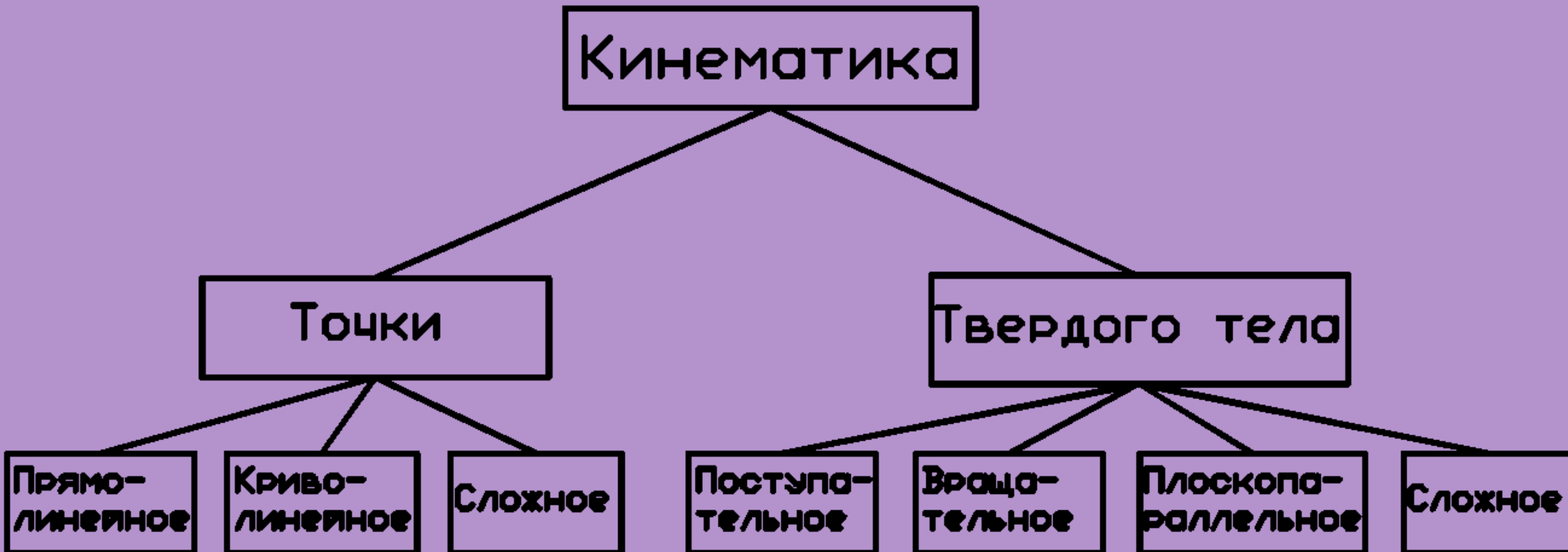
Часть 2. КИНЕМАТИКА

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инерции и действующих на них сил.

Основные задачи кинематики:

1. установить способ задания движения точки или тела как функцию положения их в заданной системе координат в любой момент времени.
2. зная закон движения точки (тела), описать параметры движения (перемещение, скорость, ускорение):
   а) точки;
   б) тела в целом и каждой точки тела в отдельности.

Общая схема кинематики



Виды движения	Прямо-линейное	Криво-линейное	Сложное	Поступательное	Вращательное	Плоскопарал-лельное
Характер движения определяется	W	W^τ	W, W^τ $W_к$	W, W^τ	ε	W^τ, ε

1) *W = 0* – движение равномерное,
2) *W = const* – равнопеременное движение,
   А) *const > 0* – равноускоренное,
   Б) *const < 0* – равнозамедленное,
3) *W = var* ($W \to 0, W \to c, W \to \infty$) – неравномерное.

2.2 Кинематика точки

2.2.1 Способы задания движения точки.

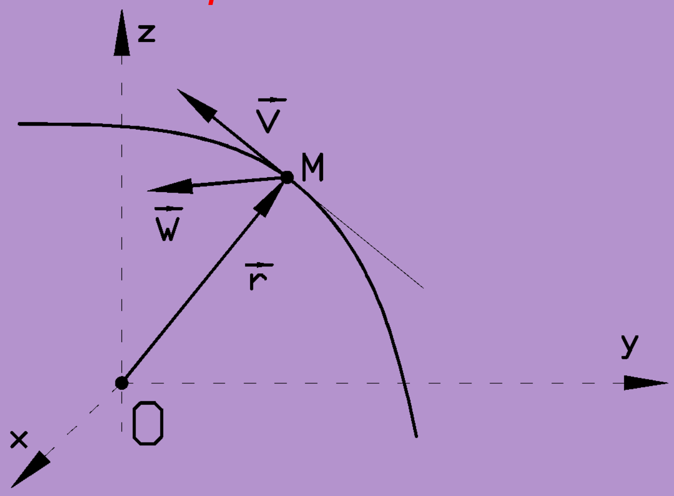
Векторный	***Координатный***	***Естественный***
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ *r* – радиус-вектор $\vec{r} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ Более удобен при доказательстве теорем и выводе общих зависимостей	$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$ *t* – выполняет роль параметра: *t = 0* – начало отсчета, *t = 1* – опред. направление Часто используется на практике при расчётах	*Должны быть известны:* 1) уравнение траектории; 2) начало и направление отсчета; 3) закон движения по траектории **S = S(t)** Нагляден, но не известна траектория движения точки.

Векторный	Координатный	Естественный
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$	$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} & \cos\alpha = \frac{v_x}{v} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} & \cos\beta = \frac{v_y}{v} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} & \cos\gamma = \frac{v_z}{v} \end{cases}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	$v = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$ V – модуль скорости точки. Направлен по касательной к траектории точки.
$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}$ Направлено в сторону вогнутости траектории. $\vec{W} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} =$ $= \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}$	$\begin{cases} W_x = \dot{V}_x = \ddot{x} & \cos\alpha_1 = \frac{W_x}{W} \\ W_y = \dot{V}_y = \ddot{y} & \cos\beta_1 = \frac{W_y}{W} \\ W_z = \dot{V}_z = \ddot{z} & \cos\gamma_1 = \frac{W_z}{W} \end{cases}$ $W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$	$W_\tau = \ddot{S} = \dot{v}$ - полностью не характеризует W. $\begin{cases} W_\tau = \frac{dv}{dt} & \cos\alpha = \frac{W_\tau}{W} \\ W_n = \frac{v^2}{\rho} & \cos\beta = \frac{W_n}{W} \end{cases}$ $W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$ ρ - радиус кривизны траектории движения

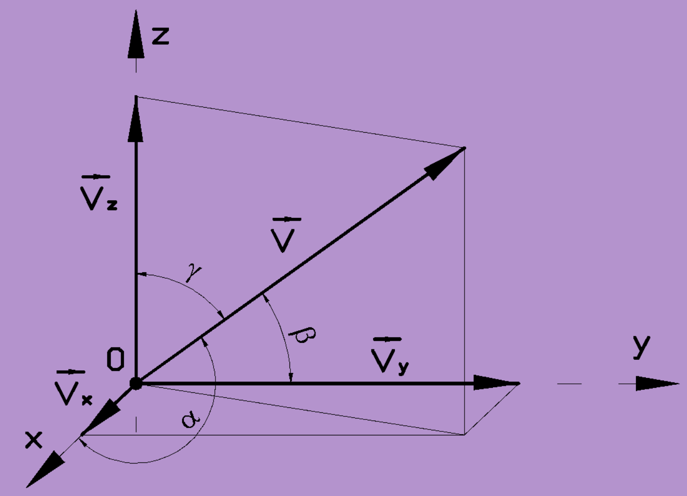
2.2.2 Скорости и ускорения материальной точки

