2. Типовые динамические звенья

ТАУ

Характер переходных процессов в САУ зависит от динамических свойств элементов, из которых она состоит. Эти элементы могут быть самыми разнообразными по назначению, конструктивному исполнению, принципу работы и т.д. Однако, независимо от назначения и конструктивного исполнения, все элементы САУ могут быть подразделены на небольшое число звеньев, обладающих определенными динамическими свойствами, т.е. описываемых определенными дифференциальными уравнениями. Такие звенья носят название ***типовых динамических звеньев.***

- Различают две группы типовых звеньев: элементарные динамические звенья и
- реальные типовые динамические звенья, представляющие собой соединения из элементарных звеньев.

1. Элементарные типовые динамические звенья.

- Усилительное (пропорциональное) звено.
- Интегрирующее звено.
- Дифференцирующее звено.

2. Реальные типовые динамические звенья.

- Звенья первого порядка, основными из них являются.
  - Инерционное звено.
  - Реальное дифференцирующее (инерционно-дифференцирующее).
  - Форсирующее звено.
  - Инерционно-форсирующее (упругое) звено.
- Звенья второго порядка.
  - Колебательное звено.
  - Консервативное звено.

1.1 Усилительное (пропорциональное) звено

Самым простым является звено, выходная величина которого прямо пропорциональна входной величине.

Уравнение такого звена во временной области

$$x_{\text{вых}}(t) = k\, x_{\text{вх}}(t),$$

где k – коэффициент передачи (усиления) звена.

Примерами такого звена являются: делитель напряжения, усилитель постоянного тока, рычажная передача, редукторная передача и др.

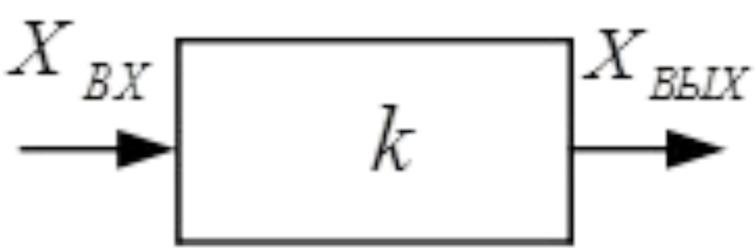
Предполагается, что передача сигнала от входа к выходу производится мгновенно без какой-либо инерции. Поэтому пропорциональные звенья называются ***безынерционными***.

Если перейти к операторной форме записи, то на выходе $X_{ВЫХ}(p) = k \cdot X_{ВХ}(p)$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{X_{ВЫХ}(p)}{X_{ВХ}(p)} = k$$

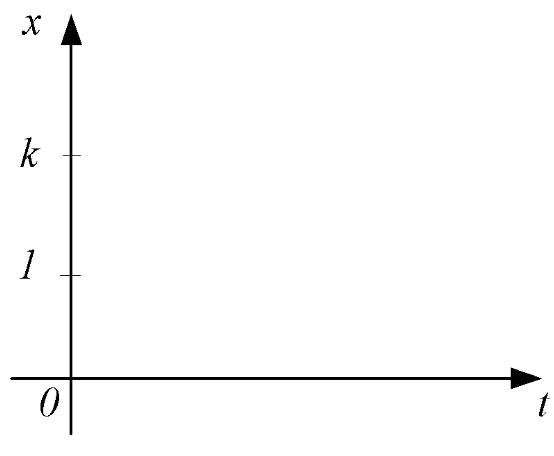
На структурных схемах изображается так:

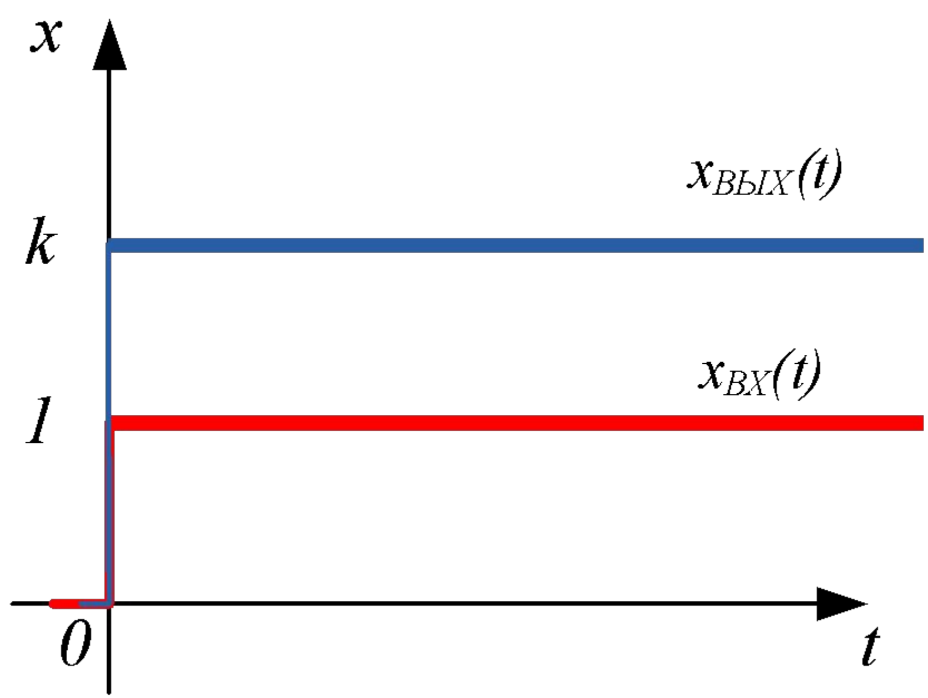


Переходя от коэффициента усиления к переходной функции, получаем

$$h(t) = x_{\text{вых}}(t) = k \cdot 1(t).$$

Графическое изображение переходной функции усилительного звена показано на рисунке . Эта функция соответствует идеальному пропорциональному звену.




x
k
1
0
t
xВЫХ(t)
xВХ(t)

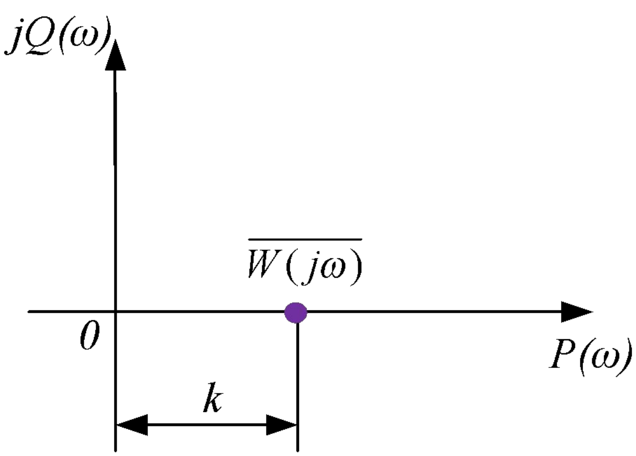
Переходим к частотным характеристикам.
Заменим p на $j\omega$

Комплексный коэффициент передачи (АФЧХ)

$$W(j\omega) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(j\omega)}{X_{\text{ВХ}}(j\omega)} = k = k + j \cdot 0.$$

$P(\omega)$ $Q(\omega)$

Годограф комплексного коэффициента передачи $W(j\omega)$ при $0 < \omega < \infty$ имеет вид точки, сдвинутой на расстоянии k от нуля по вещественной оси

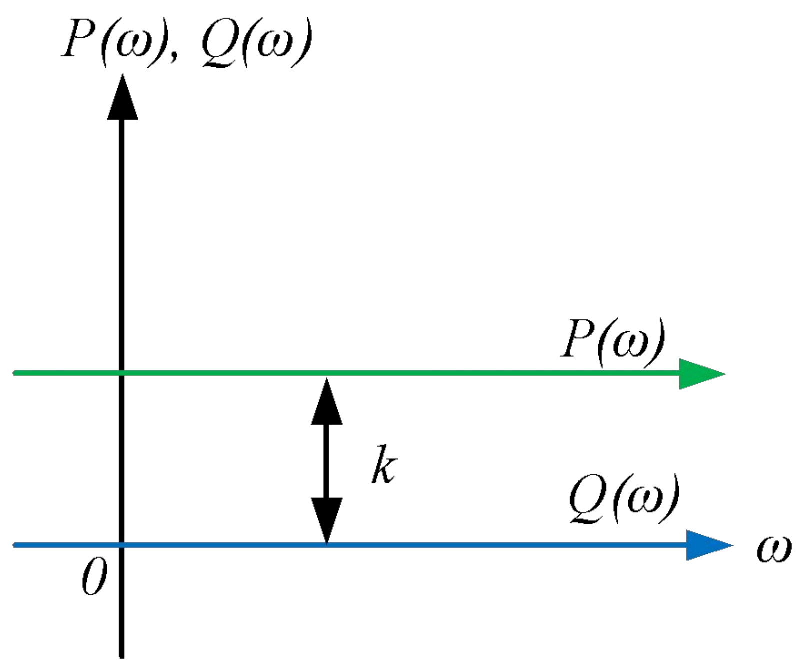


Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$P(\omega) = k.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = 0.$$

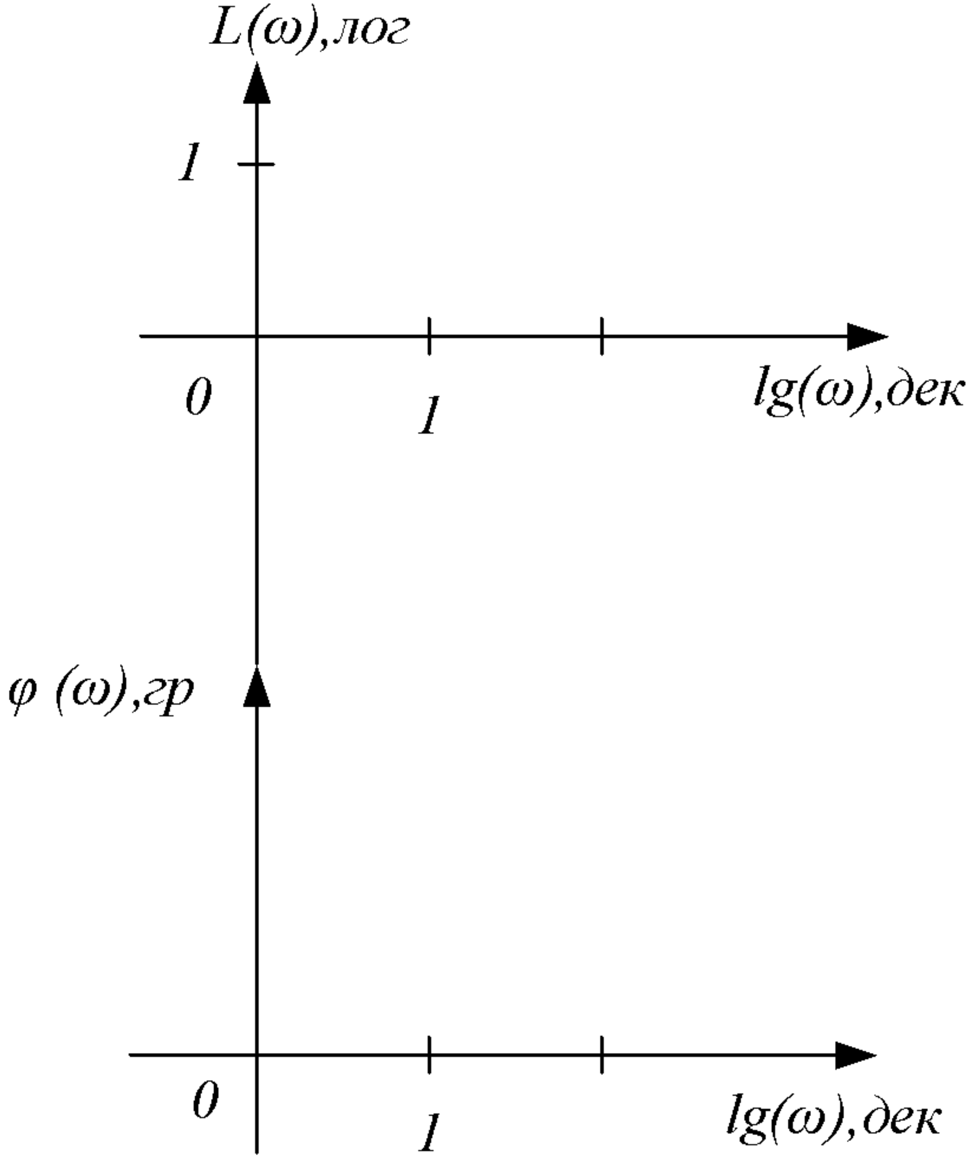


Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) равна

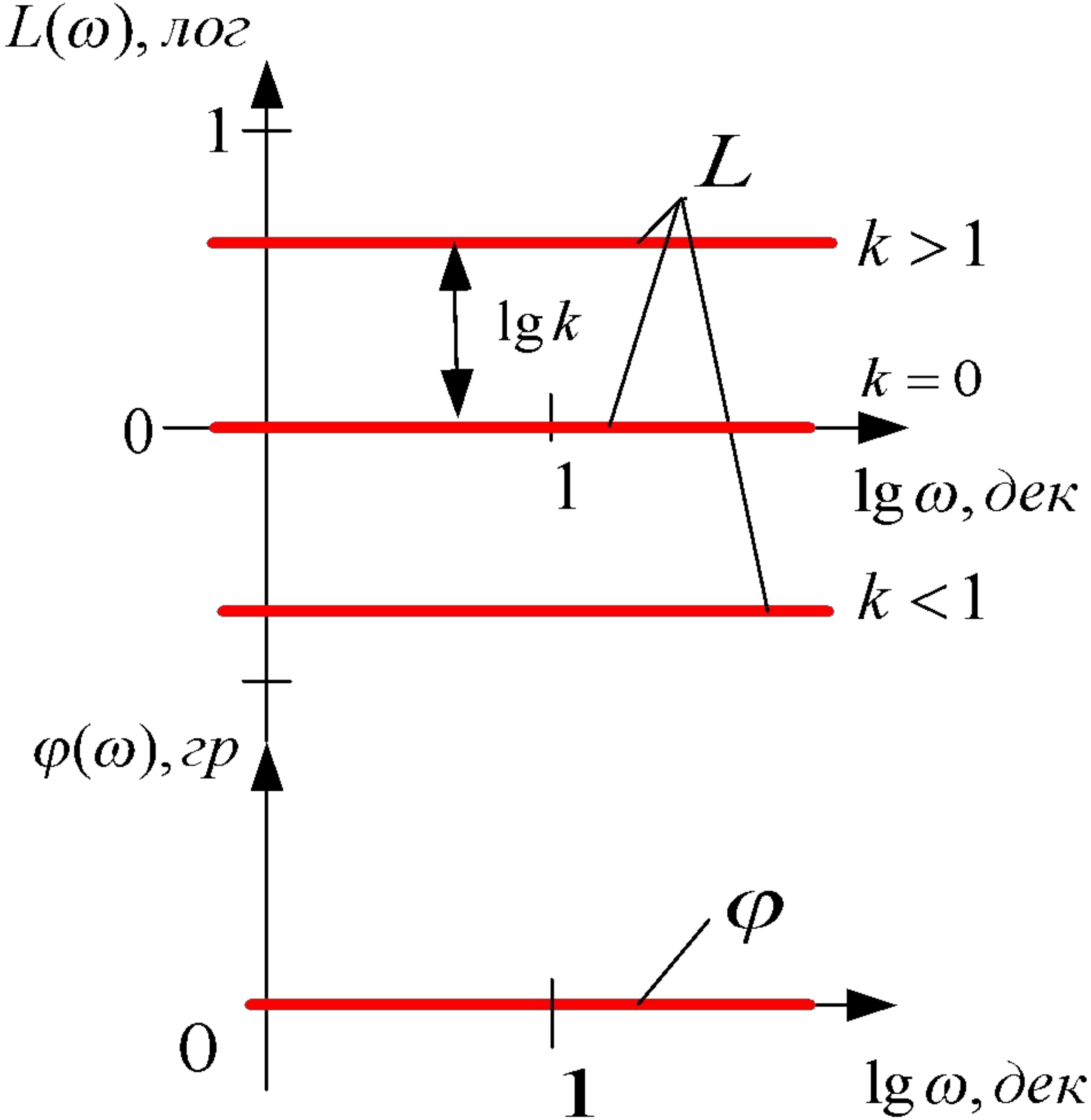
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{k^2 + 0^2} = k.$$

ЛАЧХ (логарифмическая амплитудно-частотная

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = arctg\frac{0}{k} = arctg0 = 0.$$



L(ω),лог
1
0
1
lg(ω),дек
φ (ω),гр
0
1
lg(ω),дек



$L(\omega)$, лог
1
L
$k > 1$
$\lg k$
$k = 0$
0
1
$\lg \omega$, дек
$k < 1$
$\varphi(\omega)$, гр
φ
0
1
$\lg \omega$, дек

1.2 Интегрирующее звено

Идеальным интегрирующим звеном называется звено, выходная величина которого пропорциональна интегралу входной величины

$$x_{ВЫХ}(t) = \frac{1}{T}\int x_{ВХ}(t)\,dt \quad ,$$

где *T* – постоянная времени.

