Управление многономенклатурными запасами

Введение

Складские системы промышленных предприятий содержат от нескольких десятков до нескольких тысяч номенклатур.

Следовательно, возникает необходимость рассмотрения задач управления многономенклатурными запасами.

Многие специалисты придерживаются мнения, что оптимизация должна проводиться лишь по 5-10% номенклатур, суммарная потребность в которых в стоимостном выражении составляет 60-70%.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется N товаров, для товара $\boldsymbol{i}$, ($i = 1, 2, ..., N$):

- $\boldsymbol{v_i}$ - спрос в единицу времени,
- $\boldsymbol{K_i}$ – издержки заказа,
- $\boldsymbol{h_i}$ – издержки хранения в единицу времени,
- $\boldsymbol{Q_i}$ – объем заказа,
- $\boldsymbol{t_i}$ – период.

Предположим: горизонт планирования бесконечен, дефицит не допускается.

Определить размеры партий Q_i, и периодичности заказов t_i, при которых ***суммарные затраты на управление запасами были бы минимальными***.

Раздельная оптимизация

- При отсутствии взаимодействия между запасами различных видов продукции затраты ***L*** в единицу времени для системы, включающей ***N*** видов хранимой продукции, вычисляются по формуле

$$L = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{K_i \nu_i}{Q_i} + \frac{h_i Q_i}{2} \right)$$

- Откуда, используя необходимый признак экстремума, находим

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{h_i}} \quad t_i^* = \sqrt{\frac{2K_i}{\nu_i h_i}} \quad \left(i = \overline{1, N}\right)$$

- Минимальные издержки в единицу времени составляют

$$L^* = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{2K_i \nu_i h_i}$$

Раздельная оптимизация: ограничения

Между *N* видами продукции, поставляемой на склад, возникают взаимосвязи, основными причинами являются следующие ограничения:

- **площадь (объем) склада** *f*, где размещаются одновременно *N* видов продукции;
- **максимальный размер капитала** *C*, который предполагается вложить в запасы;
- **верхний предел общего числа заказов** за определенный период
- и др.

Могут возникнуть ситуации, когда требуется соблюдение нескольких из ограничений или всех одновременно.

Раздельная оптимизация ограничения на площадь склада

Пусть общая складская площадь ограничена величиной ***f***. Ограничение на складские площади имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i Q_i \le f$$

где f_i – площадь, необходимая для хранения единицы ***i***-го вида продукции, Q_i – величина партии ***i***-го вида продукции.

Вводится нормировочный множитель ***g*** для учета того, что запасы отдельных номенклатур могут поступать независимо друг от друга.

Если запасы всех номенклатур пополняются **одновременно**, то в это время запас и занятая им площадь оказываются максимальными и ***g*=1**.

Полагая ***g* = 1/2**, допускаем, что запасы всех видов продукции пополняются в разное время, а уровень запасов и занятая ими площадь являются средними. Маловероятно, что занятая площадь окажется много меньше половины имеющейся, поэтому **1/2 ≤ *g* ≤ 1**.

Ограничение: $$g\sum_{i=1}^{N} f_i Q_i \le f$$

Раздельная оптимизация ограничения на площадь склада

- Для определения экстремума функции издержек при наличии ограничения применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{K_i\nu_i}{Q_i} + \frac{h_iQ_i}{2}\right) + \lambda\left(f - g\sum_{i=1}^{N} f_iQ_i\right)$$

- Продифференцируем эту функцию по неизвестным параметрам ***Q***

Продифференцируем эту функцию по неизвестным параметрам Q_i и λ, и приравняем частные производные к нулю

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad \left(i = \overline{1, N}\right)$$

Получаем систему из ***N* + 1** уравнения с ***N* + 1** неизвестной

$$Q_1, Q_2, ..., Q_N, \lambda$$

$$\begin{cases} Q_i^* = \sqrt{\dfrac{2K_i\nu_i}{h_i - 2g\lambda f_i}}, \quad i = \overline{1, N} \\ g\sum_{i=1}^{N} f_iQ_i^* = f \end{cases}$$

Раздельная оптимизация ограничения на площадь склада

- *Экономический смысл множителя Лагранжа* ***λ*** *:*

  он показывает, насколько можно сократить минимальные издержки функционирования системы в единицу времени, увеличив складские площади на единицу.