Если закон движения задан:

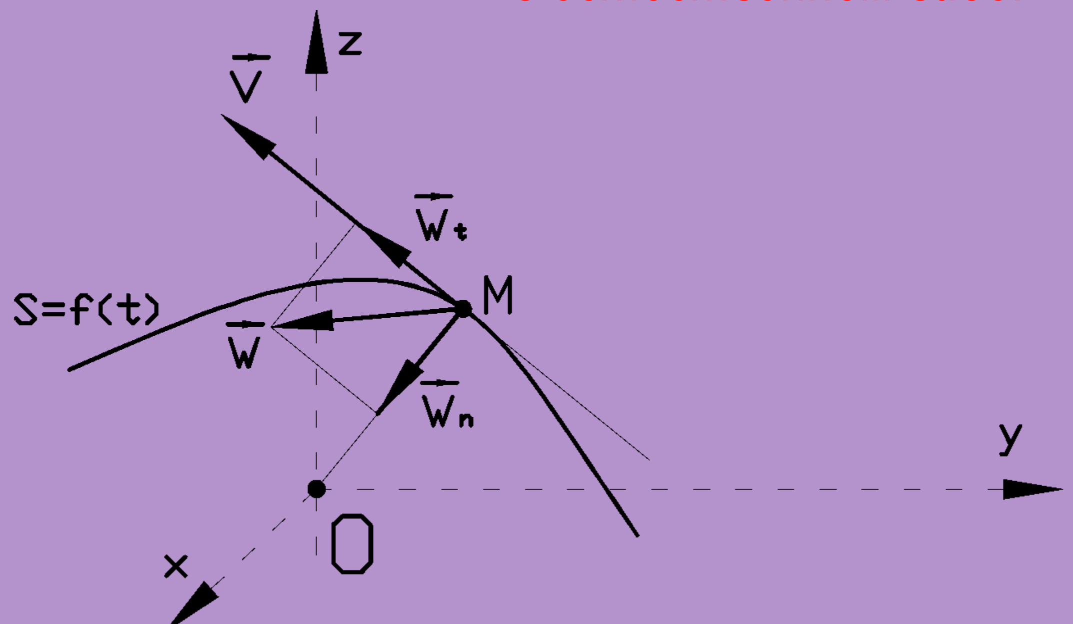
в векторном виде:



в координатном виде:



в естественном виде:



$\overrightarrow{W_\tau}$ - изменение модуля $\overrightarrow{V}$

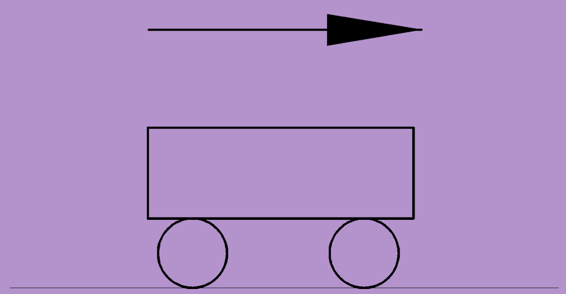
$\overrightarrow{W_n}$ – изменение направления

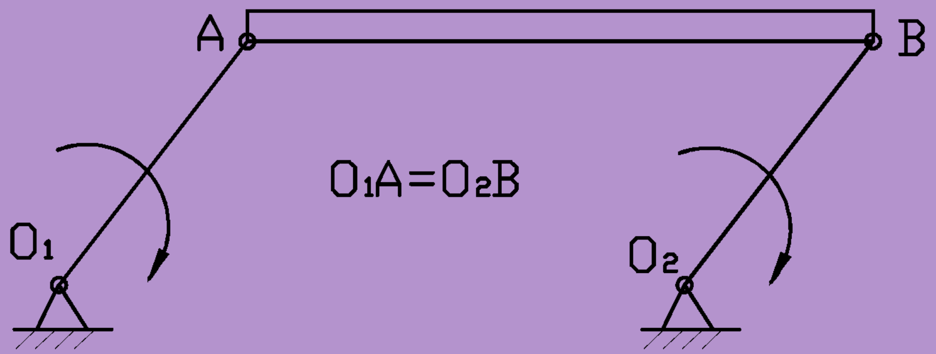
2.3 Кинематика твердого тела

2.3.1 Поступательное движение

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

! Прямолинейное движение – частный случай поступательного.



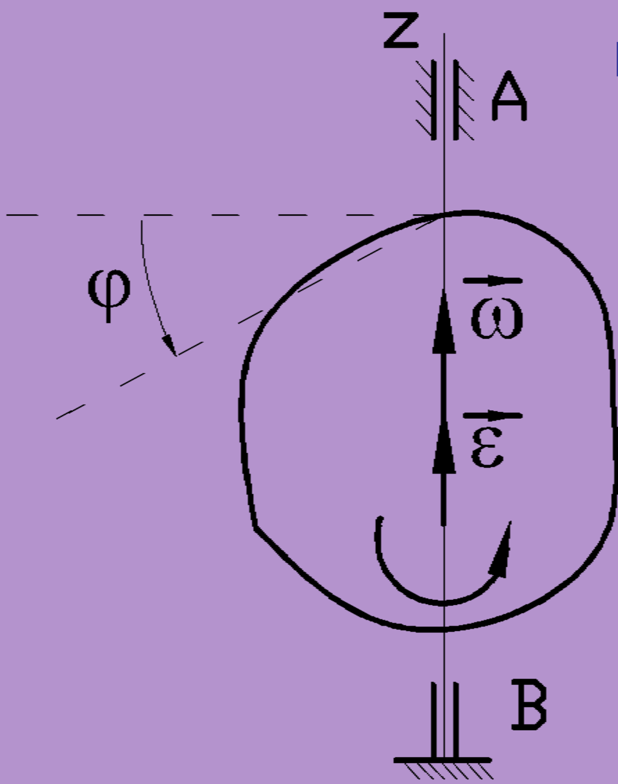


Теорема: При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Следовательно кинематика поступательного движения сводится к кинематике точки.

2.3.2 Вращательное движение твердого тела

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во время движения неподвижными.



Проходящая через эти точки прямая – **ось вращения**.

$\varphi = f(t)$ - закон вращательного движения твердого тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(1/c)$$ - угловая скорость

Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно проходящим против хода часовой стрелки.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}(1/c^2)$$ - угловое ускорение

$\varepsilon > 0$ – вращение ускоренное (одинаковый знак с $\overline{\omega}$)

$\varepsilon < 0$ – вращение замедленное.

Равномерное и равнопеременное вращение

$\omega = const$ - вращение называют равномерным.

Пусть при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, тогда $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$ - закон движения при равномерном вращении.

Связь угловой скорости $\overline{\omega}$ $(1/c)$ и частоты оборотов n $(об/мин)$:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

$\varepsilon = const$ - вращение называют равнопеременным

Пусть при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$ $\omega = \omega_0$

$d\omega = \varepsilon \cdot dt$; $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$ - закон изменения скорости при равнопеременном вращении.

$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon \cdot t \cdot dt$; $\varphi = \omega_0 \cdot t + \varepsilon \cdot \frac{t^2}{2} + \varphi_0$ - закон движения при равнопеременном вращении.