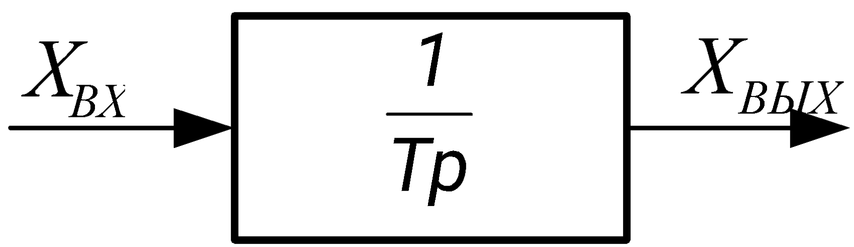
Такие звенья называются ***интегрирующими***. Примерами реальных элементов, эквивалентные схемы, которых сводятся к интегрирующему звену являются электрический конденсатор, вращающийся вал, гидравлический резервуар, гидравлический усилитель и др. Переходя к изображениям, получим

$$X_{ВЫХ}(p) = \frac{1}{Tp} X_{ВХ}(p)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{1}{Tp}$$

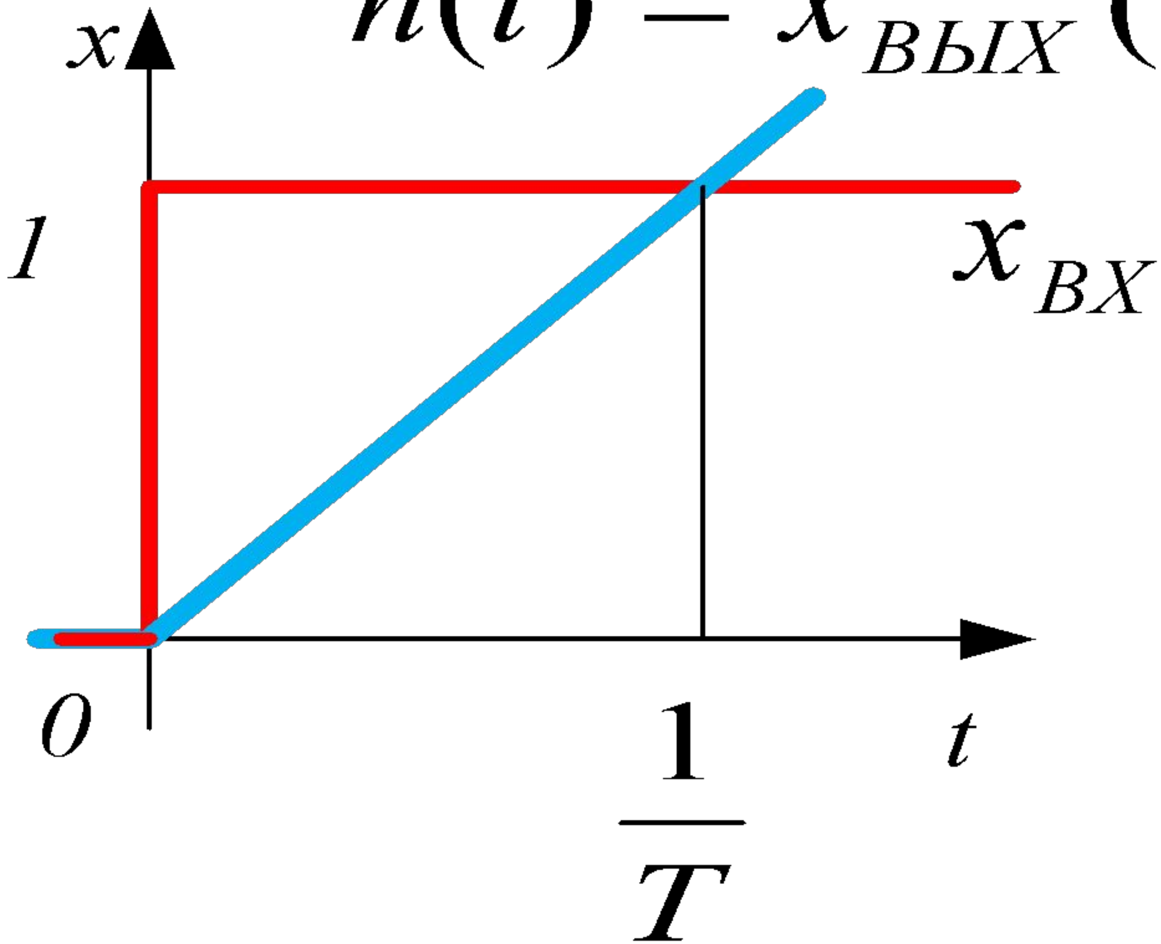
На структурных схемах



переходная функция интегрирующего звена

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{1}{Tp^2} \qquad h(t) = x_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{T}t$$

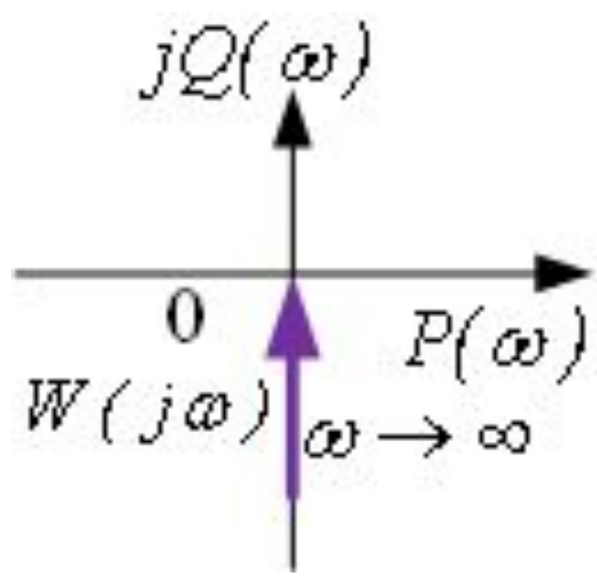
$$h(t) = x_{вых}(t)$$



Перейдём к частотным характеристикам, заменим p на $j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega} = -\frac{j}{T\omega} = \frac{1}{T\omega} \cdot e^{-j90^0}$$

Частотный годограф звена

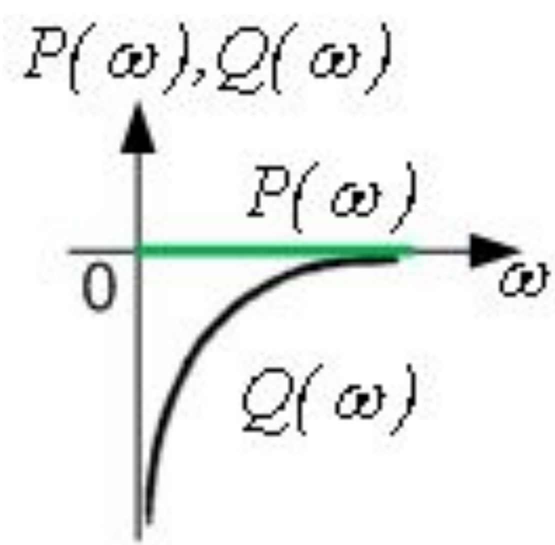


Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$P(\omega) = 0.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = -\frac{1}{T\omega}.$$



АЧХ интегрирующего звена

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega T}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

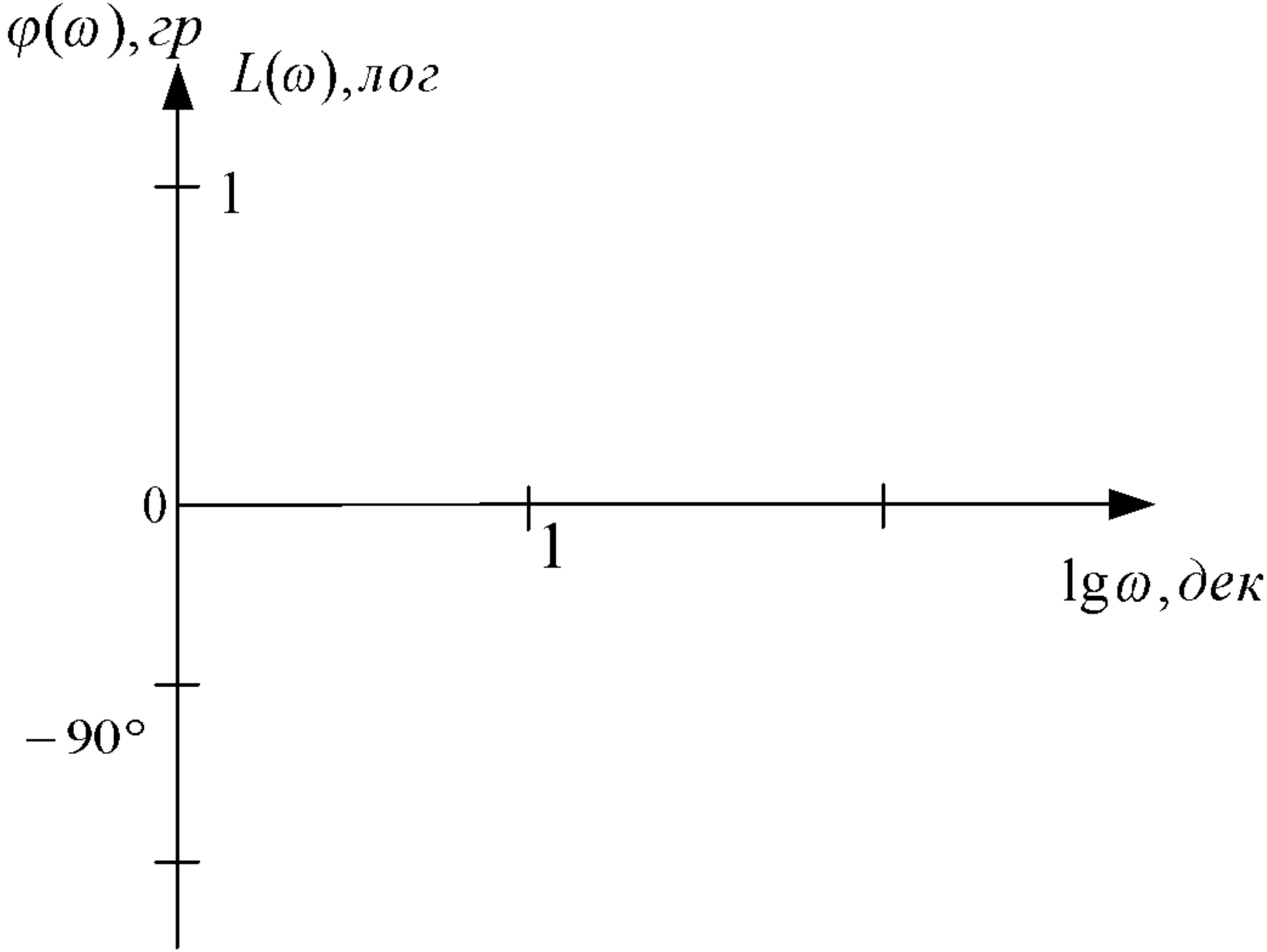
$$L(\omega) = \lg A(\omega) = -\lg T\omega.$$

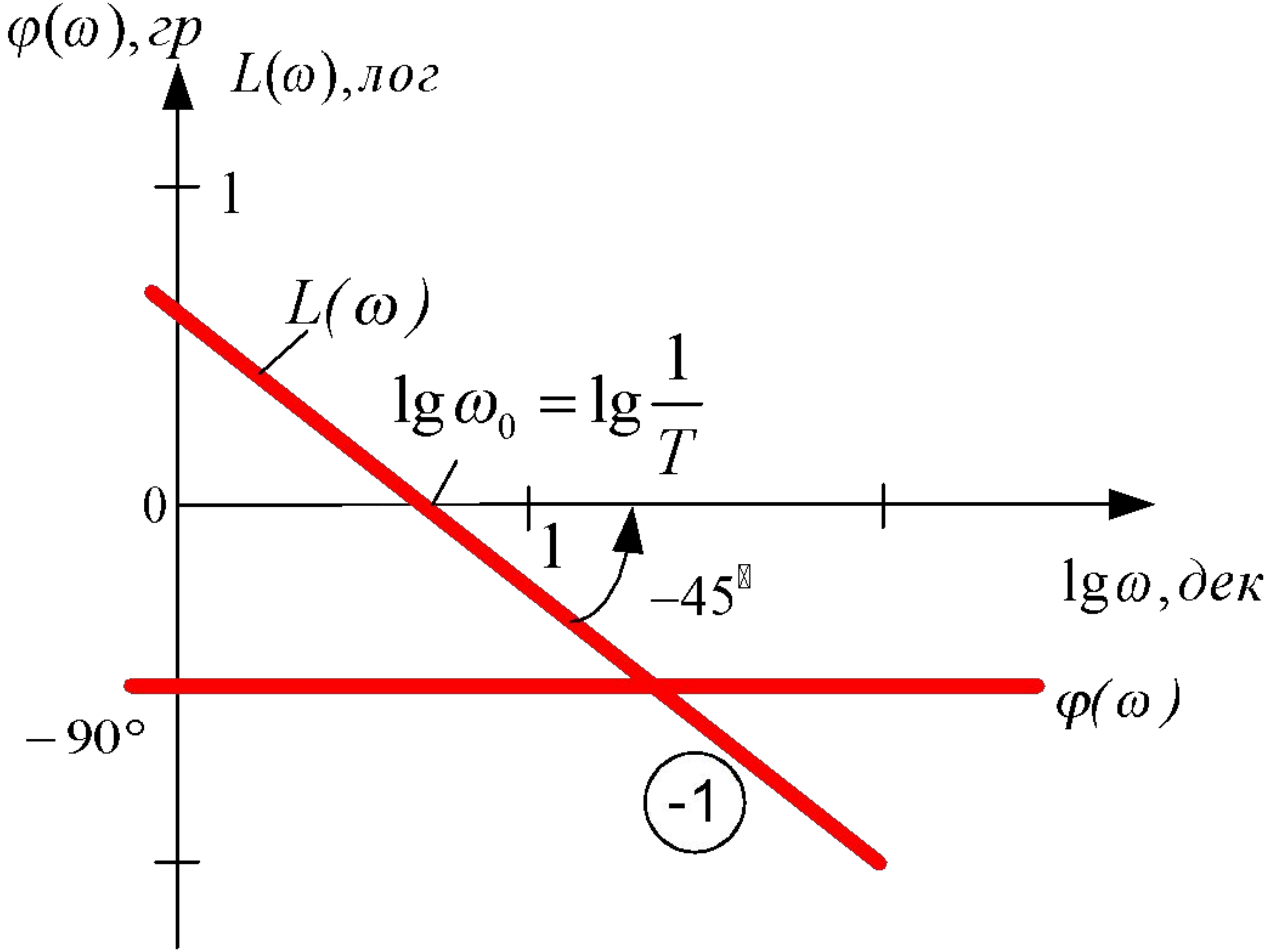
в функции *lgω* имеет вид прямой с наклоном -1 лог/дек.

Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\left(-\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}\right) = arctg\,\frac{-\frac{1}{T\omega}}{0} =$$

$$= -arctg\infty = -90°.$$


$\varphi(\omega), гр$
$L(\omega), лог$
1
0
1
$\lg\omega, дек$
$-90°$



φ(ω), гр
L(ω), лог
1
L(ω)
lg ω₀ = lg 1/T
0
1
−45°
lg ω, дек
φ(ω)
− 90°
-1

1.3 Дифференцирующее звено

На практике не существует реального элементе, в котором на выходе точно воспроизводилась бы производная от любого входного сигнала. Однако, составляя структурную схему системы, её можно так разделить на звенья, что введение понятия дифференцирующего звена будет вполне обосновано. В этом случае выходная величина $x_{ВЫХ}(t)$ зависит от входной величины $x_{ВХ}(t)$ как производная (идеальное **дифференцирующее** звено)

$$x_{ВЫХ}(t) = T\frac{dx_{ВХ}(t)}{dt}$$

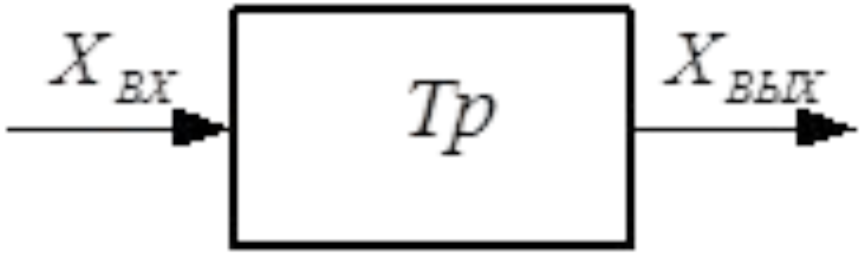
Переходя к изображениям, получим

$$X_{ВЫХ}(p) = TpX_{ВХ}(p)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{X_{ВЫХ}(p)}{X_{ВХ}(p)} = Tp$$

На структурных схемах изображается как

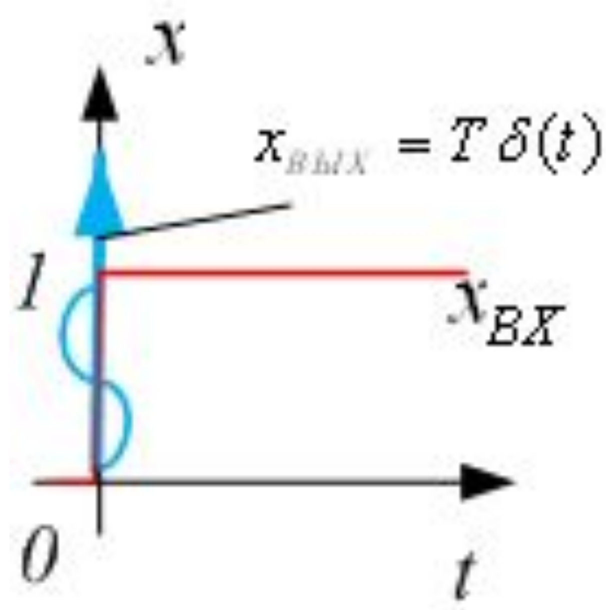


Изображение выходной величины равняется

$$X_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(p) = \frac{Tp}{p} = T.$$

переходная функция
равна

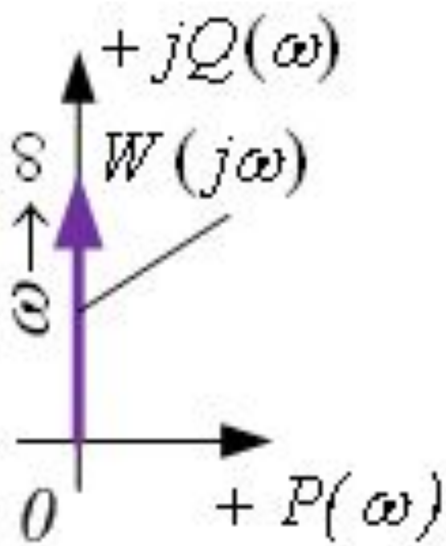
$$x_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t) = T\delta(t).$$



Перейдём к частотным характеристикам, заменим p на $j\omega$. Комплексный коэффициент передачи

$$W(j\cdot\omega)=\frac{X_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(j\cdot\omega)}{X_{\hat{A}\tilde{O}}(j\cdot\omega)}=j\cdot T\cdot\omega=T\cdot\omega\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

Годограф $W(j\omega)$

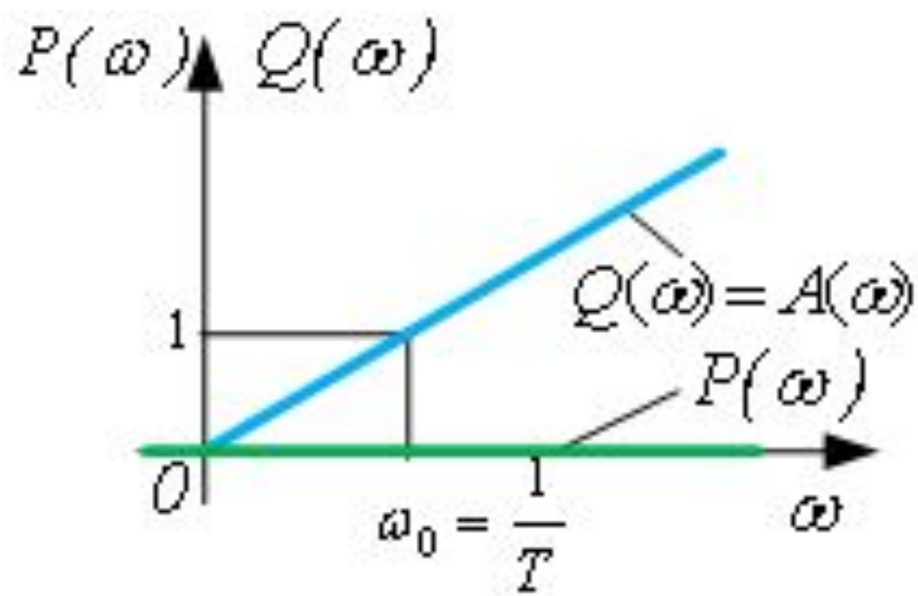


Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$P(\omega) = 0.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = T\omega.$$