Раздельная оптимизация ограничения на величину оборотных средств

- Аналогично решается задача, если ограничения накладываются на величину оборотных средств **C**, вложенных в запасы.
- Пусть **c_i** - стоимость единицы продукции **i**-го вида, тогда ограничение имеет вид:

$$g\sum_{i=1}^{N} c_i Q_i \le C$$

Нормировочный множитель **g** имеет тот же смысл, что и в предыдущей постановке задачи.

Решая с помощью метода множителей Лагранжа, приходим к следующей системе для решения задачи

$$\begin{cases} Q_i^* = \sqrt{\dfrac{2K_i\nu_i}{h_i - 2g\lambda c_i}}, \quad i = \overline{1,N} \\ g\sum_{i=1}^{N} c_i Q_i^* = C \end{cases}$$

Раздельная оптимизация ограничения на величину оборотных средств

- *Экономический смысл множителя Лагранжа **λ** :*

  он показывает, на сколько денежных единиц уменьшатся затраты в системе, если оборотные средства увеличатся на одну денежную единицу.

Раздельная оптимизация
решение задачи

- Для определения оптимального размера партии поставок нужно определить множитель Лагранжа **λ**

Варианты:

- наиболее распространенный, базируется на численном методе решения (методом дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи).
- в качестве первого приближения **λ** взять эмпирическую зависимость.

Замечание:

При наличии дополнительных ограничений наблюдается существенный рост переменных затрат: затраты, связанные с выполнением заказов, существенно возрастают из-за:

- уменьшения объема заказов
- и роста их количества.

Совмещение заказов

Когда у одного поставщика имеется ***N*** номенклатур, возможна их одновременная поставка.

Причины:

- требование поставщика о стоимости каждого заказа не ниже некоторой предельной величины;
- реализация полной загрузки используемых транспортных средств;
- ограничение количества отправок и их периодичности каждому клиенту (синхронизация поставок);
- снижение затрат на организацию, комплектацию партий поставок, поставляемых клиенту.

Суммарные затраты при многономенклатурных поставках значительно уменьшаются, т.к. при объединении в одну партию нескольких номенклатур, затраты, связанные с выполнением заказа, увеличиваются незначительно.

Полное совмещение заказов

Суммарные издержки одновременного размещения **N** заказов считают равными

$$K_0(1+\gamma N)$$

где **$K_о$** - фиксированные издержки, не зависящие от числа номенклатур, а **γ** (**0 ≤ γ ≤1**) - доля издержек заказывания, связанная с размещением заказа по каждой номенклатуре. Период размещения заказа ***t*** по всем номенклатурам будет общим.

Издержки размещения заказов и содержание запасов в единицу времени

$$L = \frac{K_0(1+\gamma N)}{t} + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^{N} \nu_i h_i$$

Полное совмещение заказов

- Получаем оптимальные значения параметров:

$$t^* = \sqrt{\frac{2K_0(1+\gamma N)}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i h_i}} \qquad (1)$$

$$Q_i^* = \nu_i t^* \qquad \left(i = \overline{1, N}\right)$$

$$L^* = \sqrt{2K_0(1+\gamma N)\sum_{i=1}^{N} \nu_i h_i} = t^* \sum_{i=1}^{N} \nu_i h_i$$

Полное совмещение заказов ограничения на площадь склада

С учетом того, что $Q_i = tv_i$, ограничение по складским площадям имеет вид

$$t\sum_{i=1}^{N} v_i f_i \le f$$

В случае одного ограничения задача решается по следующей схеме. Определяется t_0 по формуле (1). Если t_0 удовлетворяет ограничению, то $t^* = t_0$, иначе t^* должно превратить ограничение в строгое равенство, тогда оптимальный период возобновления поставок