2.3.3 Скорости и ускорения точек вращающегося тела

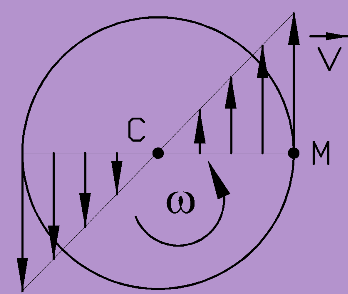
Точка М описывает окружность. $dS = h \cdot d\varphi$

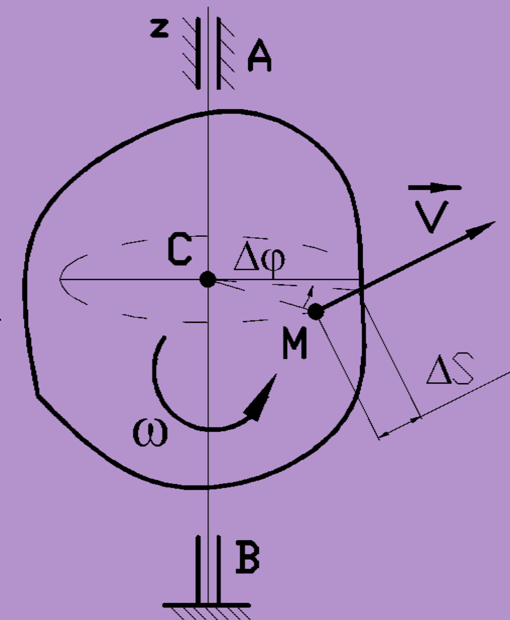
$$V = \frac{dS}{d\varphi} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega$$

– линейная или окружная скорость точки *М*.

V – касательная к этой окружности и направлена в сторону вращения.

$\omega = const$ в заданный момент времени для всех точек тела, значит линейная скорость пропорциональна только *h*.





Траектория т. *М* – окружность, радиуса *h*.

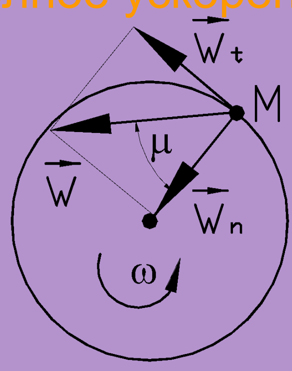
Ускорения т. *М*:

$$W^{\tau} = \frac{dV}{dt} \qquad W^{n} = \frac{V^2}{\rho}$$

$\rho = h$, тогда $W^{\tau} = h \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon \quad W^{n} = \dfrac{h^2 \cdot \omega^2}{h} = h \cdot \omega^2$

Полное ускорение:

$$W = \sqrt{\left(W^{\tau}\right)^2 + \left(W^{n}\right)^2} = \sqrt{h^2 \cdot \omega^4 + h^2 \cdot \varepsilon^2} = h \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

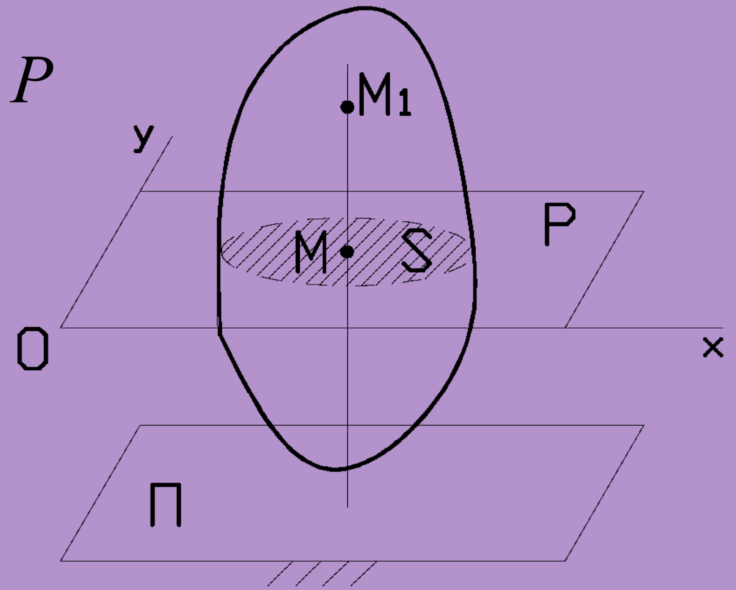


$$tg\mu = \frac{\left|W^{\tau}\right|}{W^{n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

2.3.4 Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным или ***плоским движением*** твердого тела называется такое движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

$$P \parallel \Pi \qquad MM_1 \perp P$$



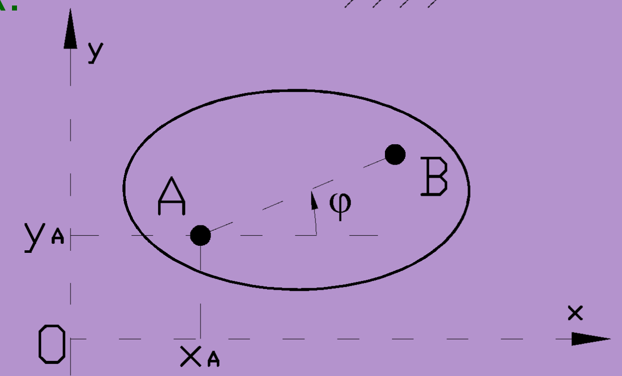
Для изучения движения всего тела достаточно изучить, как движется сечение *S* в плоскости *xOy*.

Положение *S* в *xOy* полностью определяется положением в этом сечении произвольного отрезка *AB*.

В свою очередь положение *AB* полностью определяют координаты т. *A* (*Xa*, *Ya*) – полюса и угла φ который образует прямая *AB* с осью *Ox*.

Закон плоскопараллельного движения твердого тела:

$$\begin{cases} X_A = f_1(t) \\ Y_A = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases} \qquad (1)$$



Основные кинематические характеристики плоскопараллельного движения:

поступательная компонента: V_A, W_A вращательная компонента: ω, ε

Траектории точек тела

Положение точки *M* на сечении *S* определяется:

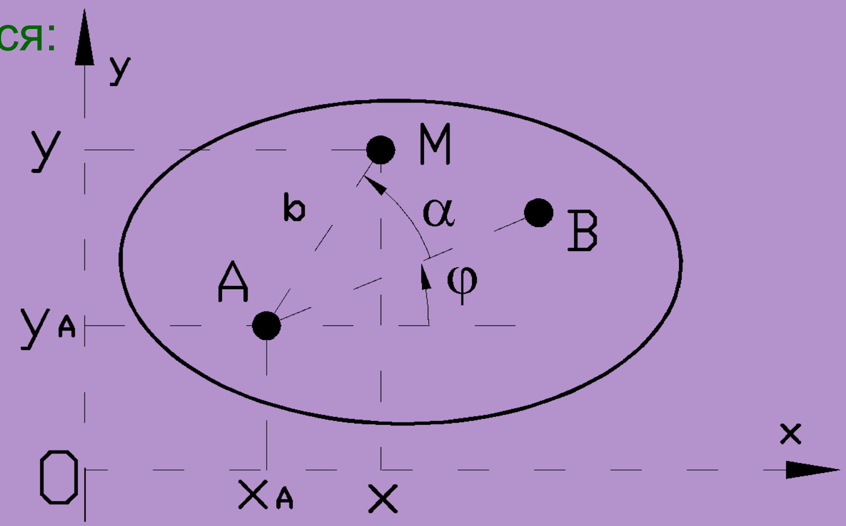
-расстоянием $b = \overline{AM}$;

-углом $\alpha = \angle BAM$.