АЧХ дифференцирующего звена $A(\omega) = \omega T.$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

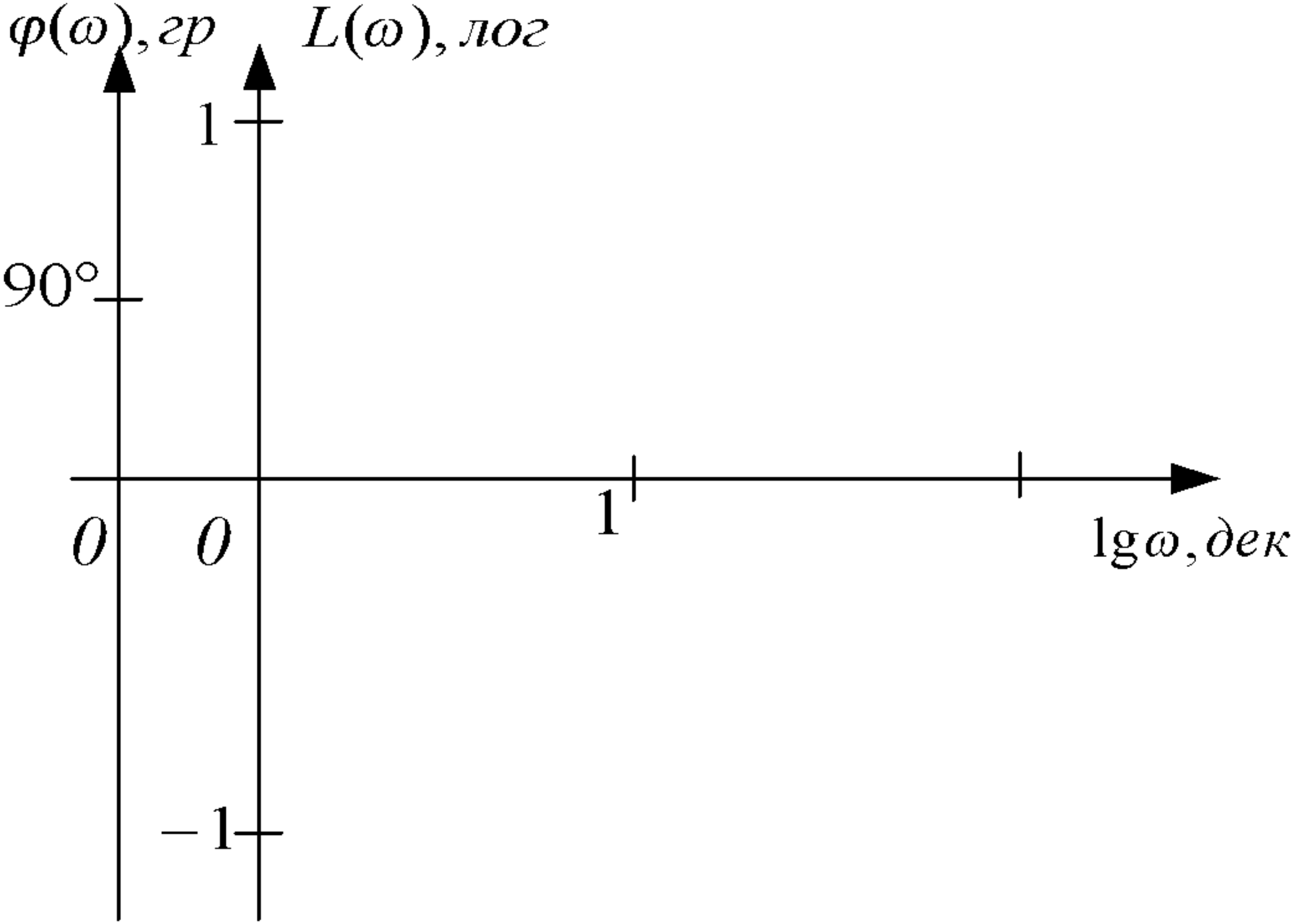
$$L(\omega) = \lg A(\omega) = \lg T\omega.$$

в функции $lg\omega$ имеет вид прямой с наклоном +1 лог/дек.

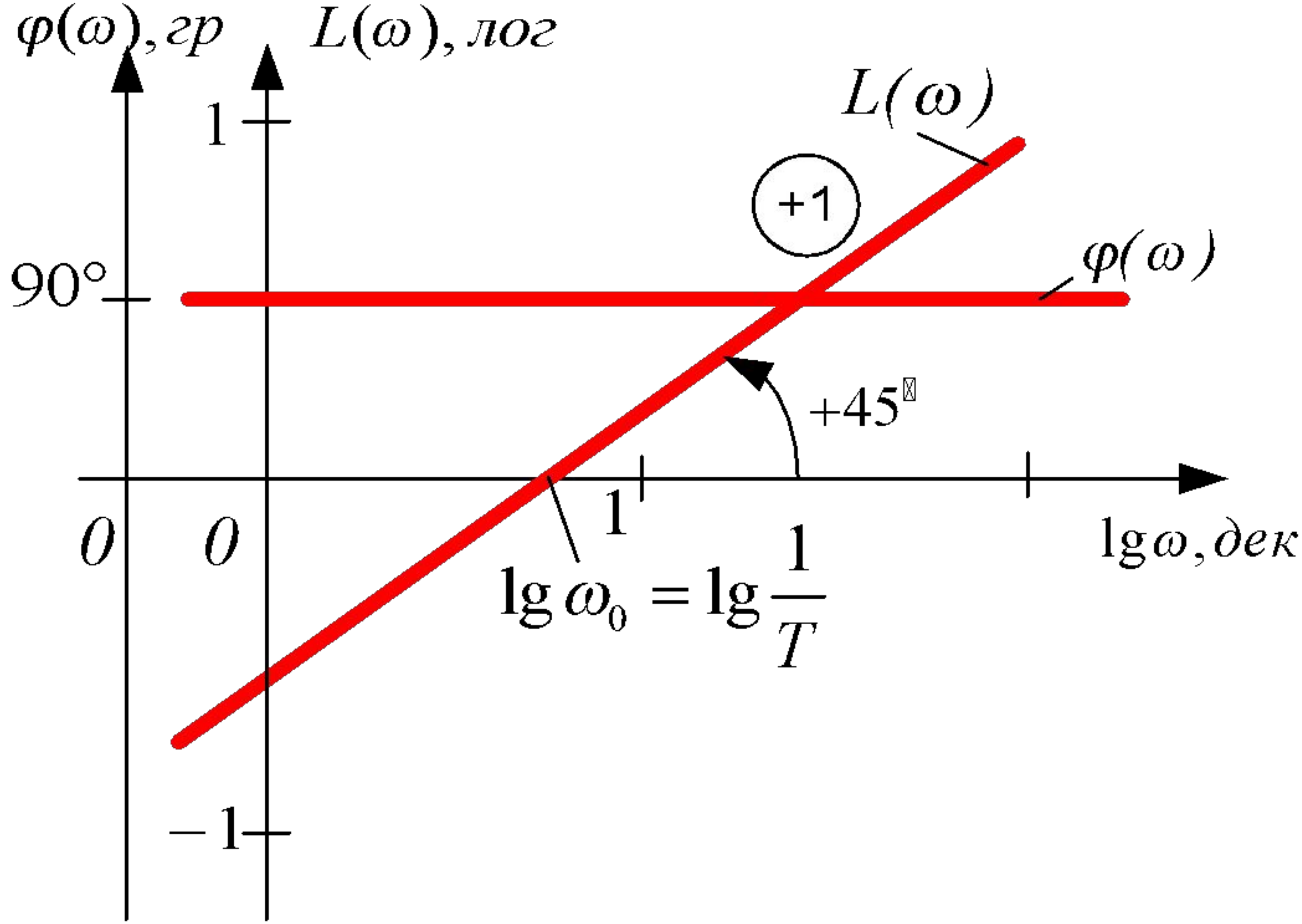
Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}\right) = arctg\frac{\frac{1}{T\omega}}{0} =$$

$$= arctg\infty = 90°.$$



φ(ω), гр
L(ω), лог
1
90°
0
0
1
lgω, дек
−1



φ(ω), гр
L(ω), лог
L(ω)
+1
90°
φ(ω)
+45°
1
0
0
1
lg ω, дек
lg ω₀ = lg 1/T
−1

2 Звенья первого порядка

2.1 Инерционное (апериодическое) звено

Инерционным (апериодическим) звеном 1 – го порядка называется такое звено, связь между выходом и входом определяется линейным заданным уравнением первого порядка вида

$$\grave{O}\cdot\frac{dx_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t)}{dt}+x_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t)=k\cdot x_{\hat{A}\tilde{O}}(t),$$

где *T* – постоянная времени инерционного звена, обусловленная наличием массы, момента инерции, индуктивности, ёмкости и т.д.;

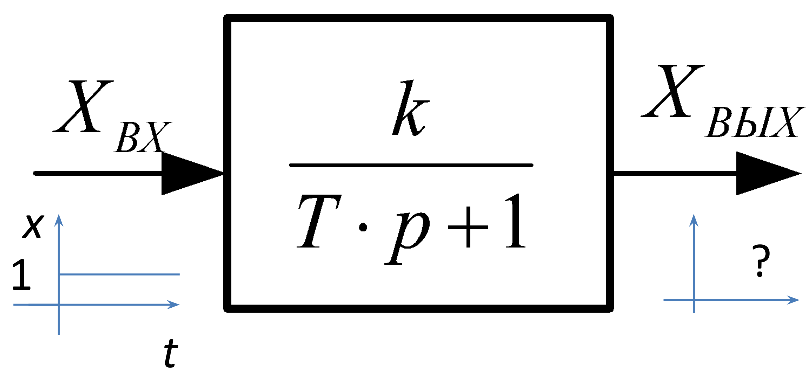
k – коэффициент усиления (или передачи).

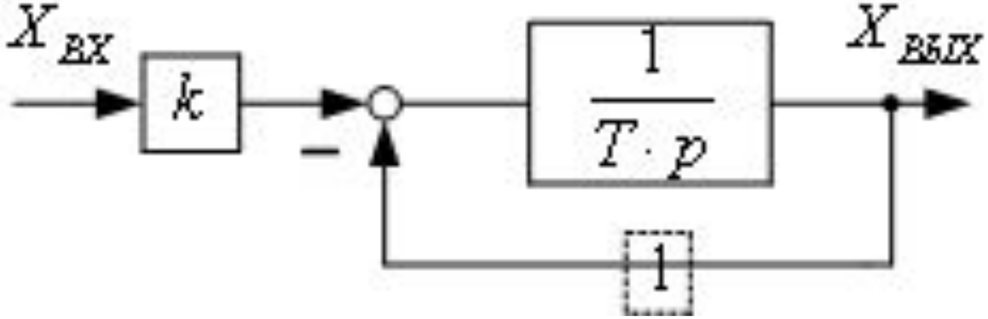
Применяя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

$$(T \cdot p + 1) X_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(p) = k \cdot X_{\hat{A}\tilde{O}}(p)$$

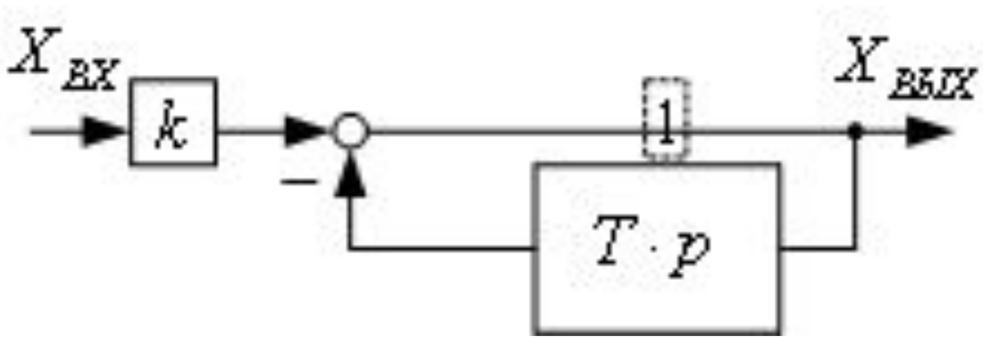
Передаточная функция инерционного звена первого порядка запишется как

$$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ(p)}}} = \frac{k}{T \cdot p + 1}.$$





Инерционное звено представлено в виде последовательного соединения усилительного звена с коэффициентом k и встречно-параллельного соединения интегрирующего звена $\frac{1}{T \cdot p}$ и усилительного звена с коэффициентом 1.



Инерционное звено представлено в виде последовательного соединения усилительного звена с коэффициентом k и встречно-параллельного соединения усилительного звена с коэффициентом 1 и дифференцирующего звена $T \cdot p$.

Решение уравнения

$$x_{\text{ВХ}}(t) = 1(\text{t}); \qquad X_{\text{ВХ}}(p) = \frac{1}{p}.$$

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = W(p) \cdot X_{\text{ВХ}}(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{B^m}{G^{n+1}(p)}.$$

$$G^{n+1}(p) = p \cdot (T \cdot p + 1) = T \cdot p^2 + p = 0;$$

$$p_1 = 0; \qquad p_2 = -\frac{1}{T}.$$

$$\frac{dG^{n+1}(p)}{dp} = 2 \cdot T \cdot p + 1;$$

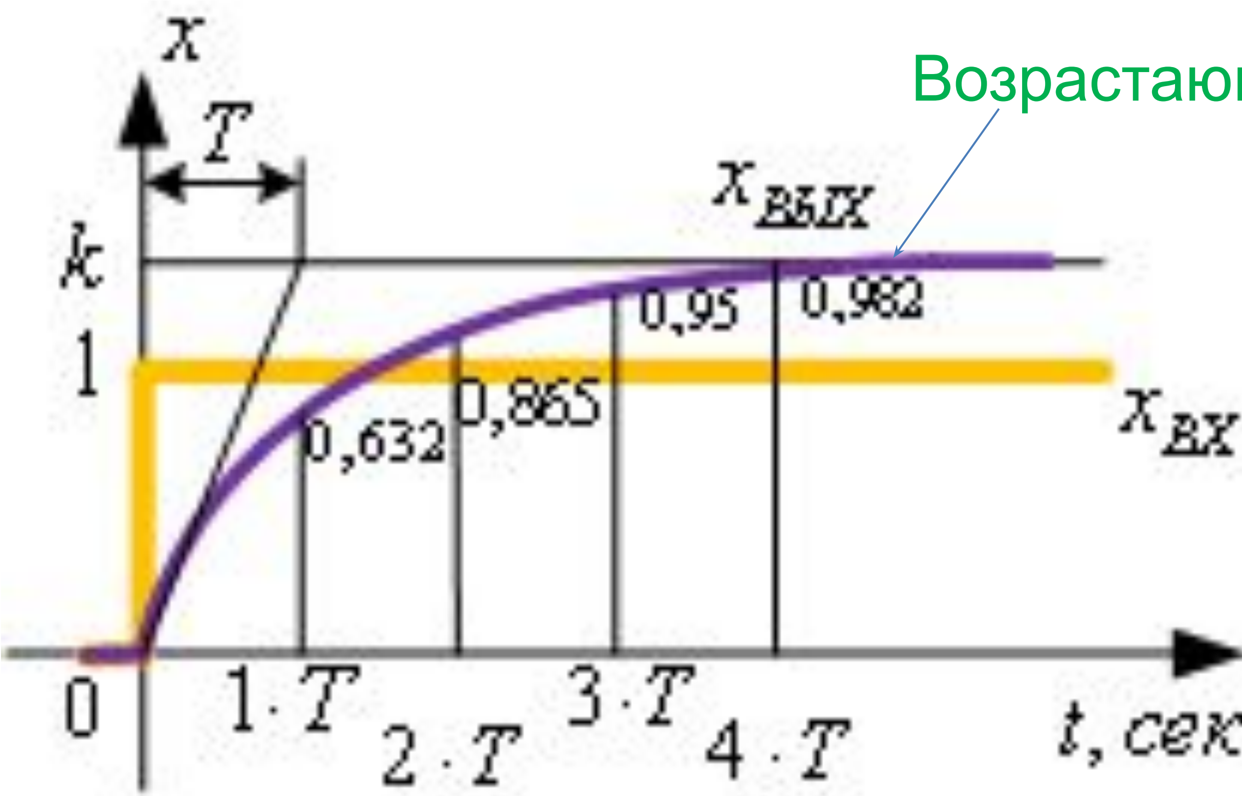
$$\frac{dG^{n+1}(p_1)}{dp} = 2 \cdot T \cdot p_1 + 1 = 2 \cdot T \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$\frac{dG^{n+1}(p_2)}{dp} = 2 \cdot T \cdot p_2 + 1 = 2 \cdot T \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) + 1 = -1;$$

$$B^m(p_1) = B^m(0) = k; \qquad B^m(p_2) = B^m\left(-\frac{1}{T}\right) = k;$$

$$x_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t) = \frac{B^m(0)}{\dfrac{dG^{n+1}(0)}{dp}} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{B^m(p_i)}{\dfrac{dG^{n+1}(p_i)}{dp}} \cdot e^{p_i t} = \frac{k}{1} + \frac{k}{-1} \cdot e^{-\frac{t}{T}} = k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Переходная функция



0	0
1	0,632 k
2	0,865 k
3	0,95 k
4	0,982 k
∞	k

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) или комплексный коэффициент передачи звена первого порядка получается путём замены p на $j\omega$ в выражении $W(p)$

