы, образованные вектором $\overline{\boxtimes}^0$ с осями координат .

Определение

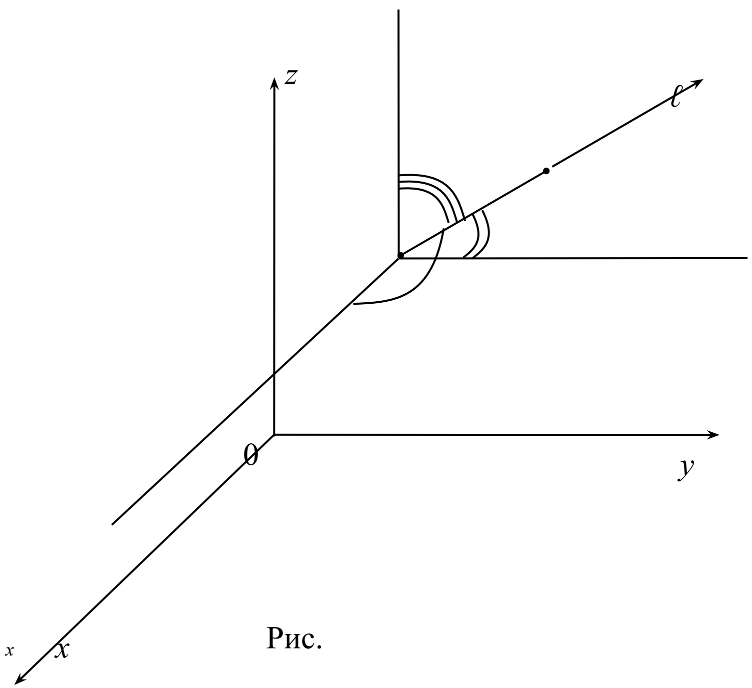


Рис.

Пусть $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ – какая-нибудь другая точка этого луча. Обозначим

$$\Delta\ell = PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

– расстояние между точками *P* и P_1 ; $\Delta\ell$ называют *величиной перемещения. Приращением функции в направлении* ℓ назовем разность

$$\Delta_\ell u = u(P_1) - u(P)$$

Производной функции $u = u(x, y, z)$ в точке *P* по направлению ℓ называется предел отношения приращения функции в направлении ℓ к величине перемещения $\Delta\ell$ при $\Delta\ell \to 0$:   .

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta_{\ell} u}{\Delta\ell}$$

Вычисление производной по направлению

Формула вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \quad \text{ãäå}$$

$$cos\alpha = \frac{l_x}{|l|}, \cos\beta = \frac{l_y}{|l|}, \cos\gamma = \frac{l_z}{|l|},$$

$$|l| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля $u=u(x,y,z)$, где $u=u(x,y,z)$- дифференцируемая функция, называется вектор с координатами

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Таким образом, $grad u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$

или $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Пример

Найти градиент функции u=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке M(6,2,3).

Решение. Вычислим градиент функции.

$$u'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad u'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Тогда grad u = $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k}$

А в точке M $$gradu=\frac{6}{7}\bar{i}+\frac{2}{7}\bar{j}+\frac{3}{7}\bar{k}.$$

Направление градиента

Теорема. Производная u'_l функции по направлению равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

Направление градиента

Так как производная по направлению представляет собой скорость изменения функции в данном направлении , а проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению, то

градиент функции в данной точке указывает направление наиболее быстрого возрастания функции.

Величина градиента плоского скалярного поля

Величина градиента плоского скалярного поля ,т.е.

$$| \text{grad } u | = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

обозначается *tgφ*   и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности u = *f* (*x*, *y*).

Градиент скалярного поля в данной точке по величине и направлению равен максимальной скорости изменения поля в этой точке, т. е.

$$\max_{l} \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^*} = \left| grad u \right|,$$

где $\overline{l^*} \Uparrow grad u$.

Направление градиента

Точка *P*, в которой *gradu*(*P*)=0, называется *особой* точкой скалярного поля. В противном случае эту точку называют *неособой* или *обыкновенной* точкой поля.

Теорема. Во всякой неособой точке плоского скалярного поля градиент поля направлен по нормали к линии уровня , проходящей через эту точку, в сторону возрастания поля.

ВГУЭС