Координаты точки М будут:

$$\begin{cases} X = X_A + b \cdot \cos(\varphi + \alpha) \\ Y = Y_A + b \cdot \sin(\varphi + \alpha) \end{cases}$$

X_A, Y_A и φ известны из закона плоскопараллельного движения (1).



Скорости точек тела

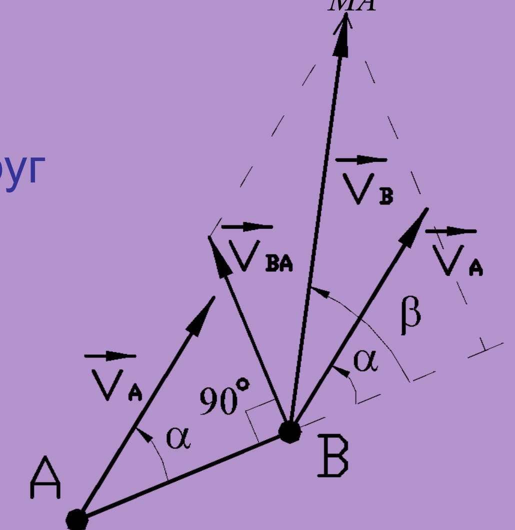
Теорема: Скорость любой точки *M* тела геометрически складывается из скорости какой-нибудь другой точки *A*, принятой за полюс, и скорости точки *M* в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.

$$\overline{V_M} = \overline{V_A} + \overline{V_{MA}}$$

Причём $\overline{V_{MA}} = \omega \cdot \overline{MA}$ $\quad \overline{V_{MA}} \perp \overline{MA}$

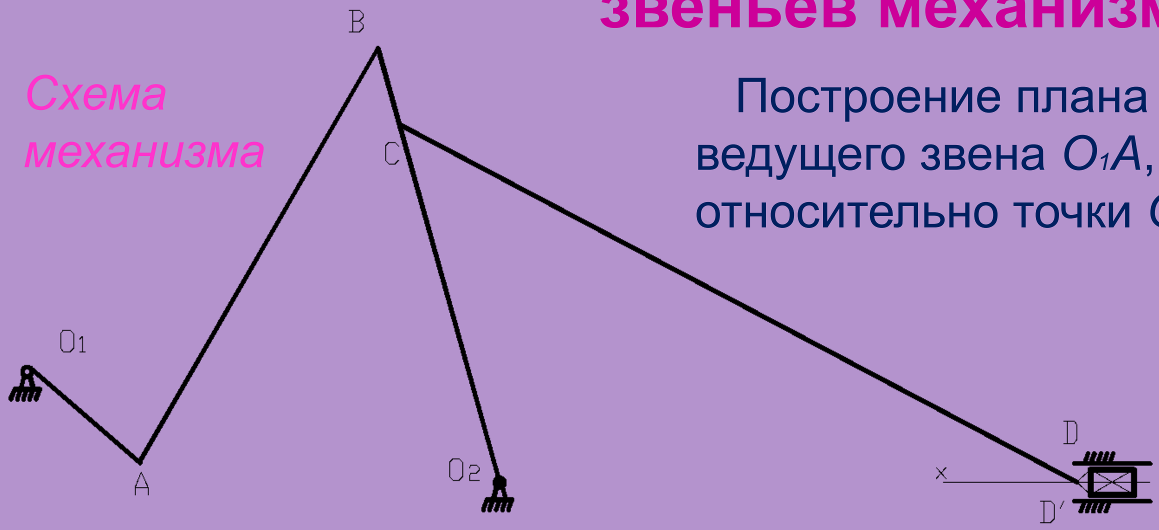
Теорема: Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу.

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha$$



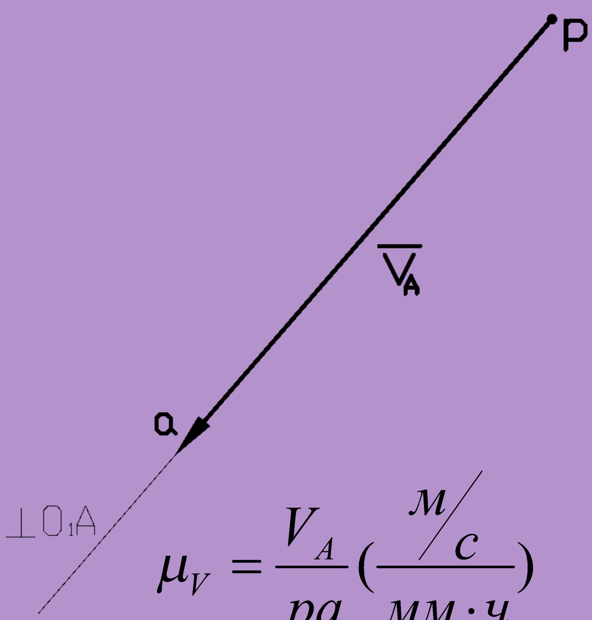
Определение линейных скоростей точек звеньев механизма

Схема механизма



Построение плана скоростей начнём с ведущего звена O_1A, которое вращается относительно точки O_1 с угловой скоростью ω_1,:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} \left(\text{рад}/\text{с} \right)$$



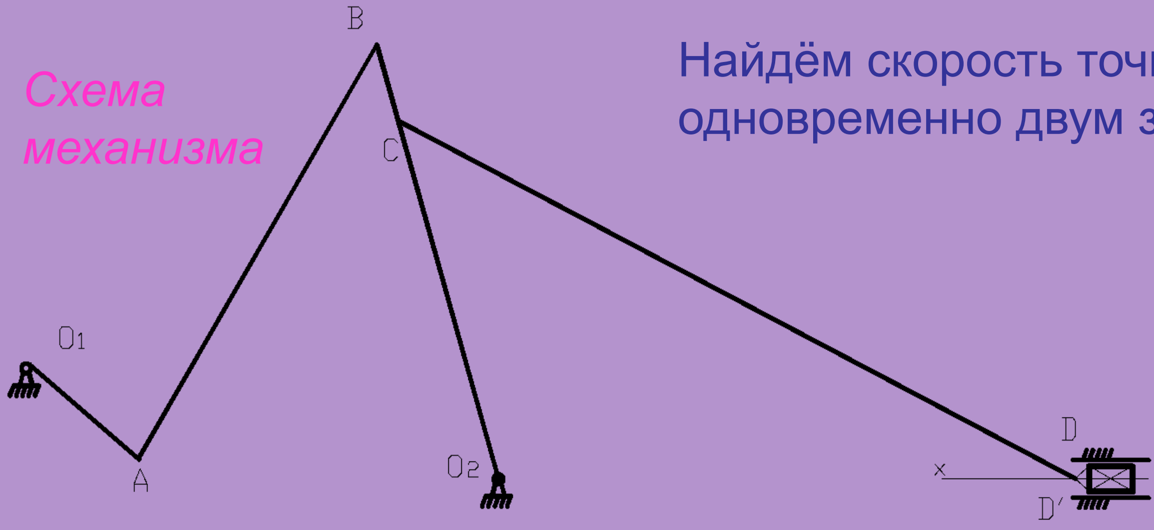
Вектор абсолютной скорости точки *A* направлен перпендикулярно кривошипу, в сторону его вращения, а модуль скорости определяется из выражения:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{O_1A} \left(\text{м}/\text{с} \right)$$

Выбираем на плоскости произвольную точку *p* — полюс плана скоростей, которая является началом отсчета. Откладываем на ней вектор $\overrightarrow{pa}$ (перпендикулярный к звену O_1A в направлении движения точки *A*).