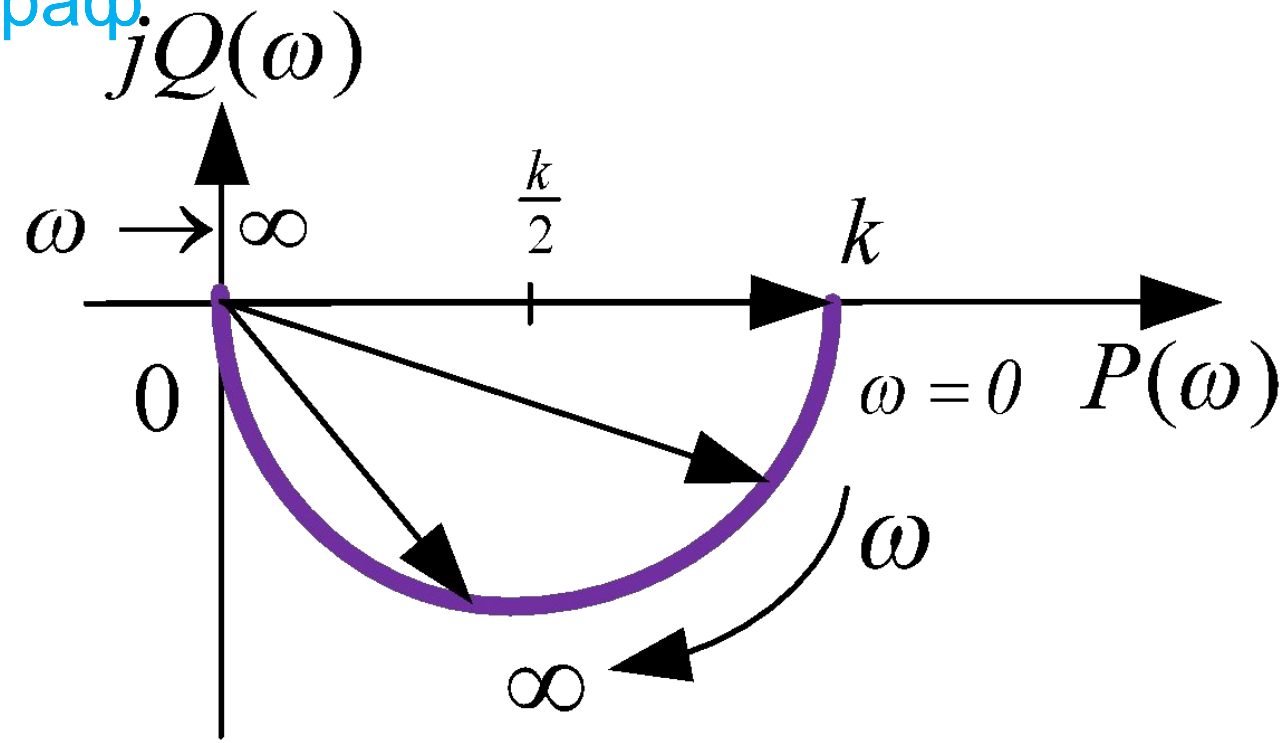
$$W(j\omega) = \frac{k}{T \cdot j \cdot \omega + 1}.$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{T \cdot j \cdot \omega + 1} = \frac{k}{1 + j \cdot T \cdot \omega} \cdot \frac{1 - j \cdot T \cdot \omega}{1 - j \cdot T \cdot \omega} =$$

$$= \frac{k}{1 + T^2 \cdot \omega^2} + j \cdot \frac{-k \cdot T \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$

$P(\omega)$ $Q(\omega)$

Частотный годограф



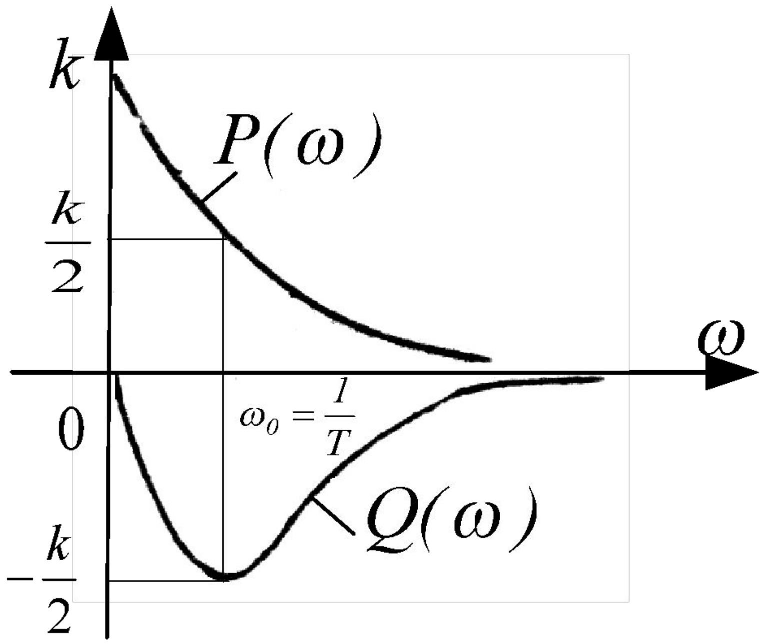
			0
	0		0

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$P(\omega) = \frac{k}{1+T^2 \cdot \omega^2}.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = \frac{-k \cdot T \cdot \omega}{1+T^2 \cdot \omega^2}.$$



Амплитудно-частотная характеристика АЧХ

инерционного звена

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=\sqrt{\left(\frac{k}{1+T^2\cdot\omega^2}\right)^2+\left(\frac{-k\cdot T\cdot\omega}{1+T^2\cdot\omega^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{k^2\cdot\left(1+T^2\cdot\omega^2\right)}{\left(1+T^2\cdot\omega^2\right)^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$$L(\omega)=\lg A(\omega)=\lg\frac{k}{\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}}=$$

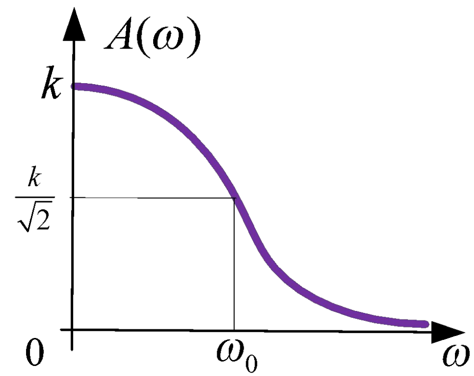
$$=\lg k-\lg\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}=\lg k-\frac{1}{2}\cdot\lg\left(1+T^2\cdot\omega^2\right).$$

Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = arctg\frac{\frac{-k\cdot T\cdot\omega}{1+T^2\cdot\omega^2}}{\frac{k}{1+T^2\cdot\omega^2}} = -arctgT\cdot\omega.$$

	0		
			0

$\omega_0 = \frac{1}{T}$ – сопрягающая чатсота.



Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

Точное построение *L(ω)* заключается в последовательном определении значений *L(ω)* при различных частотах *ω*. Построение ЛАХ обычно упрощают, заменяя точную *L΄(ω)* асимптотами. Первая асимптота характеризует при малых частотах, когда величиной $\omega^2 T^2$ можно пренебречь, т.е. принимают

$$L_2'(\omega) \approx \lg k - \lg 1 \approx \lg k.$$

Вторая асимптота характеризует при больших частотах, когда $\omega^2 T^2$ »1, т.е. принимают

$$L'_2(\omega) \approx \lg k - \lg \omega T.$$

Эта асимптота зависит от частоты. Если принять приращение частоты на одну де… …ся на…

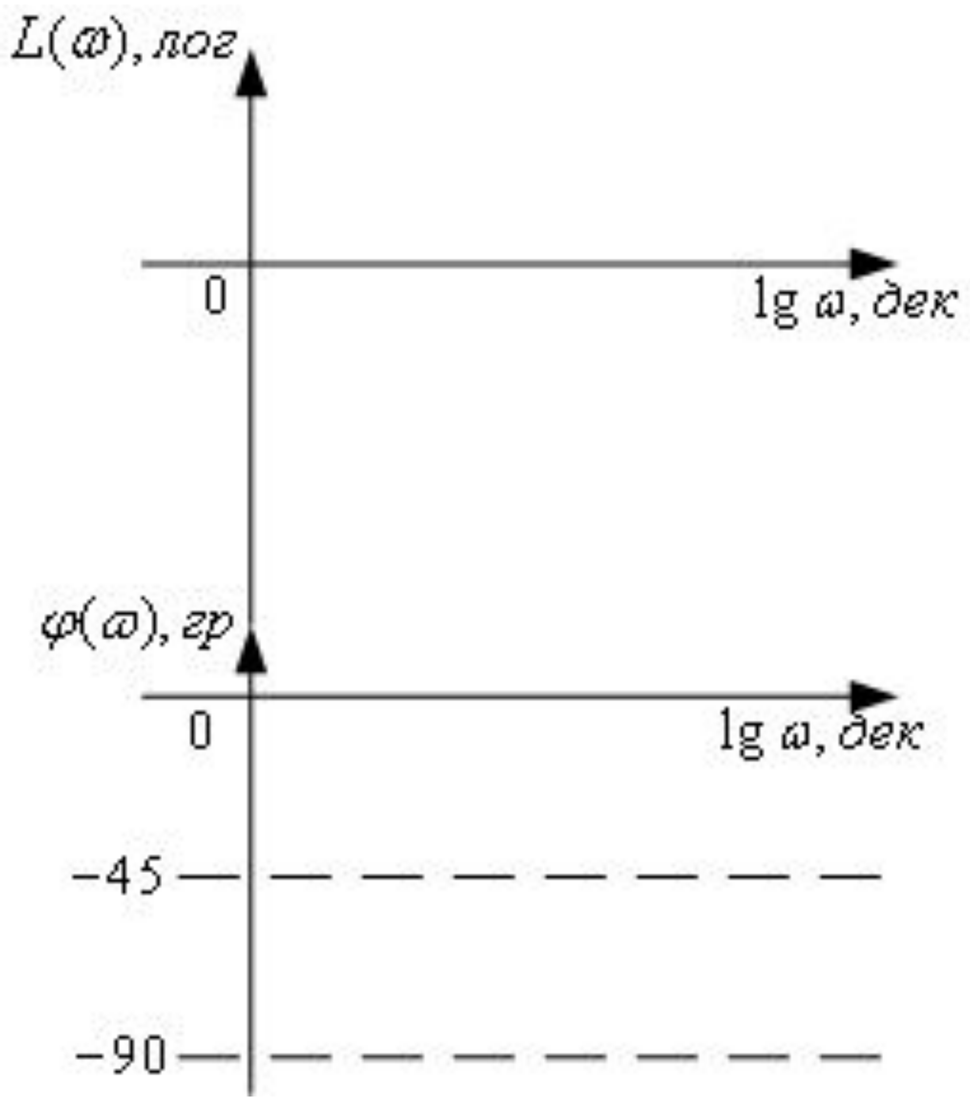
$$\Delta L'_2 = -\lg 10\omega_1 T + \lg \omega_1 T = -\lg 10 = -1\,\frac{\text{лог}}{\text{дек}}.$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T}.$$

Точка сопряжения обеих асимптот

Величина ω_0 определяется постоянной времени инерционного звена первого порядка и называется ***сопрягающей***

ЛАЧХ и ЛФЧХ инерционного звена первого порядка



Аппроксимированная ЛАЧХ
Точная ЛАЧХ
L(ω), лог
0
k > 1
lg k
-1
k = 1
0
lg ω, дек
-0,15
L
k < 1
lg 1/T
φ(ω), гр
0
lg ω, дек
-45
φ
-90

2.2 Реальное дифференцирующее звено первого порядка

Это звено, у которого связь между выходной и входной величиной определяется уравнением вида

$$\grave{O}\cdot\frac{dx_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t)}{dt}+x_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t)=k\cdot T\cdot\frac{dx_{\hat{A}\tilde{O}}(t)}{dt},$$

где T – постоянная времени звена;

k – коэффициент усиления звена.

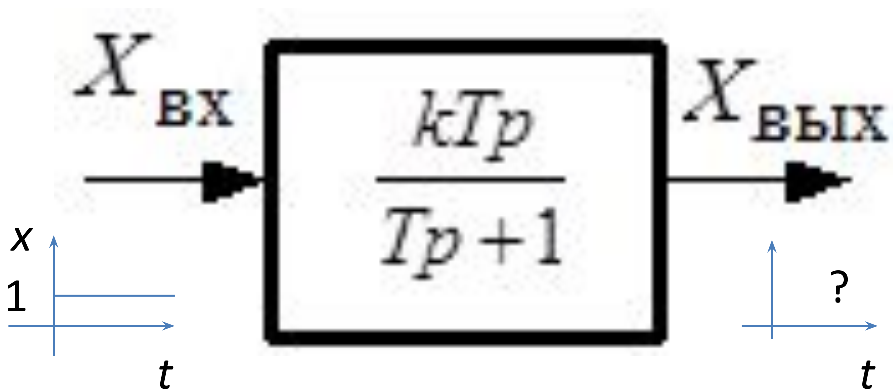
Такие звенья называются *реальными дифференцирующими*, или *инерционно-дифференцирующими*. Реальные дифференцирующие звенья применяются как средство корректирования переходных процессов, например, стабилизирующий трансформатор, дифференцирующие мостовые схемы и другое.

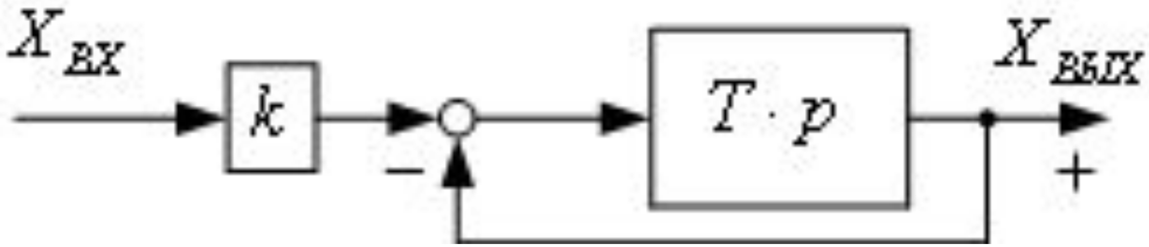
Применяя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

$$(T \cdot p + 1) \cdot X_{\text{вых}}(p) = k \cdot T \cdot p \cdot X_{\text{вх}}(p)$$

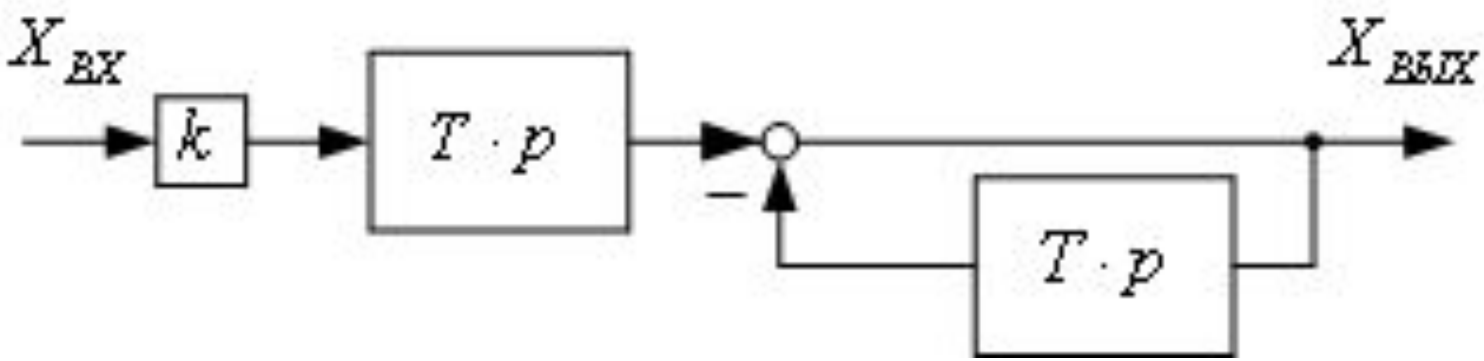
Передаточная функция реального дифференцирующего звена

$$W(p) = \frac{k \cdot T \cdot p}{T \cdot p + 1}$$





$X_{ВХ}$
k
$T \cdot p$
$X_{ВЫХ}$
−
+



$X_{ВХ}$
k
$T \cdot p$
$X_{ВЫХ}$
−
$T \cdot p$

Решение уравнения

$$x_{\text{ВХ}}(t) = 1(\text{t}); \qquad X_{\text{ВХ}}(p) = \frac{1}{p}.$$

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = W(p) \cdot X_{\text{ВХ}}(p) = \frac{k \cdot T \cdot p}{T \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k \cdot T}{T \cdot p + 1} = \frac{B^m}{G^{n+1}(p)}.$$

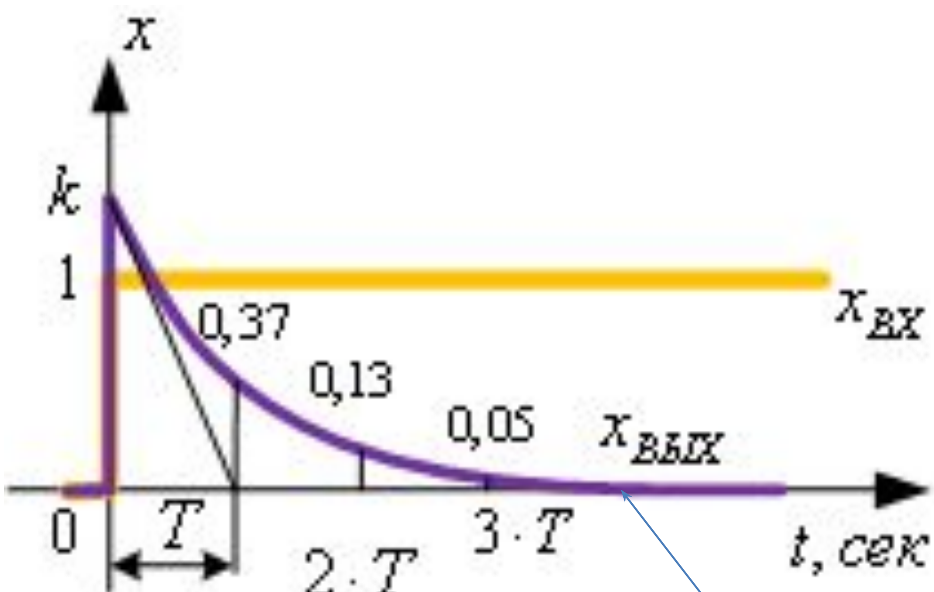
$$G^{n+1}(p) = T \cdot p + 1 = 0;$$

$$p_1 = -\frac{1}{T}.$$

$$\frac{dG^{n+1}(p)}{dp} = T;$$

$$\frac{dG^{n+1}(p_1)}{dp} = T; \qquad B^m(p_1) = B^m\left(-\frac{1}{T}\right) = k \cdot T;$$

$$x_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t) = \frac{B^m(0)}{\frac{dG^{n+1}(0)}{dp}} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{B^m(p_i)}{\frac{dG^{n+1}(p_i)}{dp}} \cdot e^{p_i t} = \frac{k \cdot T}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} = k \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$