$$t^* = \frac{f}{\sum_{i=1}^{N} v_i f_i}$$

Оптимальный поставочный комплект

$$Q_i^* = v_i t^* \quad \left(i = \overline{1, N}\right)$$

Полное совмещение заказов ограничения на величину оборотных средств

С учетом того, что $Q_i = tv_i$, ограничение по оборотным средствам имеет вид

$$t\sum_{i=1}^{N} v_i c_i \le C$$

В случае одного ограничения задача решается по следующей схеме. Определяется t_0 по формуле (1). Если t_0 удовлетворяет ограничению, то $t^* = t_0$, иначе t^* должно превратить ограничение в строгое равенство, тогда оптимальный период возобновления поставок

$$t^* = \frac{C}{\sum_{i=1}^{N} v_i c_i}$$

Оптимальный поставочный комплект

$$Q_i^* = v_i t^* \qquad \left(i = \overline{1, N}\right)$$

Полное совмещение заказов: ограничения

Если другие ограничения – схема та же.

Если ограничений несколько, за период поставки принимается наименьший из периодов поставки, рассчитанный по ограничениям.

Частичное совмещение заказов

Многономенклатурная поставка от одного поставщика.

Две составляющие затрат за поставку: постоянная (определяемая главным образом стоимостью транспортировки) и переменная, зависящая от объема выполняемых на складе операций при формировании заказа.

Тогда для каждой *i*-й номенклатуры затраты, связанные с организацией одной поставки, будут определяться по формуле

$$K_i = K_0(1+\gamma_i)$$

Многономенклатурные поставки по системе кратных периодов.

Стратегия организации поставок, состоящая в объединении преимуществ, свойственных независимым поставкам с оптимальными периодичностями t_i^* и многономенклатурными поставками с периодичностью t^*.

Вводится система кратных периодов, когда по крайней мере одна номенклатура заказывается в каждом базисном периоде t^*, а остальные позиции номенклатуры поставляются с периодичностями $k_i t^*$ ($k_i = 1,2,3,\ldots$).

Оптимальный период группирования определяется по формуле

$$t_{\Gamma}^* = \sqrt{\frac{2K_0\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{k_i}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\nu_i h_i k_i}}$$

Данному периоду соответствуют минимальные затраты:

$$L_{\Gamma}^* = \sqrt{2K_0\left(1+\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma_i}{k_i}\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\nu_i h_i k_i}$$

Основные этапы алгоритма поиска конфигурации группировок позиций номенклатуры.

1. Позиции номенклатуры ранжируются по возрастанию периодичности независимой поставки каждой позиции номенклатуры t_i^*.
2. Выбирается начальное приближение для кратного периода; за основу принимается первое значение ранжированного ряда t_0^*.
3. Рассчитывается набор коэффициентов $k_i = t_i^* / t_0^*$ с помощью которых производится формирование базового варианта групп различной кратности.
4. Каждая позиция номенклатуры закрепляется за определенной группой.

Для базового варианта рассчитываются показатели $t^*_Г$ и $L^*_Г$ и затем с использованием **итерационной процедуры** (путем перебора и размещения позиций номенклатуры в группах различной кратности) осуществляется **поиск** оптимального варианта по критерию минимума суммарных затрат $L^*_Г$.

Накапливаем первую группу: присоединяем следующие позиции номенклатуры

Условие прекращения накопления группы записывается в виде

$$\frac{\gamma_{j+1}}{h_{j+1}\cdot\nu_{j+1}} > \frac{2\left(1+\sum_{i=1}^{j}\gamma_i\right)}{\sum_{i=1}^{j}h_i\nu_i}.$$

Проверка рекуррентного соотношения начинается со второй позиции номенклатуры.

Для всех последующих (не входящих в первую группу) позиций $i > j$ вычисляется оптимальная периодичность t_i^* и по отношению $t_i^*/\, t_0^*$ - начальная кратность.

Замечания:

- Наличие оптимальной величины общих затрат является областью принятия стратегических компромиссных решений различных служб предприятия, отвечающих за закупку, транспортировку и хранение продукции.
- Дальнейшее развитие методов решения многономенклатурных задач требует активного привлечения финансовой логистики, т. е. аналитического инструментария исследования динамики финансовых потоков.