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa} \left(\frac{\text{м}/\text{с}}{\text{мм} \cdot \text{ч}} \right)$$

Схема механизма



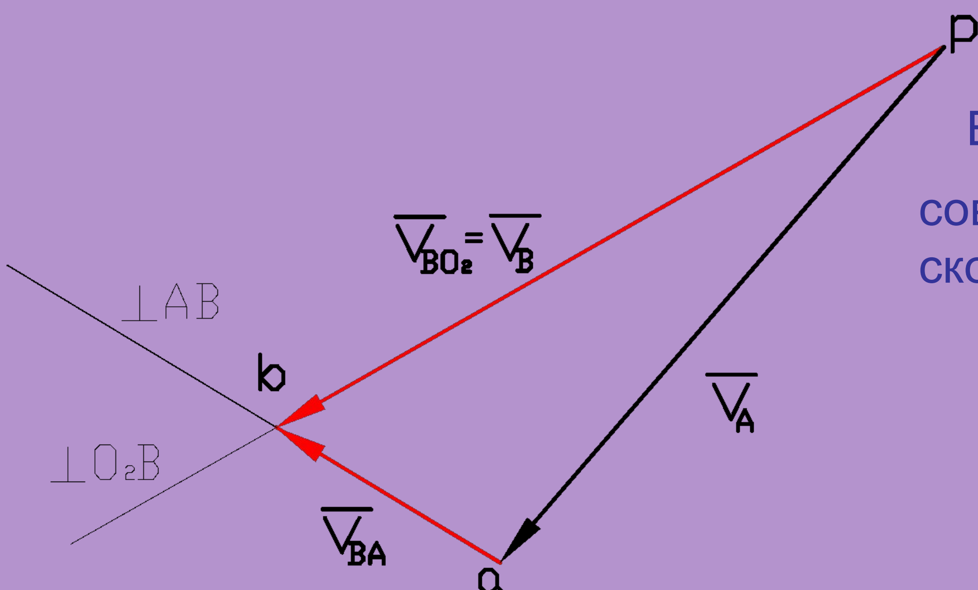
Найдём скорость точки *B*. Точка *B* принадлежит одновременно двум звеньям – *2* и *3*.

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}_{BA}} \\ \vec{V}_B = \underline{\underline{\vec{V}_{O_2}}} + \underline{\vec{V}_{BO_2}} \end{cases}$$

$\overline{V}_{BA} \perp AB \qquad \overline{V}_{BO_2} \perp O_2B$

$$\vec{V}_{O2} = 0$$

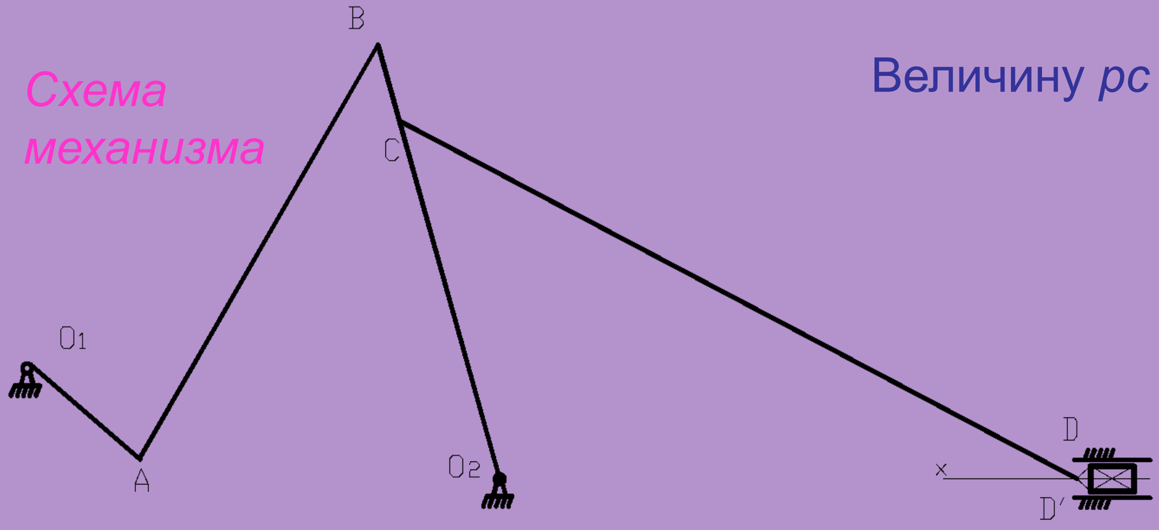
Скорость O_2 равна нулю, так как этот шарнир связан со стойкой.



Вектор абсолютной скорости $\vec{V}_B$ совпадает с вектором относительной скорости $\vec{V}_{BO_2}$.

$$V_B = pb \cdot \mu_V \left({}^{м}\!/_{c} \right)$$

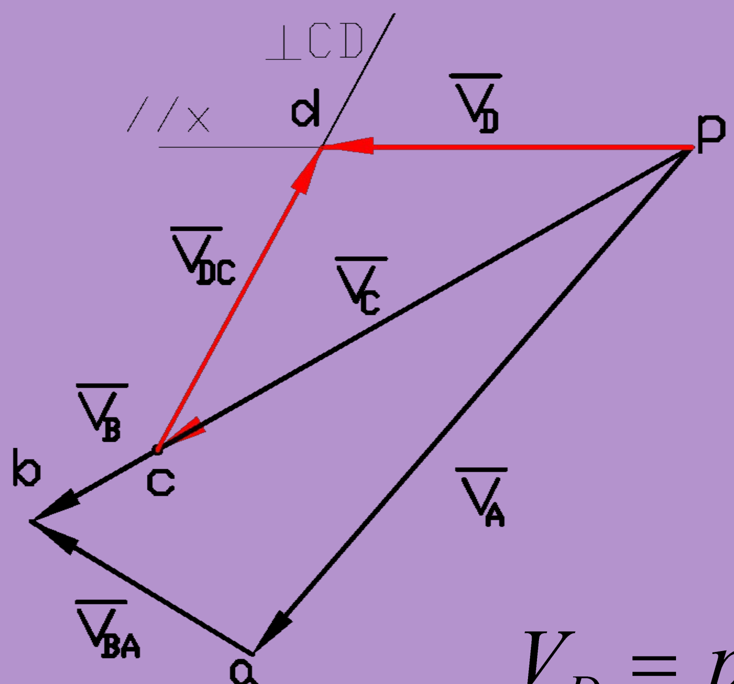
Схема механизма



Величину *pc* находим из пропорции:

$$\frac{pc}{l_{CO_2}} = \frac{pb}{l_{BO_2}}$$

$$V_C = pc \cdot \mu_V \left({}^{м}\!/_{c} \right)$$



Система уравнений для скорости точки *D* будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_D} = \underline{\underline{\overrightarrow{V_C}}} + \underline{\overrightarrow{V_{DC}}} \\ \overrightarrow{V_D} = \underline{\underline{\overrightarrow{V_{D'}}}} + \underline{\overrightarrow{V_{DD'}}} \end{cases}$$

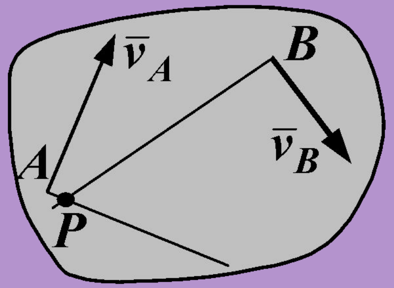
$$\overline{V}_{DC} \perp DC$$

$$\overline{V}_{DD'} \,//\, x$$

$$\overrightarrow{V}_{D'} = 0$$

$$V_D = pd \cdot \mu_V (м / c)$$

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка сечения S тела, скорость которой в данный момент времени равна нулю.