Спадающая экспонента

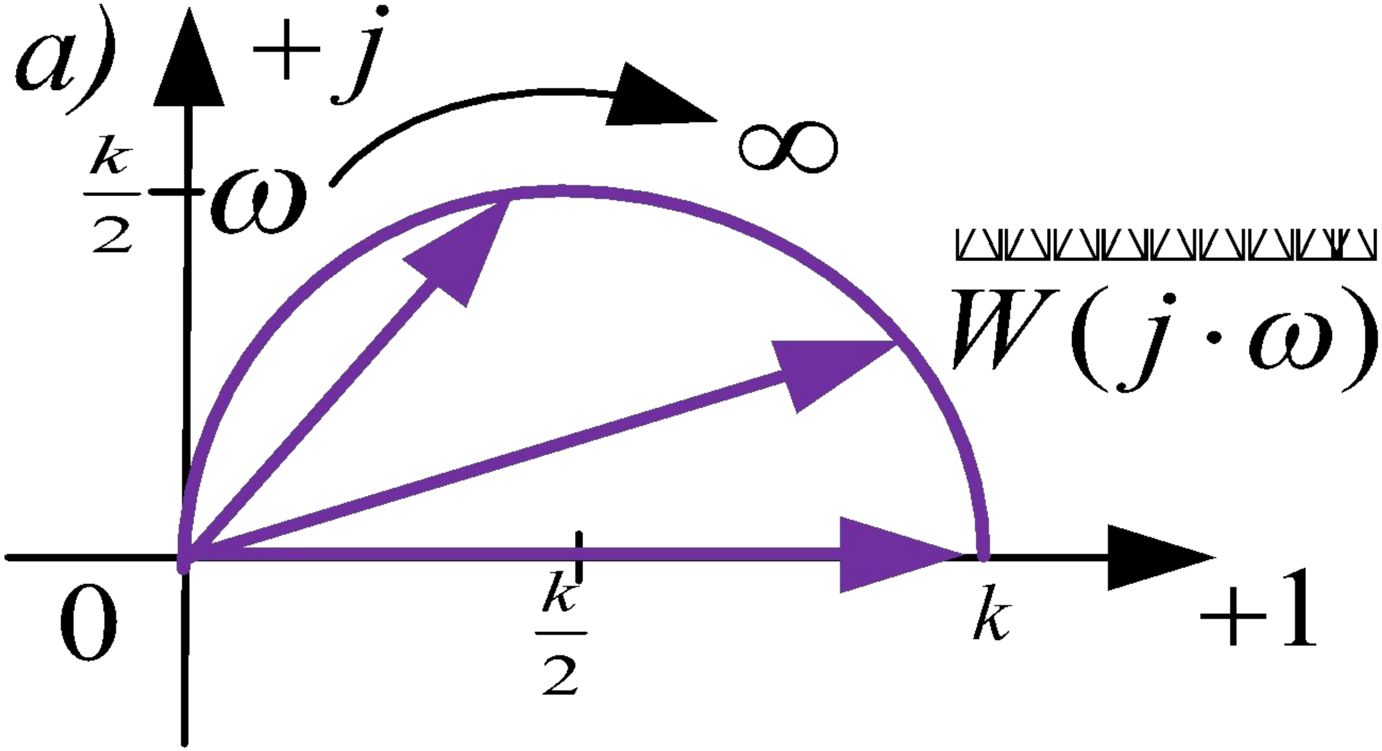
0	k
1	0,37 k
2	0,13 k
3	0,05 k
4	0,02 k
∞	0

Комплексный коэффициент передачи (АФЧХ) звена первого порядка получается путём замены p на $j\omega$ в выражении $W(p)$

$$W(j\omega) = \frac{k\cdot T\cdot j\cdot\omega}{T\cdot j\cdot\omega + 1}.$$

$$W(j\omega) = \frac{k\cdot T\cdot j\cdot\omega}{T\cdot j\cdot\omega + 1} = \frac{k\cdot T\cdot j\cdot\omega}{1 + j\cdot T\cdot\omega}\cdot\frac{1 - j\cdot T\cdot\omega}{1 - j\cdot T\cdot\omega} =$$

$$= \underbrace{\frac{k\cdot T^2\cdot\omega^2}{1 + T^2\cdot\omega^2}}_{P(\omega)} + j\cdot\underbrace{\frac{k\cdot T\cdot\omega}{1 + T^2\cdot\omega^2}}_{Q(\omega)}.$$



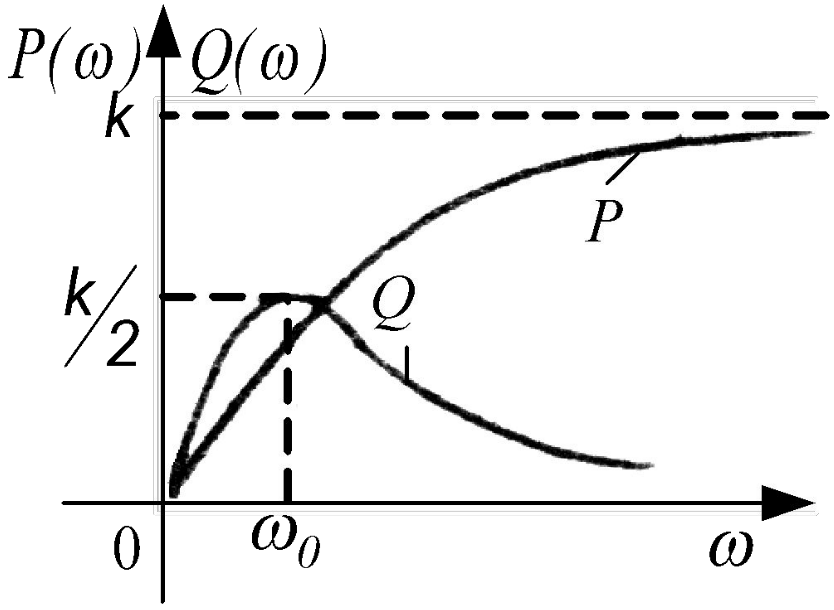
	0		0

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$P(\omega) = \frac{k \cdot T^2 \cdot \omega^2}{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = \frac{k \cdot T \cdot \omega}{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$



Амплитудно-частотная характеристика АЧХ

реального дифференцирующего звена

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=\sqrt{\left(\frac{k\cdot T^2\cdot\omega^2}{1+T^2\cdot\omega^2}\right)^2+\left(\frac{k\cdot T\cdot\omega}{1+T^2\cdot\omega^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{k\cdot T\cdot\omega}{\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$$L(\omega)=\lg A(\omega)=\lg\frac{k\cdot T\cdot\omega}{\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}}=$$

$$=\lg k\cdot T\cdot\omega-\lg\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}.$$

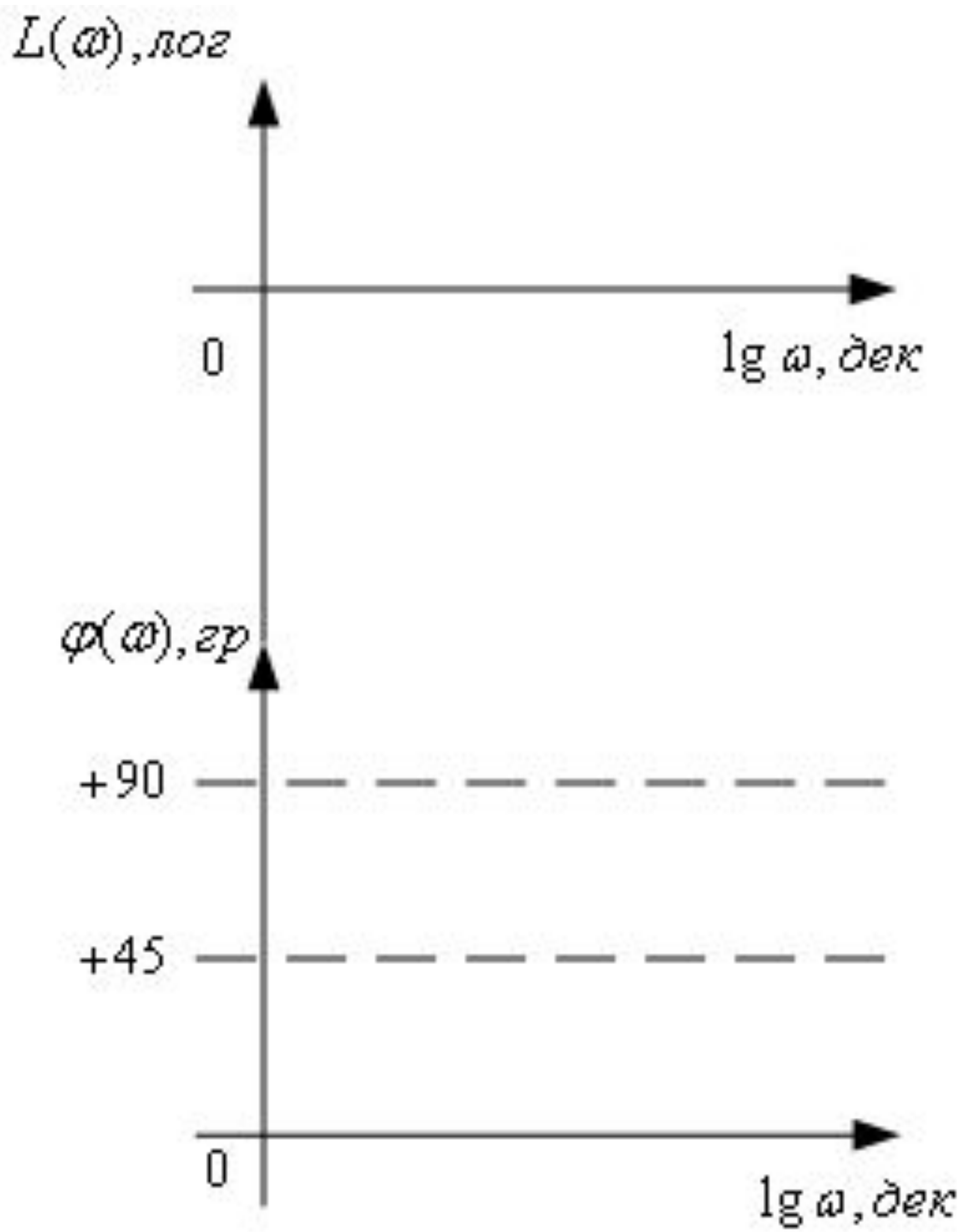
Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = arctg\,\frac{\frac{k\cdot T\cdot\omega}{1+T^2\cdot\omega^2}.}{\frac{k\cdot T^2\cdot\omega^2}{1+T^2\cdot\omega^2}.} = arctg\frac{1}{T\cdot\omega}.$$

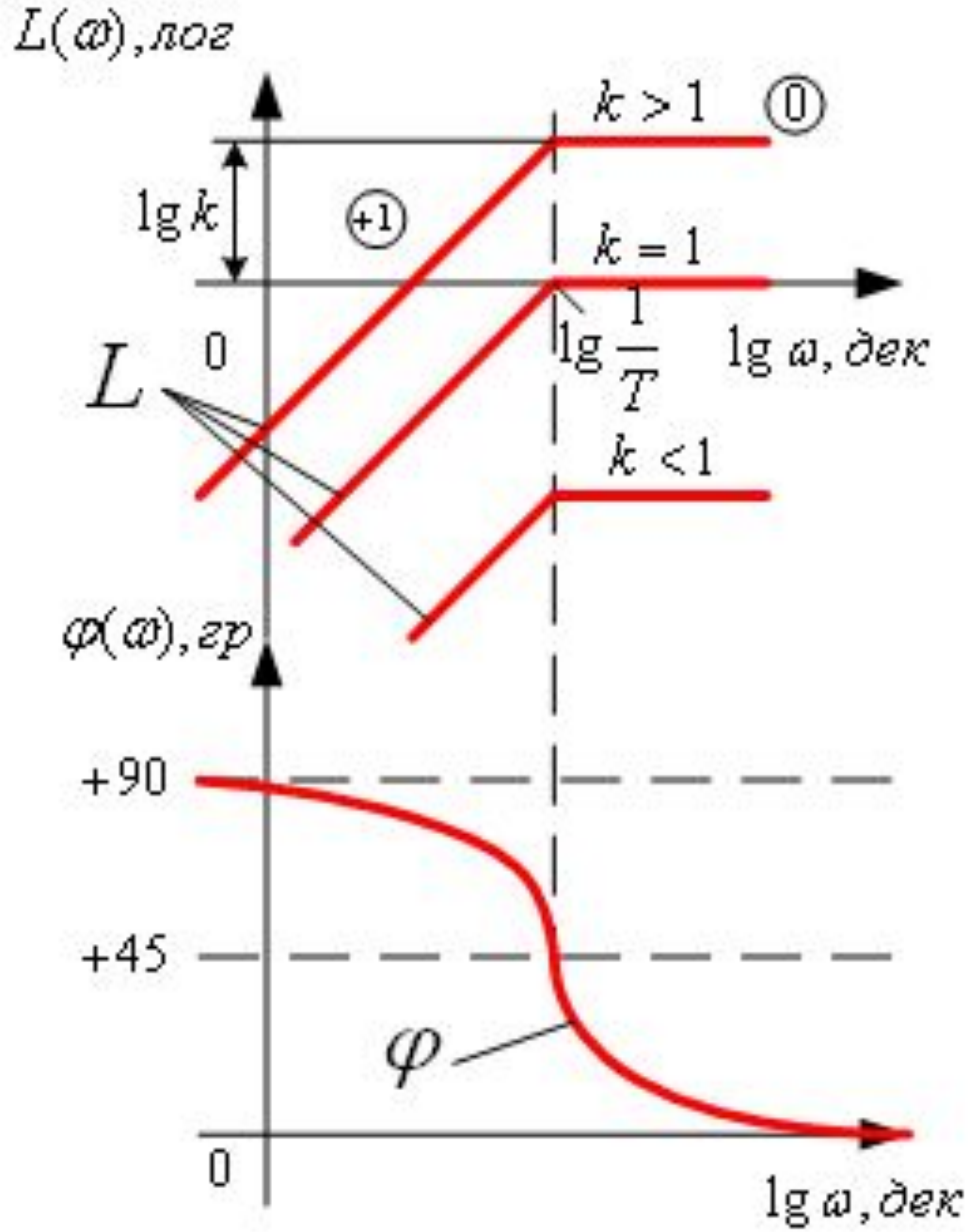
	0		

$\omega_0 = \frac{1}{T}$ – сопрягающая частота.

ЛАЧХ и ЛФЧХ



ЛАЧХ и ЛФЧХ



$L(\omega)$, лог
$k > 1$
0
lg k
+1
$k = 1$
0
L
lg $\frac{1}{T}$
lg ω, дек
$k < 1$
$\varphi(\omega)$, гр
+90
+45
φ
0
lg ω, дек

2.3 Форсирующее звено 1 – го порядка

Это звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$x_{вых}(t) = k\left[T\frac{dx_{вх}(t)}{dt} + x_{вх}(t)\right],$$

звено получается в результате соединения пропорционального и дифференцирующего звеньев.

Здесь k и T – те же.

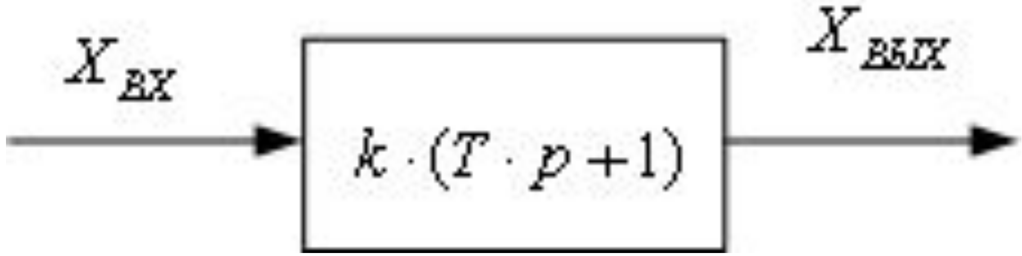
Применяя преобразование Лапласа при начальных нулевых условиях, получим операторное уравнение

$$X_{вых}(p) = k(Tp + 1)X_{вх}(p).$$

Передаточная функция форсирующего звена

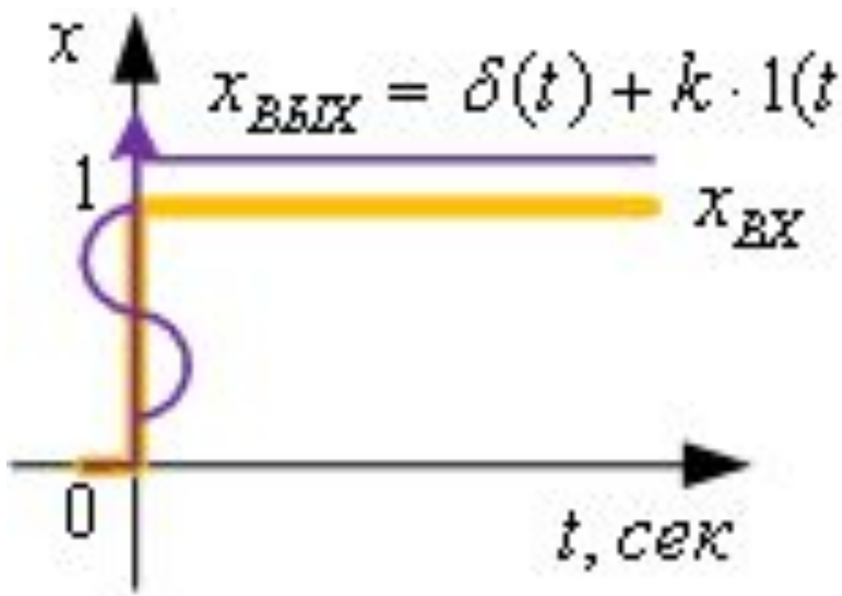
$$W(p) = k(Tp + 1).$$

На структурных схемах изображается



Переходная функция звена

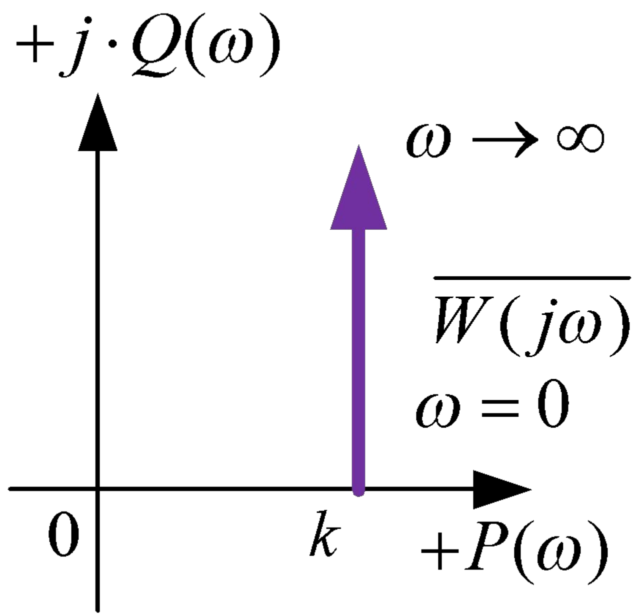
$$x_{\text{вых}}(t) = kT\delta(t) + kx_{\text{вх}}(t).$$



Комплексный коэффициент передачи или амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) получается путём замены p на $j\omega$ в выражении $W(p)$

$$W(j\omega) = k \cdot (T \cdot j \cdot \omega + 1).$$

$$W(j\omega) = k \cdot (T \cdot j \cdot \omega + 1) = \underbrace{k}_{P(\omega)} + j \cdot \underbrace{k \cdot T \cdot \omega}_{Q(\omega)}.$$