По теореме о проекциях скоростей точек на направление соединяющего их отрезка вектор скорости точки ***P*** должен быть либо перпендикулярен одновременно к отрезкам ***AP*** и ***BP*** (что невозможно), либо равен нулю.

Теорема: Скорость любой точки тела, лежащей в сечении S, равна ее вращательной скорости вокруг мгновенного центра скоростей.

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

Следствия из теоремы:

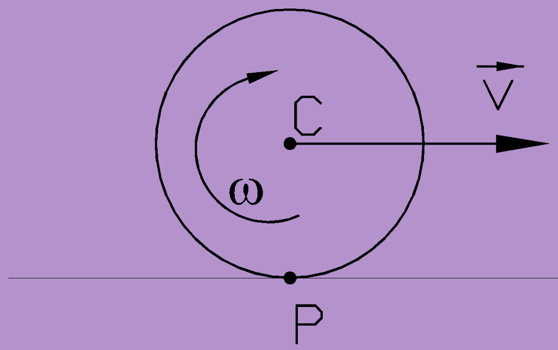
1. Для нахождения *МЦС* надо знать только направления скоростей каких-либо двух точек *Va* и *Vв* сечения тела (или траектории этих точек).
2. Для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление какой-либо точки *A* тела и направление скорости другой его точки *B*.
3. Угловая скорость тела равна в каждый момент времени отношению скорости какой-либо точки сечения *S* и ее расстоянию от *МЦС*:

$$\omega = \frac{V_B}{pb}$$

! *МЦС* в каждый момент времени – это вращение тела (и его сечения) вокруг точки *p* , поэтому *МЦС* иногда называют *мгновенным центром вращения (МЦВ)*.

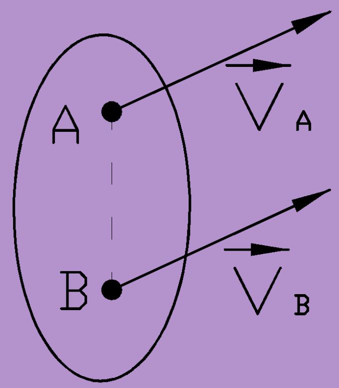
Геометрическое место *МЦВ* на неподвижной плоскости называют ***неподвижной центроидой***, а геометрическое место этих центров в плоскости, связанной с сечением *S* и движущейся вместе с ним – ***подвижной центроидой***.

Некоторые частные случаи нахождения МЦС:



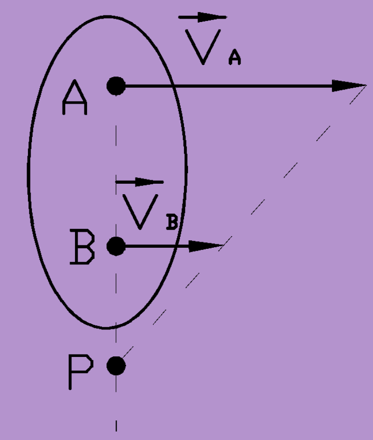
1) Тело катится без скольжения по неподвижному телу

Точка касания тела с поверхностью *P – МЦС*.



2) Если $\overline{V_A} \parallel \overline{V_B}$ и $\overline{V_A}$ лежит под углом к AB, то МЦС лежит в бесконечности.

Значит все точки тела имеют мгновенное поступательное распределение скоростей.



3) Если $\overline{V_A} \parallel \overline{V_B}$ и $\overline{V_A} \perp AB$, $\overline{V_A} \neq \overline{V_B}$ то МЦС лежит на продолжении прямой *AB*.

! В механизме, состоящем из нескольких тел, каждое не поступательно движущееся тело имеет в данный момент времени свой *МЦС* и свою угловую скорость.

Ускорения точек тела.

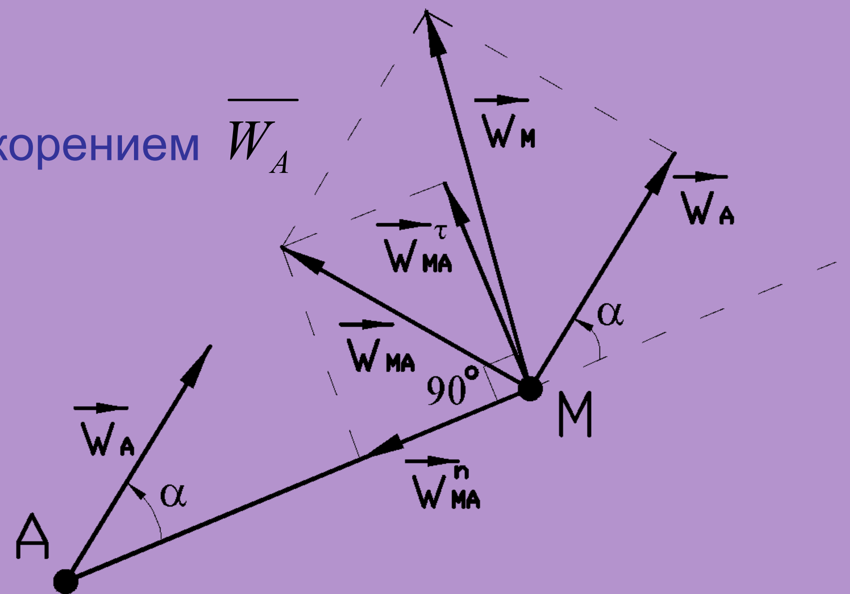
При плоскопараллельном движении ускорение любой точки (так же как и скорость) складывается из ускорения полюса и ускорения точки при движении вокруг полюса.

$$\overline{W_M} = \overline{W_A} + \overline{W_{MA}} \qquad \overline{W_M} = \overline{W_A^n} + \overline{W_A^\tau} + \overline{W_{MA}^n} + \overline{W_{MA}^\tau}$$

Где $W^n = AM \cdot \omega^2 \quad W^\tau = AM \cdot \varepsilon$

Когда полюс A движется прямолинейно с ускорением $\overline{W_A}$

$$\overline{W_M} = \overline{W_A} + \overline{W_{MA}^n} + \overline{W_{MA}^\tau}$$

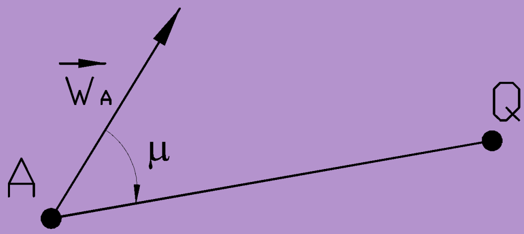


Теорема: При плоском движении фигуры в любой момент времени на ней найдется такая точка, ускорение которой равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений.