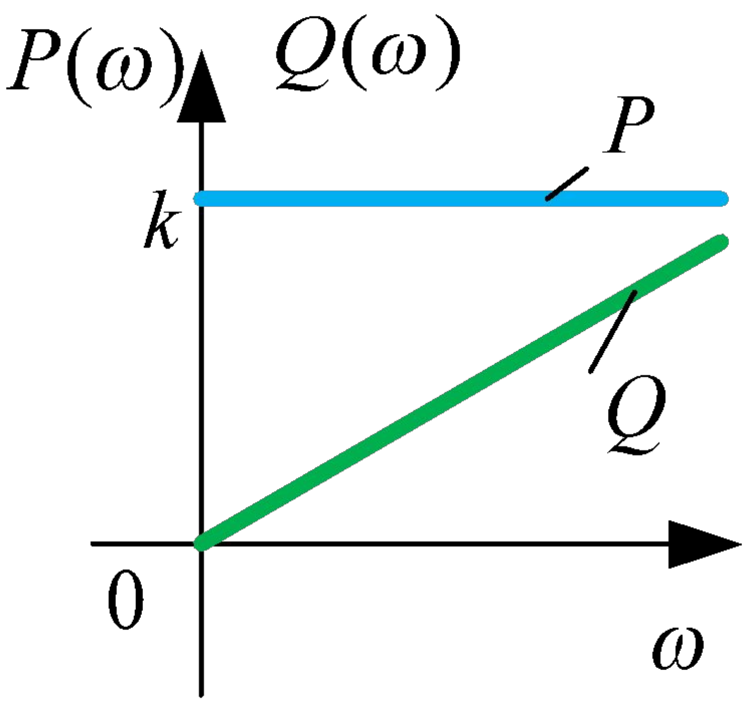


Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

$$P(\omega) = k.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = k \cdot T \cdot \omega.$$

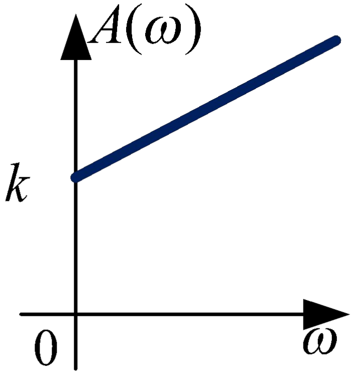


Амплитудно-частотная характеристика АЧХ

инерционного звена

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=\sqrt{k^2+\left(k\cdot T\cdot\omega\right)^2}=$$

$$=k\cdot\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}.$$



Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

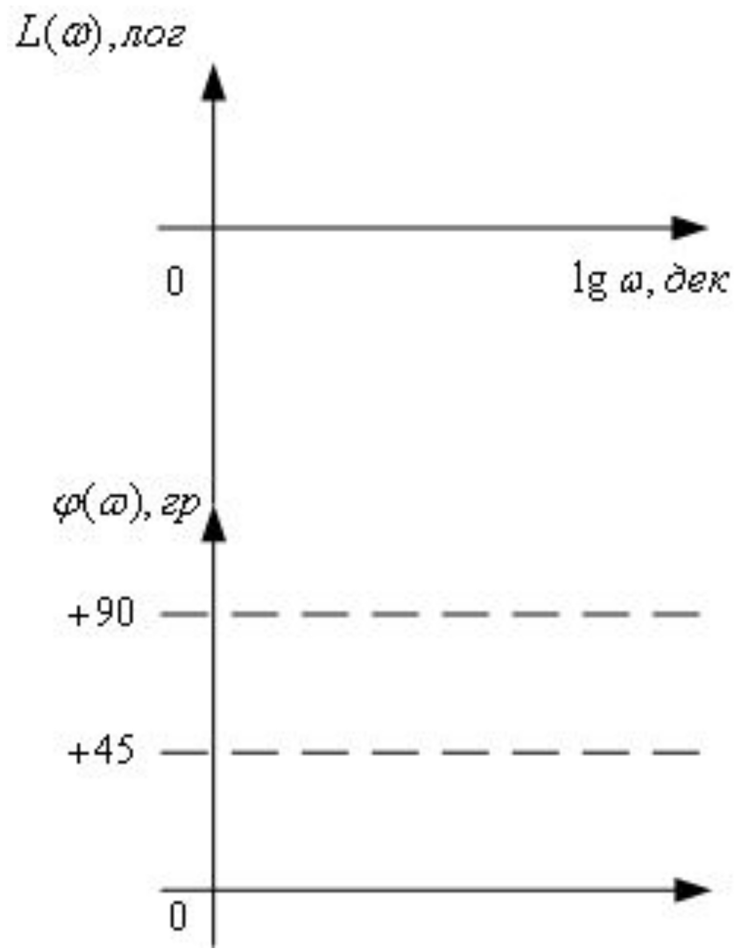
$$L(\omega)=\lg A(\omega)=\lg k\cdot\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}=$$

$$=\lg k+\lg\sqrt{1+T^2\cdot\omega^2}=\lg k+\frac{1}{2}\lg(1+T^2\cdot\omega^2).$$

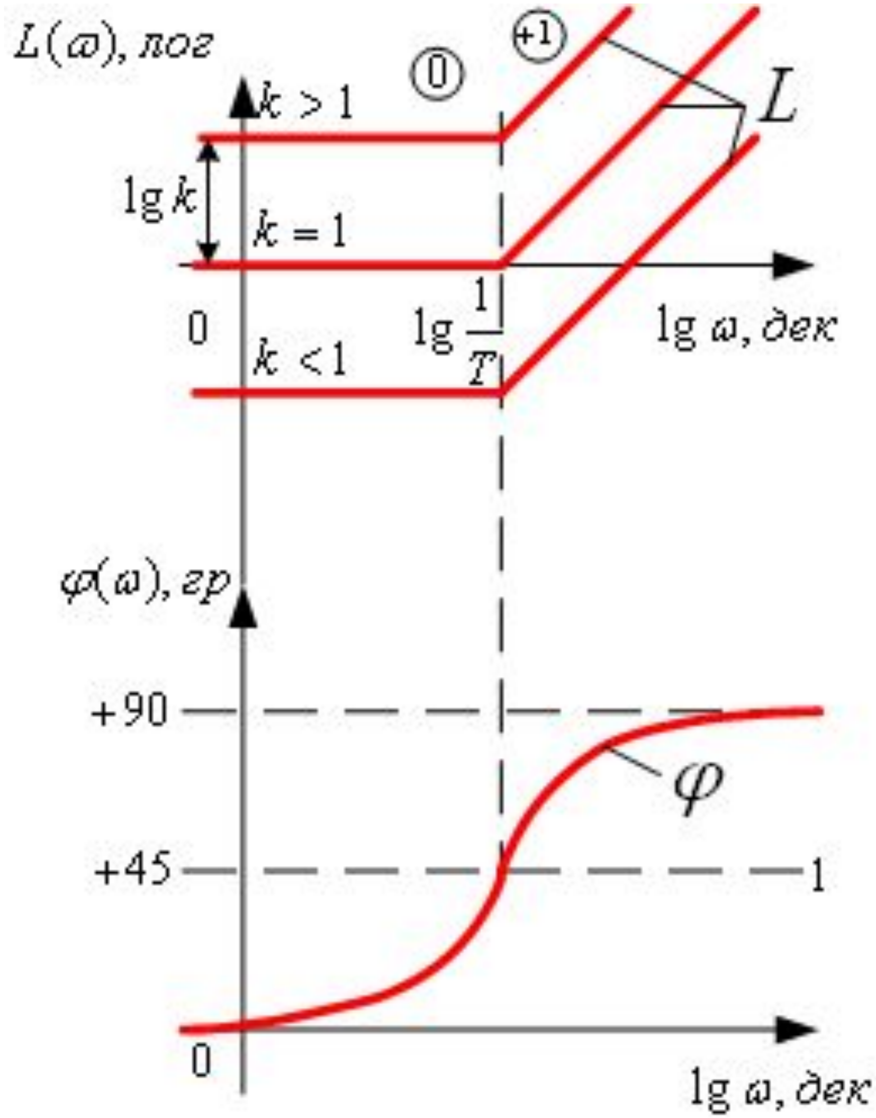
Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ)

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = arctg\frac{k\cdot T\cdot\omega}{k} = arctgT\cdot\omega.$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ



ЛАЧХ и ЛФЧХ



$\omega_0 = \dfrac{1}{T}$ – сопрягающая частота.

2.4 Инерционно-форсирующее (упругое) звено

Это звено, у которого связь между выходным и входным сигналами выражается уравнением вида:

$$\grave{O}\cdot\frac{dx_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t)}{dt}+x_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t)=k\cdot T\cdot\frac{dx_{\hat{A}\tilde{O}}(t)}{dt}+x_{\hat{A}\tilde{O}}(t)$$

где T – постоянная времени;

k – коэффициент усиления.

Существенным параметром инерционно-форсирующего звена является коэффициент усиления. Если $k<1$, то звено по своим свойствам приближается к интегрирующему и инерционному звеньям. Если $k>1$, то звено ближе к дифференцирующему и инерционно-дифференцирующему звеньям.

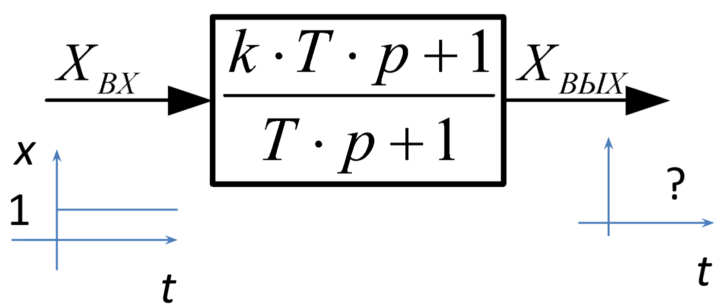
Применяя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

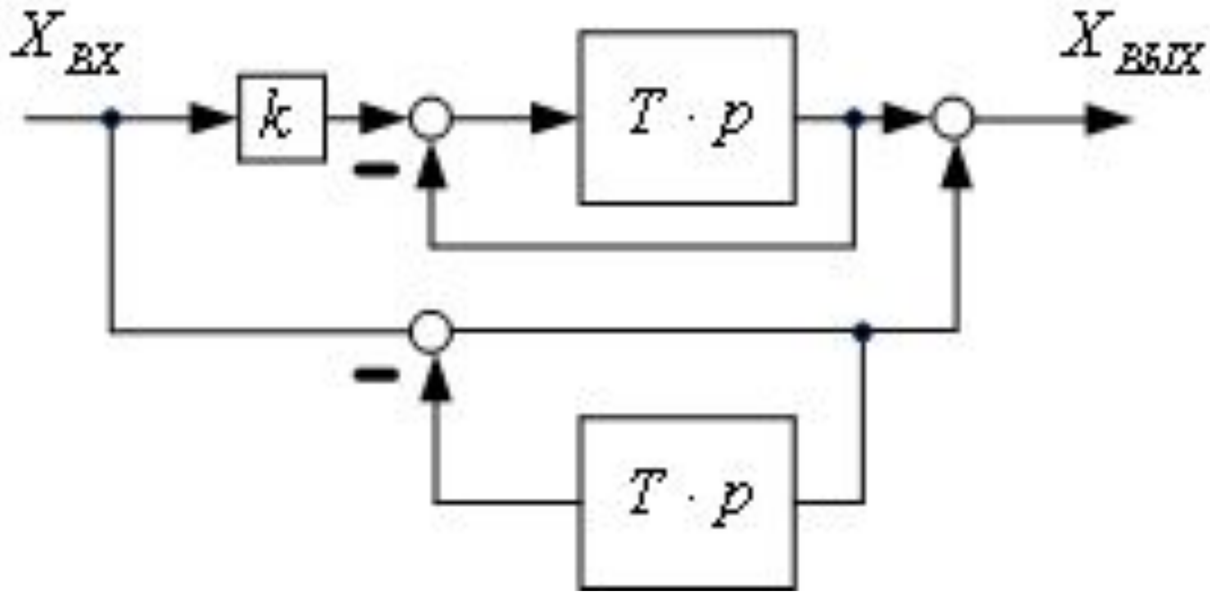
$$(T \cdot \eth + 1) \cdot X_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(\eth) = (k \cdot T \cdot p + 1) \cdot X_{\hat{A}\tilde{O}}(p)$$

Передаточная функция упругого звена

$$W(p) = \frac{X_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(p)}{X_{\hat{A}\tilde{O}}(p)} = \frac{k \cdot T \cdot p + 1}{T \cdot p + 1}.$$

На структурных схемах изображается





$X_{вх}$
$X_{вых}$
k
$T \cdot p$
$T \cdot p$

Решение уравнения

$$x_{\text{ВХ}}(t) = 1(\text{t}); \qquad X_{\text{ВХ}}(p) = \frac{1}{p}.$$

$$X_{\text{ВЫХ}}(p) = W(p) \cdot X_{\text{ВХ}}(p) = \frac{k \cdot T \cdot p + 1}{T \cdot p + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{B^m}{G^{n+1}(p)}.$$

$$G^{n+1}(p) = p \cdot (T \cdot p + 1) = T \cdot p^2 + p = 0;$$

$$p_1 = 0; \qquad p_2 = -\frac{1}{T}.$$

$$\frac{dG^{n+1}(p)}{dp} = 2 \cdot T \cdot p + 1;$$

$$\frac{dG^{n+1}(p_1)}{dp} = 2 \cdot T \cdot p_1 + 1 = 2 \cdot T \cdot 0 + 1 = 1;$$

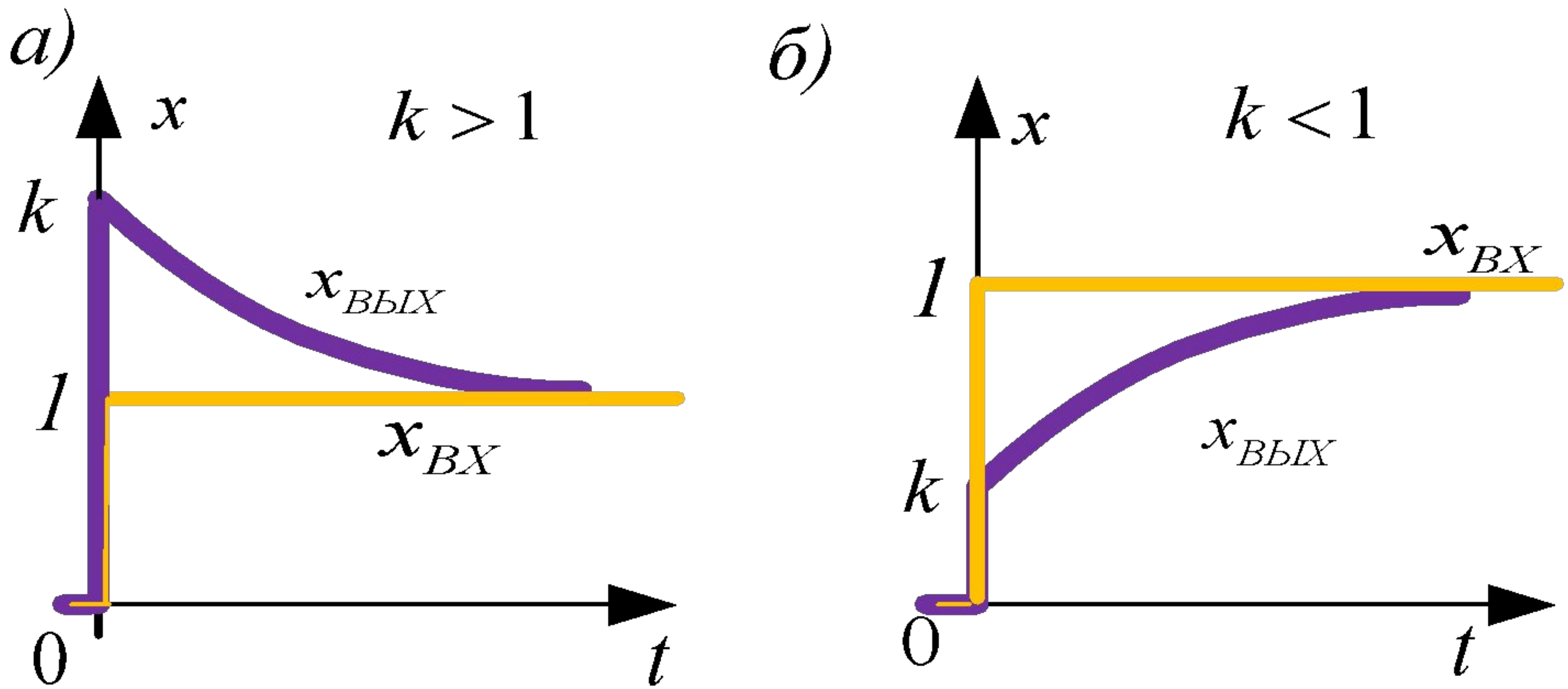
$$\frac{dG^{n+1}(p_2)}{dp} = 2 \cdot T \cdot p_2 + 1 = 2 \cdot T \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) + 1 = -1;$$

$$B^m(p_1) = B^m(0) = k \cdot T \cdot 0 + 1 = 1; \quad B^m(p_2) = B^m\left(-\frac{1}{T}\right) = k \cdot T \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) + 1 = 1 - k;$$

$$x_{\hat{A}\hat{U}\tilde{O}}(t) = \frac{B^m(0)}{\frac{dG^{n+1}(0)}{dp}} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{B^m(p_i)}{\frac{dG^{n+1}(p_i)}{dp}} \cdot e^{p_i t} = \frac{1}{1} + \frac{1-k}{-1} \cdot e^{-\frac{t}{T}} =$$

$$= 1 - (1 - k \cdot e^{-\frac{t}{T}}) = 1 + (k - 1 \cdot e^{-\frac{t}{T}}).$$

Переходная функция
звена


а)
x
k > 1
k
x_ВЫХ
1
x_ВХ
0
t
б)
x
k < 1
x_ВХ
1
x_ВЫХ
k
0
t

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) или комплексный коэффициент передачи звена первого порядка получается путём замены p на $j\omega$ в выражении $W(p)$

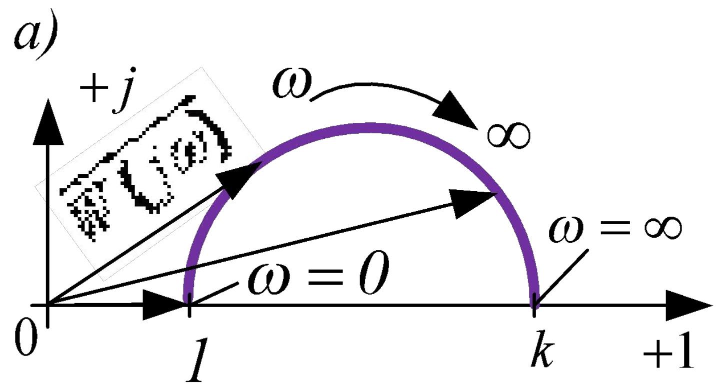
$$W(j\omega) = \frac{k \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1}{T \cdot j \cdot \omega + 1}.$$

$$W(j\omega) = \frac{k \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1}{T \cdot j \cdot \omega + 1} = \frac{k \cdot T \cdot j \cdot \omega + 1}{T \cdot j \cdot \omega + 1} \cdot \frac{1 - j \cdot T \cdot \omega}{1 - j \cdot T \cdot \omega} =$$