Отложим от точки ***A*** под углом μ от вектора $\overline{W_A}$ отрезок ***AQ***, длина которого вычисляется по формуле

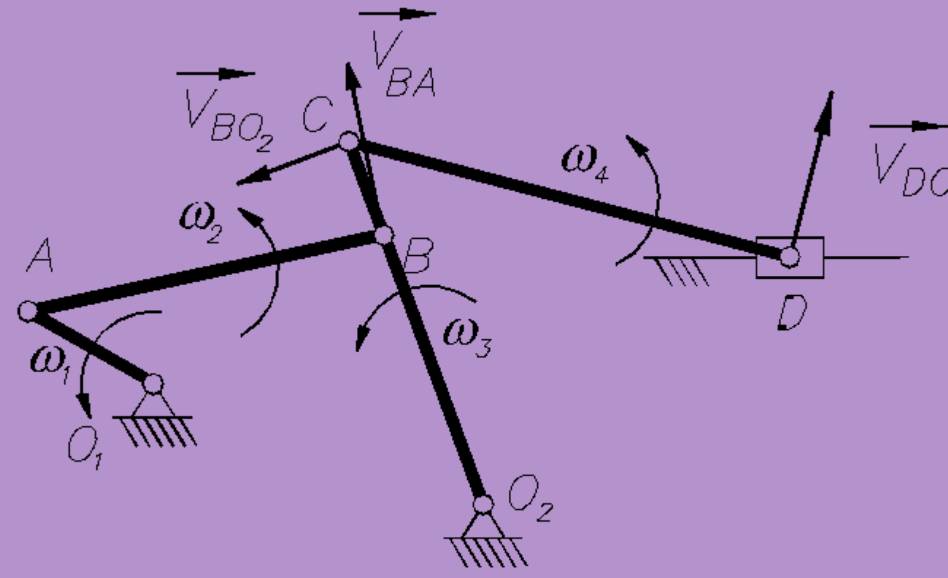
$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

$\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ отложен против часовой стрелки при $\varepsilon > 0$ и по ходу часовой стрелки при $\varepsilon < 0$



Ускорение любой точки тела будет равно: $\dfrac{w_A}{QA} = \dfrac{w_M}{QM}$

Для определения направления угловой скорости второго звена *ω2* необходимо мысленно перенести вектор относительной скорости $\overrightarrow{V_{BA}}$ из плана скоростей в точку *B* плана механизма, при этом видим, что вектор скорости стремится вращать точку *B* звена *AB* относительно точки *A* против часовой стрелки, следовательно, и угловая скорость второго звена будет направлена против часовой стрелки (т.е. положительно).



Определение линейных ускорений точек звеньев механизма

Так как кривошип O_1A *вращается равномерно, то* $W^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot O_1A = 0$

Абсолютное ускорение точки *A* определяется только величиной нормального ускорения, которое по модулю равно:

$$W_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A(м/с^2)$$

и направлено вдоль кривошипа O_1A от точки *A* к оси вращения O_1.

Выбираем на плоскости произвольную точку *q* — полюс плана ускорений, которая является началом отсчета. Откладываем на ней вектор $\overrightarrow{W_A^n}$ (параллельный звену O_1A в направлении к оси вращения *O_1).*

Масштабный коэффициент плана ускорений:

$$\mu_W = \frac{W_A}{qa}\left(\frac{м/c^2}{мм \cdot ч}\right)$$

Определим ускорение точки *B*.

$$\begin{cases} \overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}} \\ \overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_{O_2}} + \overrightarrow{W_{BO_2}} \end{cases}$$

Т.к. точка *B* движется криволинейно, то относительные ускорения представим в виде суммы двух ускорений: нормального и тангенциального.

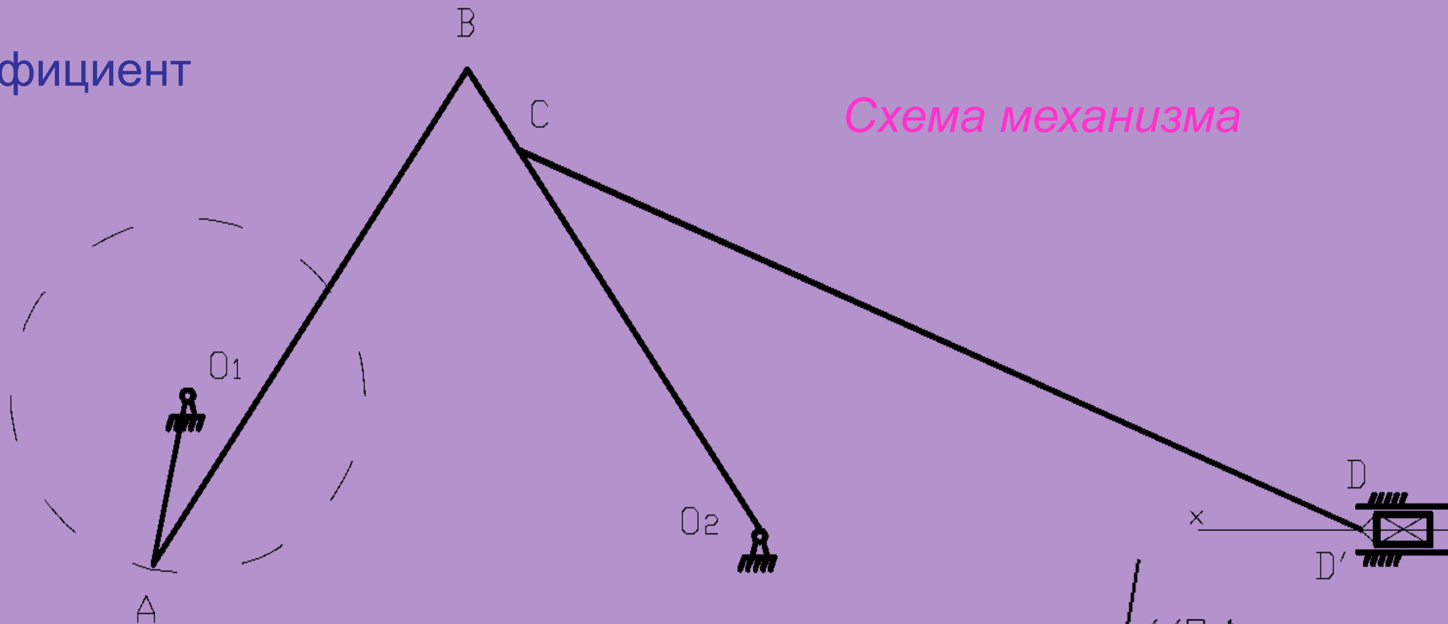
$$\begin{cases} \overrightarrow{W_B} = \underline{\underline{\overrightarrow{W_A}}} + \underline{\underline{\overrightarrow{W^n_{BA}}}} + \underline{\overrightarrow{W^\tau_{BA}}} \\ \overrightarrow{W_B} = \underline{\underline{\overrightarrow{W_{O_2}}}} + \underline{\underline{\overrightarrow{W^n_{BO_2}}}} + \underline{\overrightarrow{W^\tau_{BO_2}}} \end{cases}$$