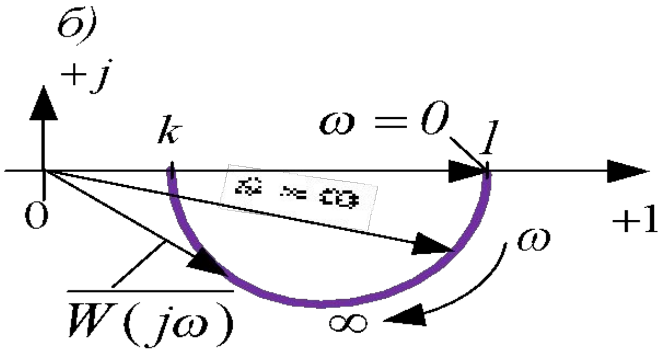
$$= \underbrace{\frac{1 + k \cdot T^2 \cdot \omega^2}{1 + T^2 \cdot \omega^2}}_{P(\omega)} + j \cdot \underbrace{\frac{T \cdot \omega \cdot (k - 1)}{1 + T^2 \cdot \omega^2}}_{Q(\omega)}.$$

	0		0

$k > 1$


а)
+j
$W(j\omega)$
ω
∞
$\omega = \infty$
$\omega = 0$
0
1
k
+1

$k < 1$


б)
+j
k
$\omega = 0$
1
0
+1
ω
$\omega = \infty$
$W(j\omega)$
∞

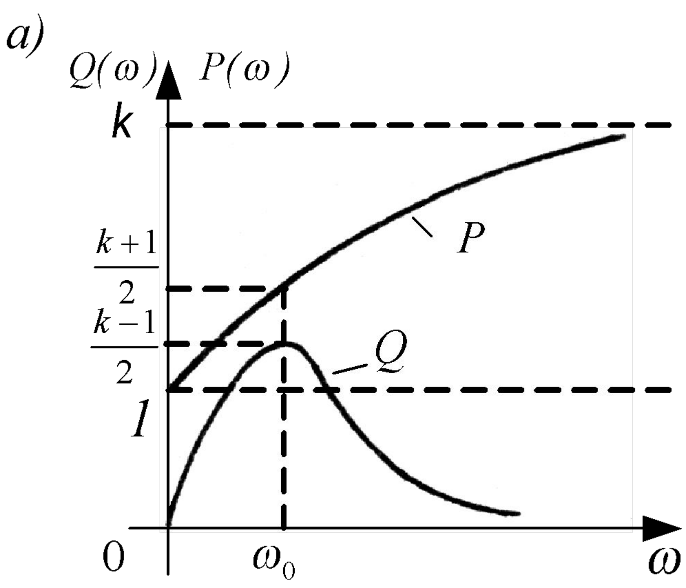
Вещественная частотная характеристика (ВЧХ)

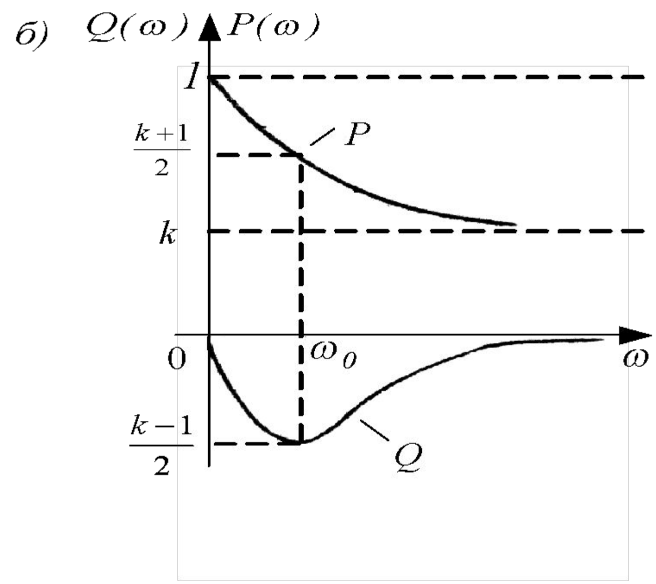
$$P(\omega) = \frac{k \cdot T^2 \cdot \omega^2 + 1}{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$

Мнимая частотная характеристика (МЧХ)

$$Q(\omega) = \frac{T \cdot \omega \cdot (k-1)}{1 + T^2 \cdot \omega^2}.$$

$k > 1$ $k < 1$





Амплитудно-частотная характеристика АЧХ

упругого звена

$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=\sqrt{\frac{k^2\cdot T^2\cdot\omega^2+1}{T^2\cdot\omega^2+1}}.$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$$L(\omega)=\lg A(\omega)=\lg\sqrt{\frac{k^2\cdot T^2\cdot\omega^2+1}{T^2\cdot\omega^2+1}}.$$

Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛАЧХ)

$$\varphi(\omega)=arctg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=\ arctg\,\frac{T\cdot\omega\cdot(k-1)}{k\cdot T^2\cdot\omega^2+1}.$$

Логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика описывается уравнением

$$L(\omega) = \lg A(\omega) = \lg\sqrt{k^2T^2\omega^2+1} - \lg\sqrt{T^2\omega^2+1}.$$

Асимптотические характеристики в зависимости от величины *k* выражаются различно:

если $k>1$

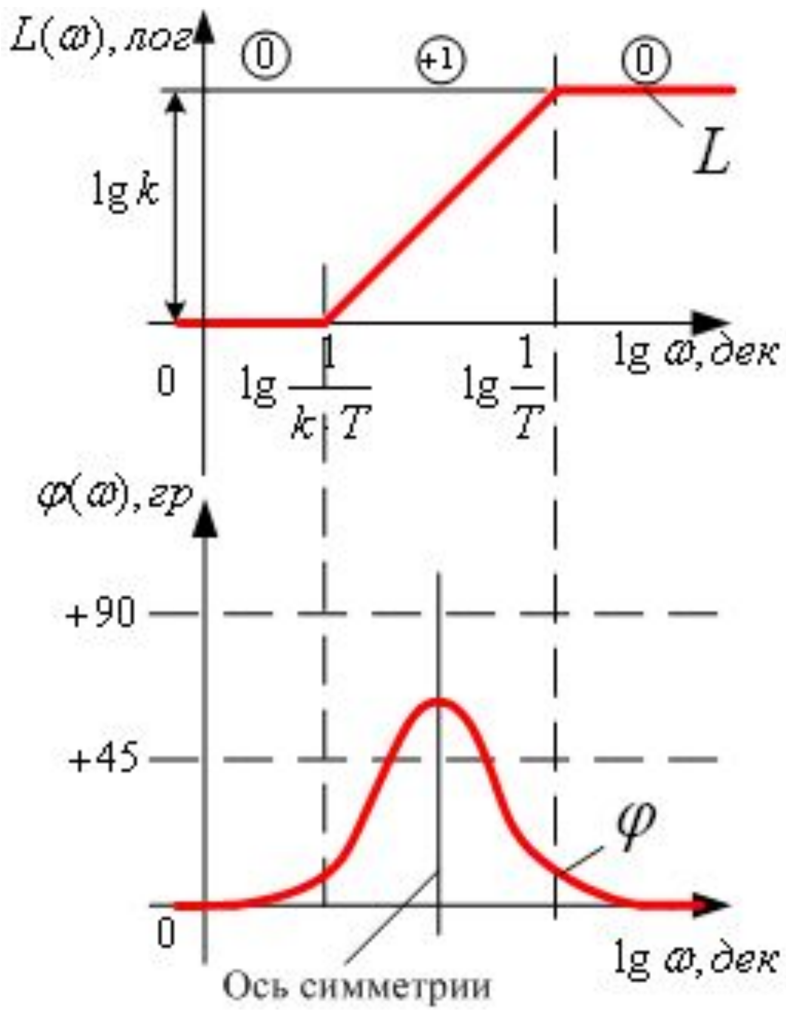
$$L_a = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \lg\omega \le \lg\frac{1}{kT}; \\ \lg T\omega & \text{при} \quad \lg\frac{1}{kT} \le \lg\omega \le \lg\frac{1}{T}; \\ \lg k & \text{при} \quad \lg\frac{1}{T} \le \lg\omega; \end{cases}$$

если $k<1$

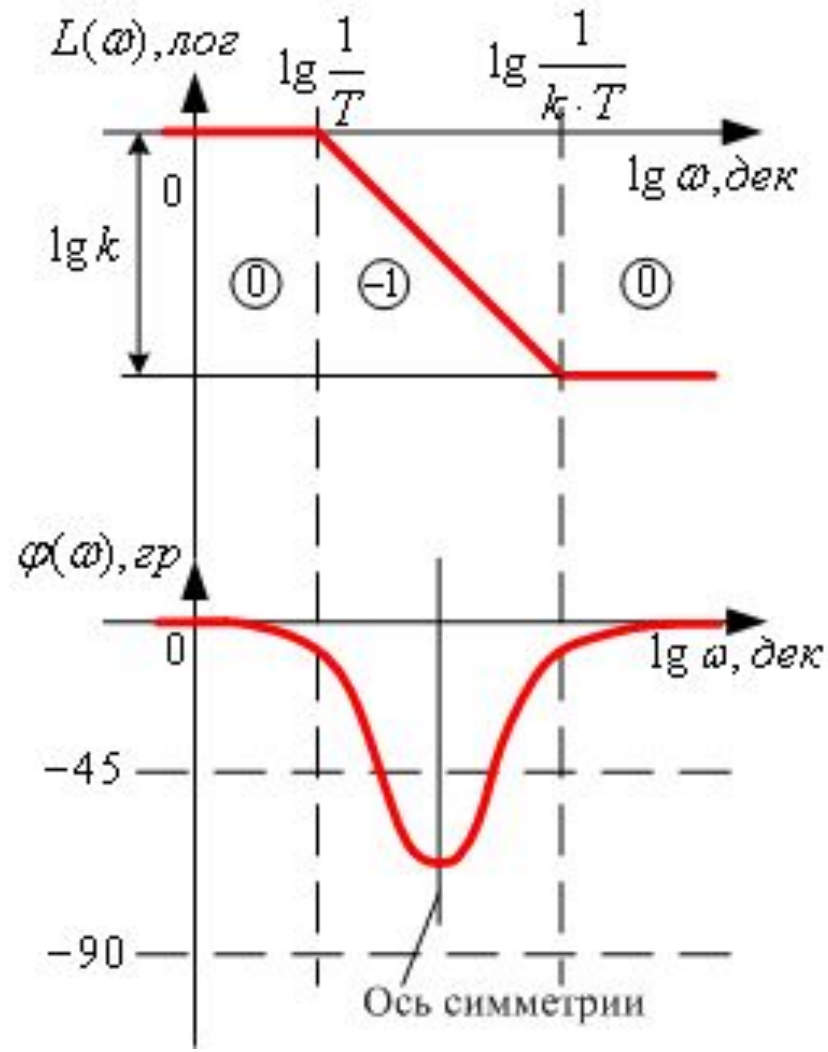
$$L_a = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \lg\omega \le \lg\frac{1}{T}; \\ -\lg T\omega & \text{при} \quad \lg\frac{1}{T} \le \lg\omega \le \lg\frac{1}{kT}; \\ -\lg k & \text{при} \quad \lg\frac{1}{kT} \le \lg\omega. \end{cases}$$

ЛАЧХ и ЛФЧХ

$k > 1$



$k < 1$



Звенья второго порядка

Звеном второго порядка называется звено, связь между выходной и входной величиной которого определяется линейным дифференциальным уравнением второго порядка вида

$$T^2 \cdot \frac{d^2 x_{\text{ÂÛÕ}}(t)}{dt^2} + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot \frac{dx_{\text{ÂÛÕ}}(t)}{dt} + x_{\text{ÂÛÕ}}(t) = k \cdot x_{\text{ÂÕ}}(t)$$

где *T* – постоянная времени ; *ξ* – относительный коэффициент затухания (демпфирования).

Применяя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим операторное уравнение

$$(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1) X_{\text{вых}}(p) = k X_{\text{вх}}(p)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения инерционное звено второго порядка может иметь различные переходные характеристики. Это позволяет установить три разновидности звена – апериодическое, колебательное и консервативное.

При единичном входном воздействии для случая вещественных различных корней p_1 и p_2 получим переходную функцию ($\xi>1$):

$$x_{\text{вых}}(t) = 1 + \frac{k}{2p_1^2T^2 + p_1 2\xi}e^{p_1 t} + \frac{k}{2p_2^2T^2 + p_2 2\xi}e^{p_2 t}.$$

В случае вещественных корней апериодическое звено второго порядка эквивалентно последовательному соединению двух инерционных звеньев первого порядка, поэтому передаточная функция может быть записана в виде

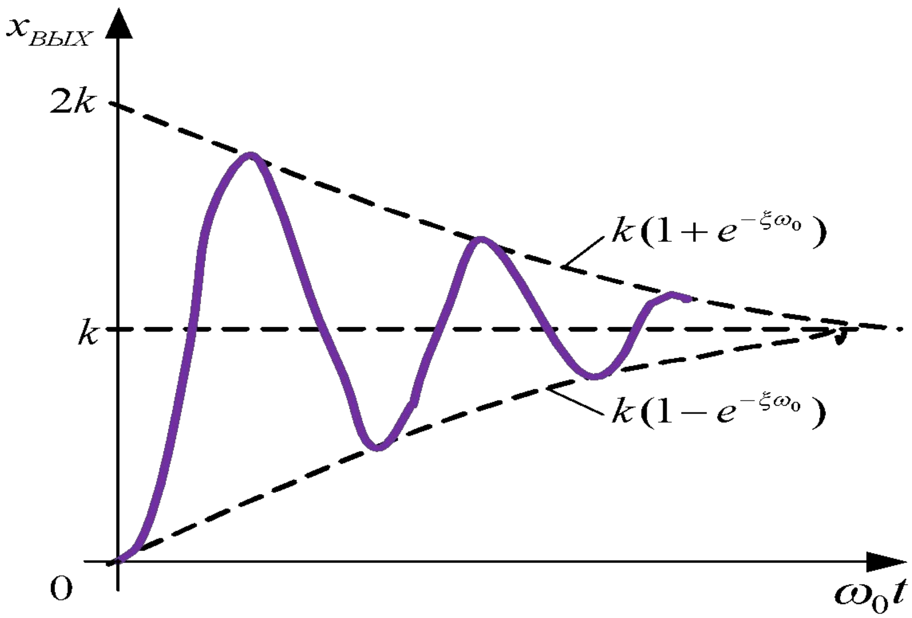
$$W(p) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)}.$$

По выражению *W(p)* после замены *p* на *jω* получим частотную функцию *W(jω)* апериодического звена второго порядка, которая определяет частотные характеристики звена.

Колебательное звено

Если корни уравнения будут комплексными, то инерционное звено второго порядка станет колебательным ($\xi<1$).

$$x_{ВЫХ}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_o t} \cdot \sin(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_0 t + \arcsin \xi \sqrt{1-\xi^2})$$



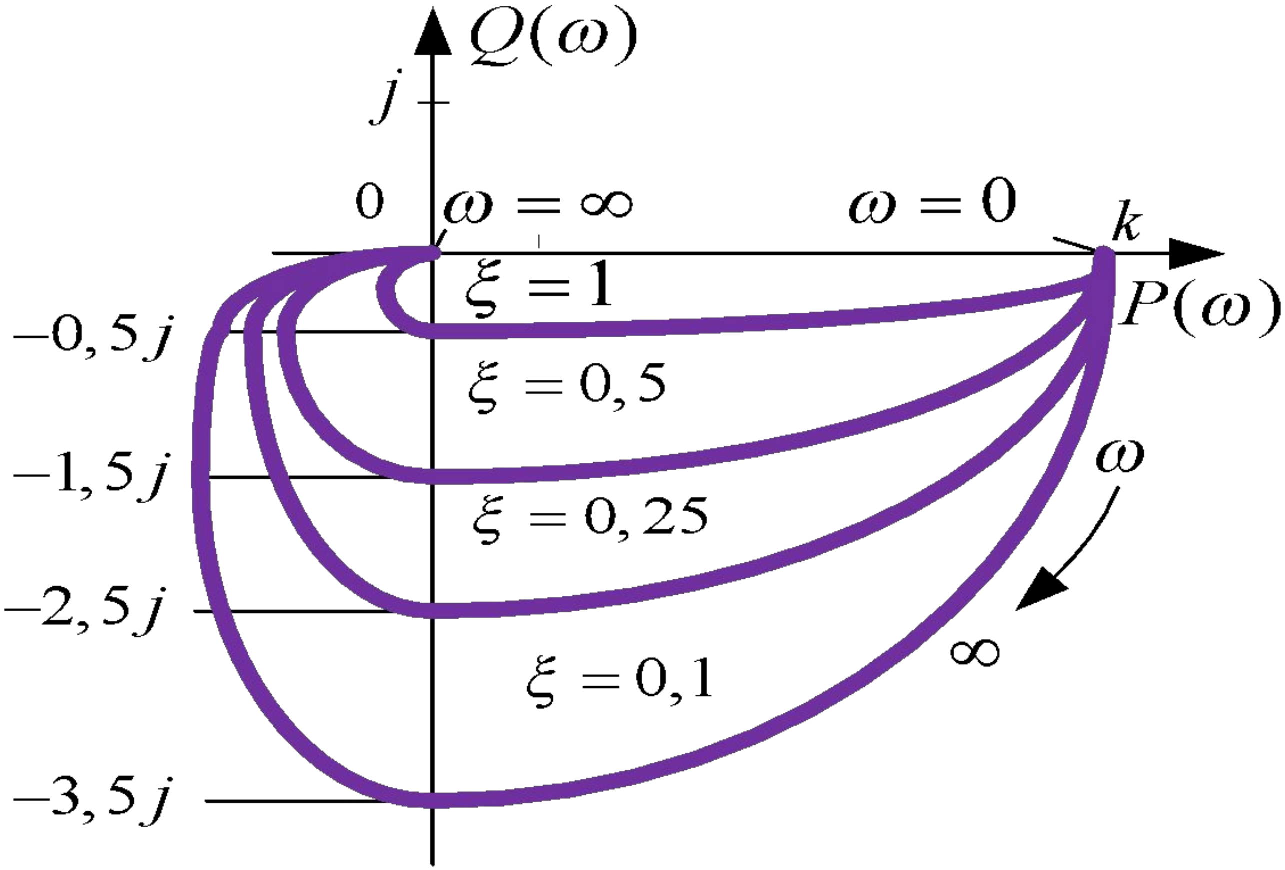
Передаточная функция инерционного звена 2 порядка

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика

$$W(j\omega) = \frac{k}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi T (j\omega) + 1}$$

Годограф амплитудно-фазовой частотной характеристики



Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики колебательного звена выражаются уравнениями