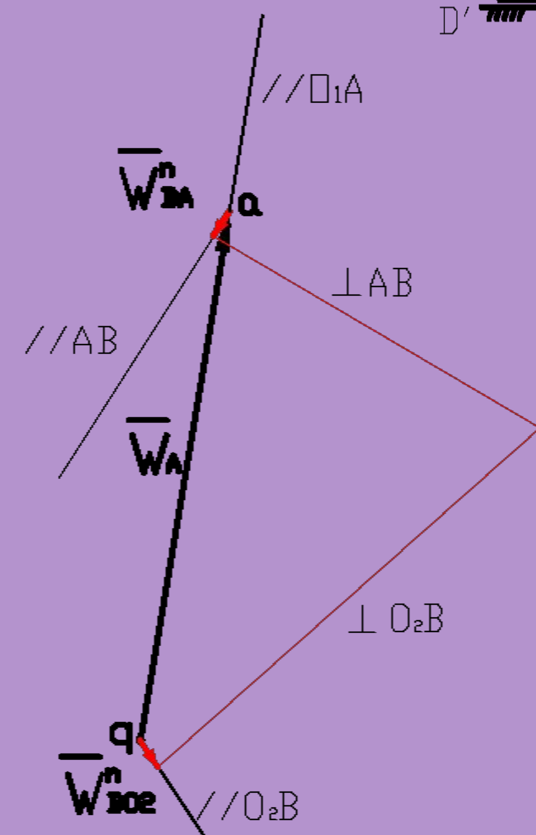
$$W^n_{BA} = \frac{V^2_{BA}}{l_{BA}}(м/c^2)$$

$$W^n_{BO_2} = \frac{V^2_{BO_2}}{l_{BO_2}}(м/c^2)$$

$$W_B = qb \cdot \mu_W\,(м/c^2)$$

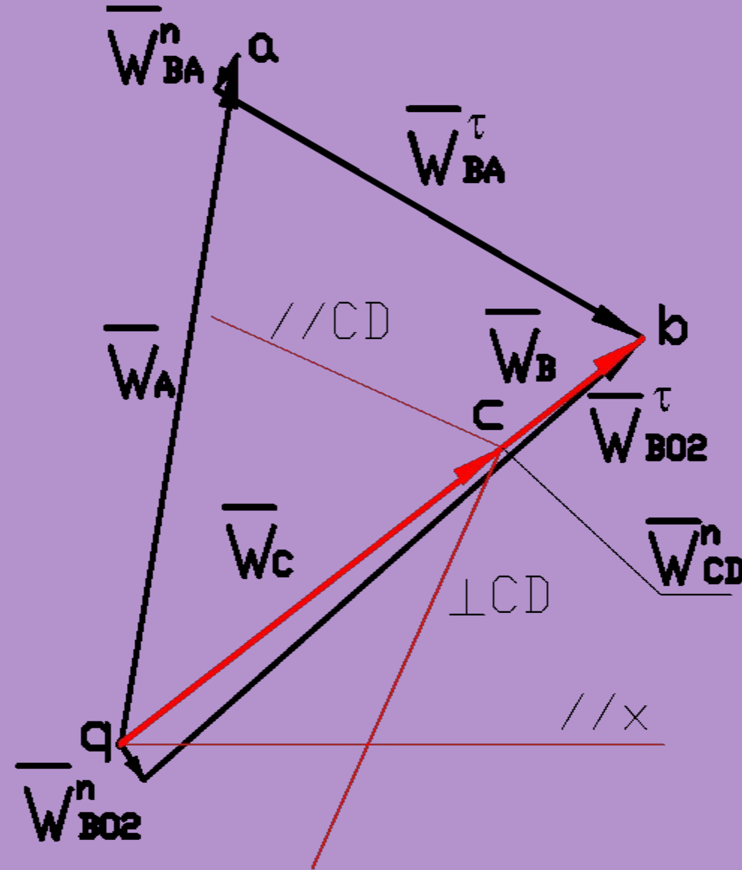
Схема механизма





Для определения ускорения точки *C* воспользуемся свойством подобия:

$$\frac{qc}{l_{CO_2}} = \frac{qb}{l_{BO_2}} \qquad W_C = qc \cdot \mu_W \,(м/с^2)$$



Система уравнений для ускорения точки *D* будет имеет вид:

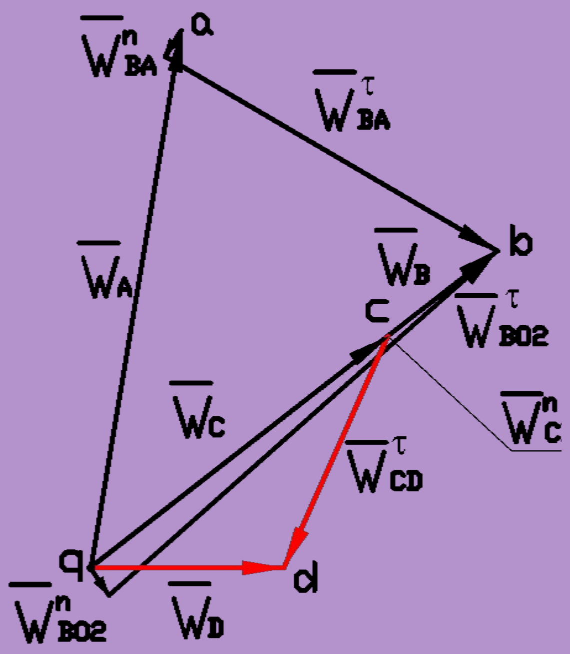
$$\begin{cases} \overrightarrow{W_D} = \overrightarrow{W_C} + \overrightarrow{W_{DC}} \\ \overrightarrow{W_D} = \overrightarrow{W_{D'}} + \overrightarrow{W_{DD'}} \end{cases}$$

Относительное ускорение $\overrightarrow{W_{DC}}$ представим в виде суммы двух составляющих — нормальной и тангенциальной

$$\begin{cases} \overrightarrow{W_D} = \underline{\underline{\overrightarrow{W_C}}} + \underline{\underline{\overrightarrow{W^n_{DC}}}} + \underline{\overrightarrow{W^\tau_{DC}}} \\ \overrightarrow{W_D} = \underline{\underline{\overrightarrow{W_C}}} + \underline{\overrightarrow{W_{DD'}}} \end{cases}$$

$$W^n_{DC} = \frac{V^2_{DC}}{l_{CD}} \,(м/с^2)$$

$$W_D = qd \cdot \mu_W \,(м/с^2)$$



Абсолютная величина углового ускорения может быть получена через тангенциальное ускорение:

$$\varepsilon_2 = \frac{W^\tau_{BA}}{l_{AB}} \qquad \varepsilon_3 = \frac{W^\tau_{BO_2}}{l_{BO_2}} \qquad \varepsilon_4 = \frac{W^\tau_{DC}}{l_{CD}} \,(рад/с^2)$$

2.3.5 Сложное движение точки

Сложное движение точки – это движение, рассматриваемое одновременно по отношению к двум системам отсчета, когда одна считается условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой.

Движение, совершенное точкой *М* по отношению к подвижным осям координат, называется ***относительным движением***. Скорость и ускорение этого движения называют *относительной скоростью* и *относительным ускорением* ($\overline{V_r}$ и $\overline{W_r}$).

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета со всеми точками связанного с ней пространства по отношению к неподвижной системе, является для точки *М* ***переносным движением***. Скорость и ускорение этого движения называют переносной скоростью и переносным ускорением ($\overline{V_e}$, $\overline{W_e}$)

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей: $\overline{V_a} = \overline{V_e} + \overline{V_r}$

Теорема Кориолиса: в случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки равна векторной сумме переносного, относительного и кориолисового ускорений.

$$\overline{W_a} = \overline{W_e} + \overline{W_r} + \overline{W_k}$$

Где $\overline{W_k} = 2 \cdot \overline{\omega_e} \times \overline{V_r} = 2 \cdot \left|\overline{\omega_e}\right| \cdot \left|\overline{V_r}\right| \cdot \sin\alpha$ α - угол между векторами $\overline{\omega_e}$ и $\overline{V_r}$