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}};$$

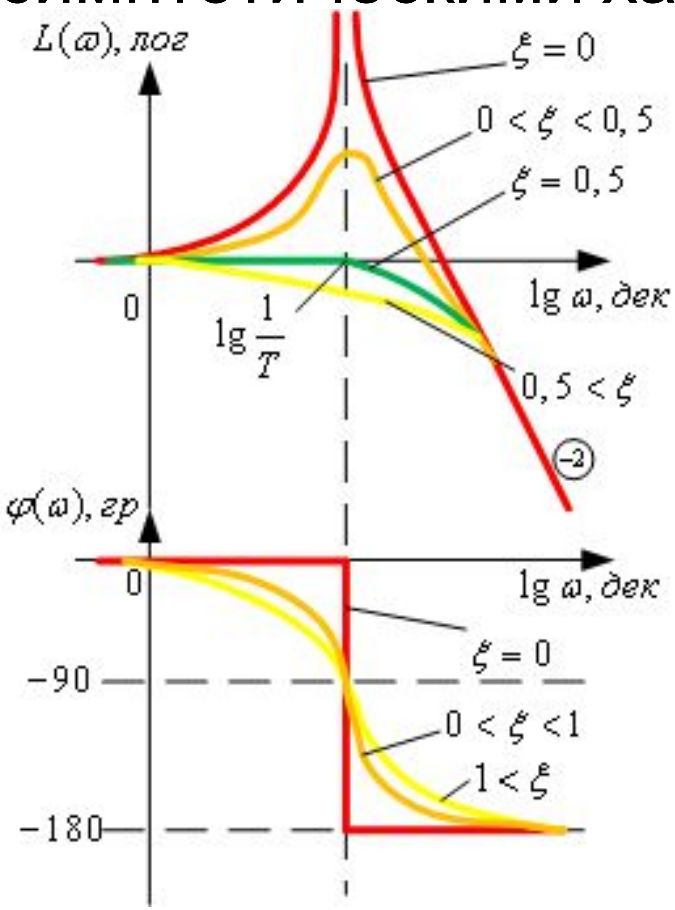
$$\varphi(\omega) = -arctg\frac{2\omega\xi T}{1-T^2\omega^2}.$$

Логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика колебательного звена описывается уравнением

$$L(\omega) = \lg A(\omega) = \lg 1 - \lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}.$$

Вблизи точки резонанса ($\omega T=1$) характеристика сильно зависит от коэффициента затухания ξ. С удалением от резонансной частоты характеристика практически перестаёт зависеть от ξ. Для колебательных звеньев пользуются асимптотическими хар

$$L_a(\omega) = \begin{cases} \lg k & \text{при} \quad \lg\omega \le \lg\frac{1}{T}; \\ \lg k - 2\lg\omega T & \text{при} \quad \lg\omega \ge \lg\frac{1}{T}. \end{cases}$$

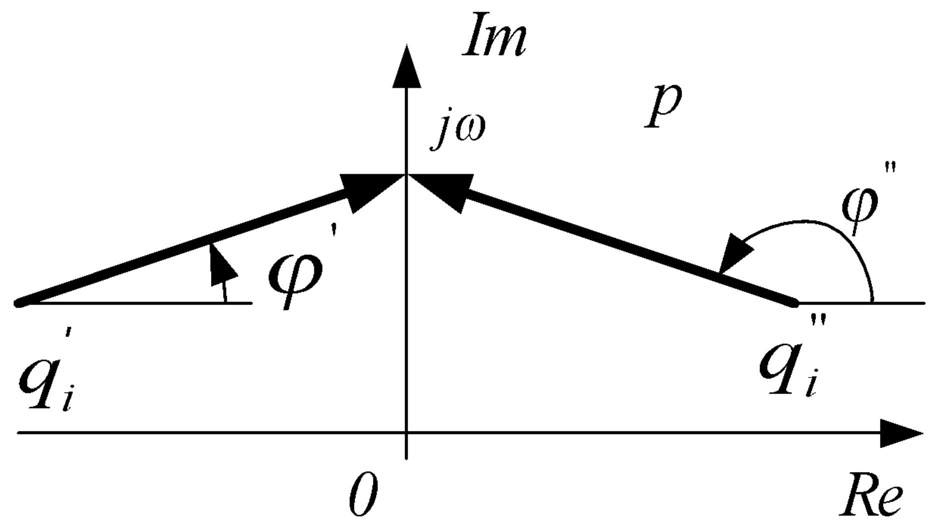


Общее свойство минимально-фазовых устойчивых звеньев

Общим показателем свойств звена является принадлежность нулей передаточной функции к левой полуплоскости. Представляя передаточную функцию в комплексной форме, комплексный коэффициент передачи можно выразить как

$$W(j\omega) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (j\omega - q_i)}{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)}$$

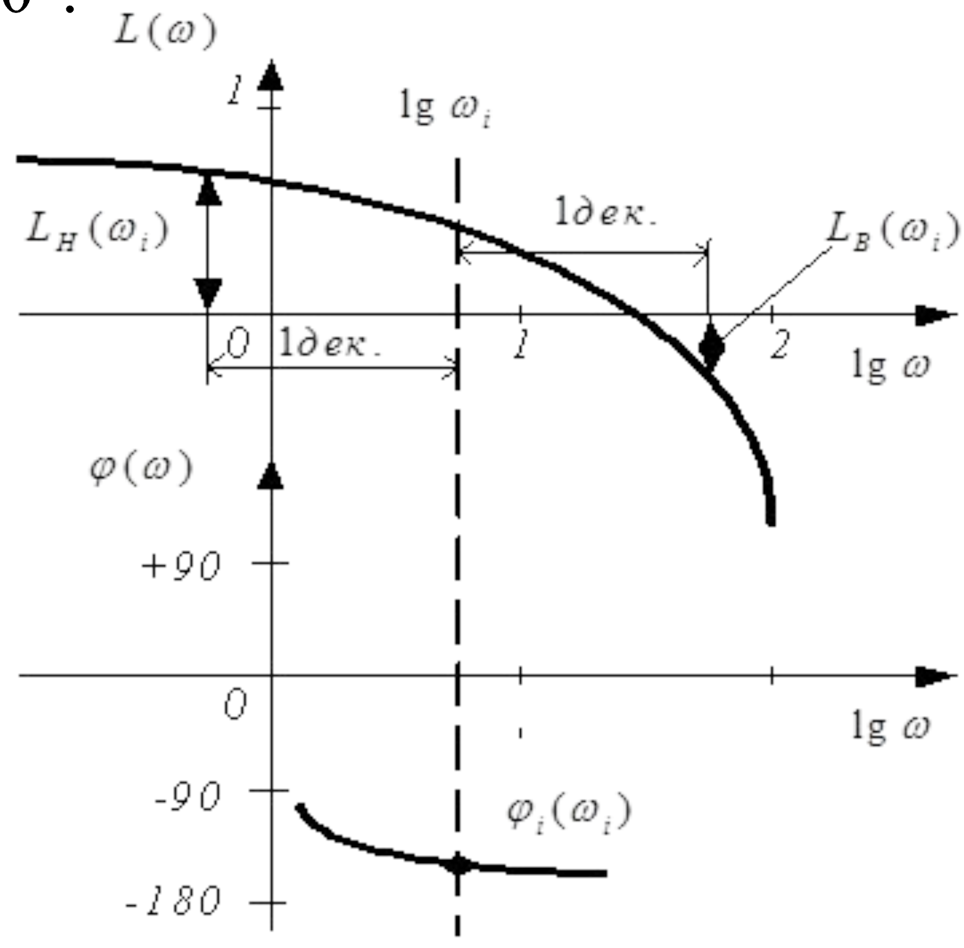
Рассмотрим сомножитель числителя $j\omega$-q_i. Эта разность представляет собой вектор, начало которого лежит в точке q_i, а конец на мнимой оси в точке $j\omega$. Фаза этого вектора характеризует поворот его относительно вещественной оси против часовой стрелки.



На рисунке построены два таких вектора для различных положений точки q_i, обозначенных q_i' и q_i''. Из построения видно, что при одном и том же значении модуля комплекса $j\omega$-q_i его фаза φ меньше в том случае, когда q_i лежит в левой полуплоскости. Поэтому звенья, все нули передаточной функции лежат в левой полуплоскости *(Re q_i<0)*, называются ***минимально-фазовыми***. Звенья, передаточные функции которых имеют хотя бы один нуль, лежащий в правой полуплоскости   *(Re q_i>0)*, называются ***неминимально-фазовыми***.

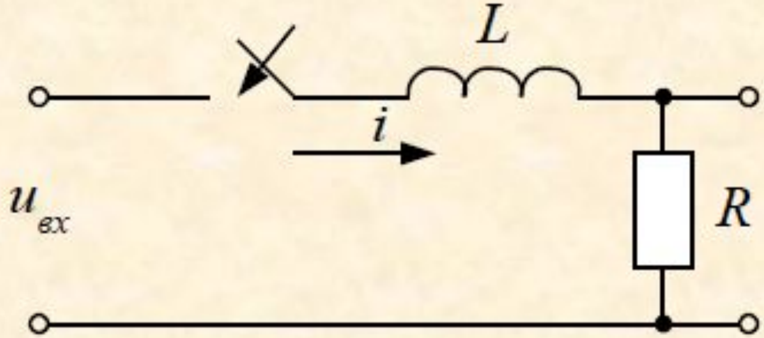
Для минимально-фазовой системы определение приближённого значения фазы $\varphi_i(\omega_i)$ можно проводить непосредственно по среднему наклону ЛАЧХ в частоте ω_i без построения ЛФЧХ. При этом

$$\varphi_i(\omega_i) = \frac{L_B(\omega_i) - L_H(\omega_i)}{2} \cdot 90°.$$



Передаточные функции различных объектов

RL-цепь:



$u_{вх}(t)$ **– входной сигнал** $x_{вх}(t)$ **;**

$i(t)$ **- выходной сигнал** $x_{вых}(t)$ **.**

<u>1 этап</u>: $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u_{вх}(t)$

преобразуем в изображение

$$LpI(p) + RI(p) = U_{вх}(p)$$

<u>2 этап</u>: найдем передаточную функцию:

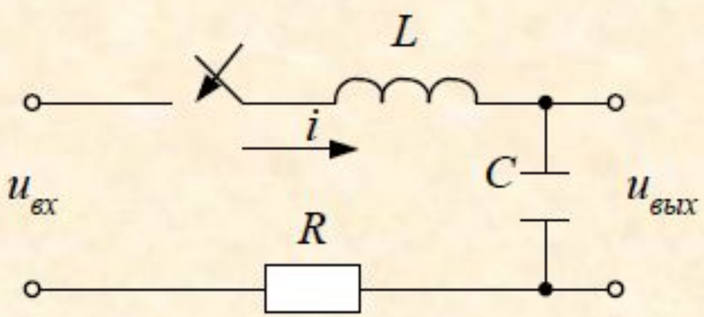
$$W(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_{вх}} = \frac{I(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{1}{Lp + R}$$

Передаточные функции различных объектов

RLC-цепь:

$u_{вх}(t)$ – входной сигнал $x_{вх}(t)$;

$u_{вых}(t)$ - выходной сигнал $x_{вых}(t)$.



<u>1 этап</u>: $L\dfrac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt=u_{вх}(t)$

$$\frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt=u_{вых}(t)$$

преобразуем в изображения

$$U_{вх}(p)=I(p)\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)$$

и

$$U_{вых}(p)=I(p)\frac{1}{Cp}$$

<u>2 этап</u>: найдем передаточную функцию:

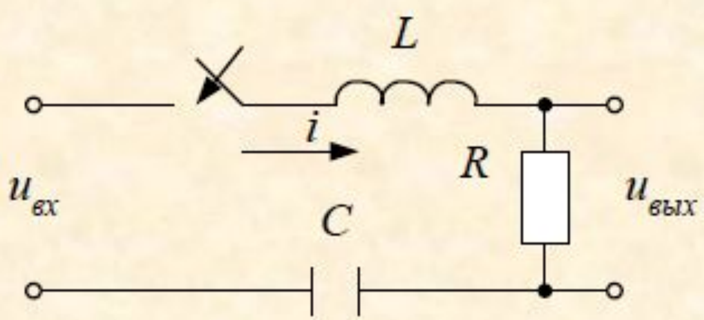
$$W(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=\frac{I(p)\cdot\dfrac{1}{Cp}}{I(p)\left(Lp+R+\dfrac{1}{Cp}\right)}=\frac{1}{LCp^2+RCp+1}$$

Передаточные функции различных объектов

RLC-цепь:

$u_{вх}(t)$ – входной сигнал $x_{вх}(t)$;

$u_{вых}(t)$ - выходной сигнал $x_{вых}(t)$.



1 этап: $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = u_{вх}(t)$

$$U_{вых}(p) = I(p)R$$

преобразуем в изображения

$$U_{вх}(p) = I(p)\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right)$$

и

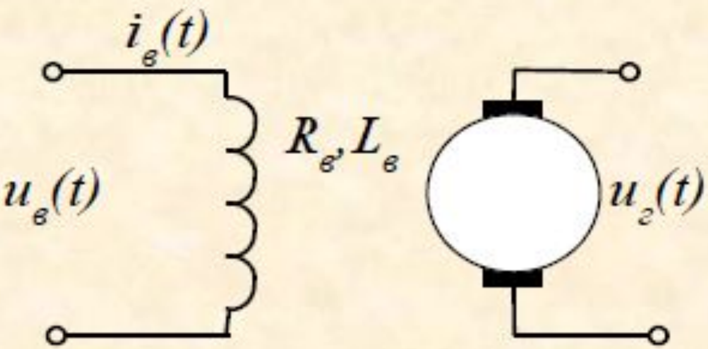
$$U_{вых}(p) = LpI(p)$$

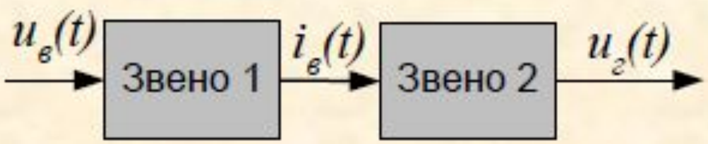
2 этап: найдем передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{I(p)\cdot R}{I(p)\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right)} = \frac{CRp}{LCp^2 + RCp + 1}$$

Передаточные функции различных объектов

Генератор постоянного тока независимого возбуждения:





$i_в(t)$ – входной сигнал $x_{вх}(t)$;

$u_г(t)$ - выходной сигнал $x_{вых}(t)$.

<u>1 этап</u>: систему уравнений

$$\begin{cases} L_в \dfrac{di_в(t)}{dt} + R_в i_в(t) = u_в(t); \\ k i_в(t) = u_г(t) \end{cases}$$

преобразуем в изображение

$$\begin{cases} L_в p I_в(p) + R_в I_в(p) = U_в(p); \\ k I_в(p) = U_г(p) \end{cases}$$

Из него найдем уравнение

$$L_в p \frac{U_г(p)}{k} + R_в \frac{U_г(p)}{k} = U_в(p);$$

<u>2 этап</u>: найдем передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_{вх}} = \frac{U_г(p)}{U_в(p)} = \frac{k}{L_в p + R_в}$$

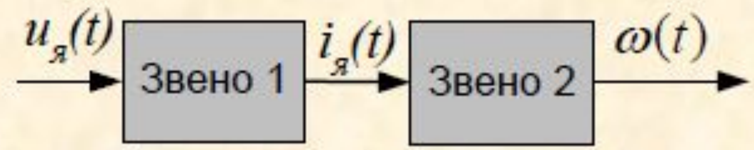
Передаточные функции различных объектов

Двигатель постоянного тока независимого возбуждения:

$u_я(t)$– входной сигнал; $\omega(t)$– выходной сигнал; Φ=const; M_c=0

1 этап: возьмем систему уравнений

$$\begin{cases} L_я \dfrac{di_я(t)}{dt} + R_я i_я(t) + k\Phi\omega(t) = u_я(t); \\ J\dfrac{d\omega(t)}{dt} = C\Phi\dfrac{di_я(t)}{dt} \end{cases}$$



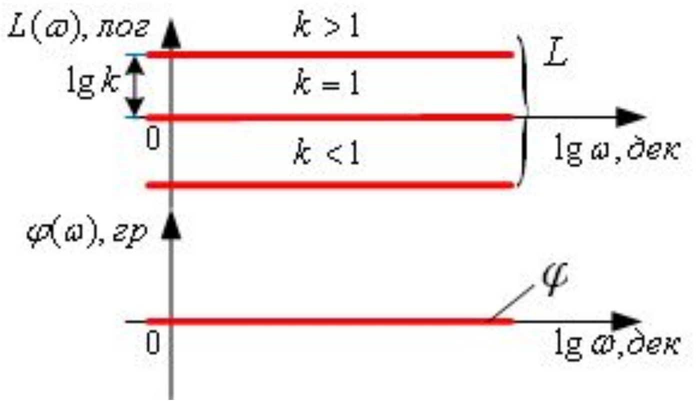
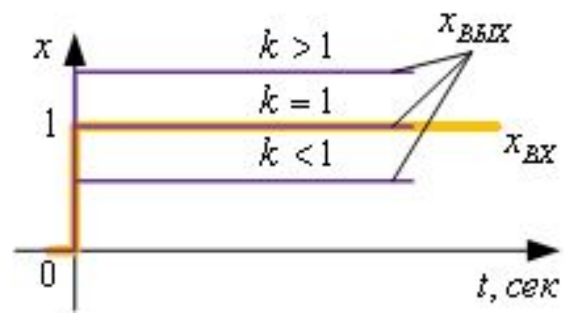
преобразуем в изображение $\begin{cases} L_я pI_я(p) + R_я I_я(p) + k\Phi\Omega(p) = U_я(p); \\ Jp\Omega(p) = C\Phi I_я(p) \end{cases}$

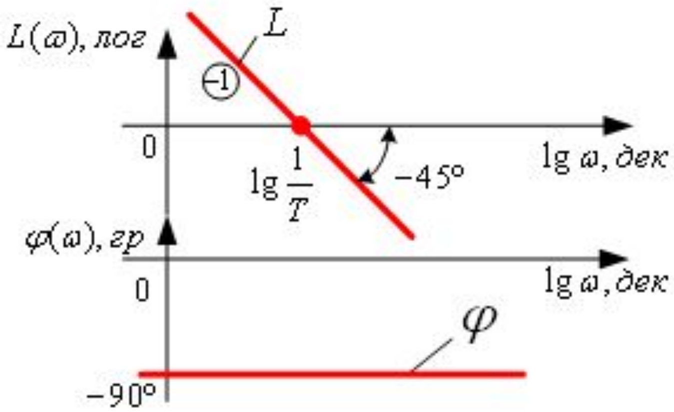
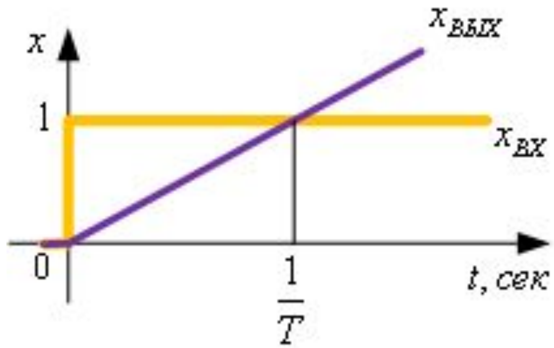
Из него найдем уравнение $\left[\dfrac{L_я J}{C\Phi}p^2 + \dfrac{R_я J}{C\Phi}p + k\Phi\right]\cdot\Omega(p) = U_я(p)$

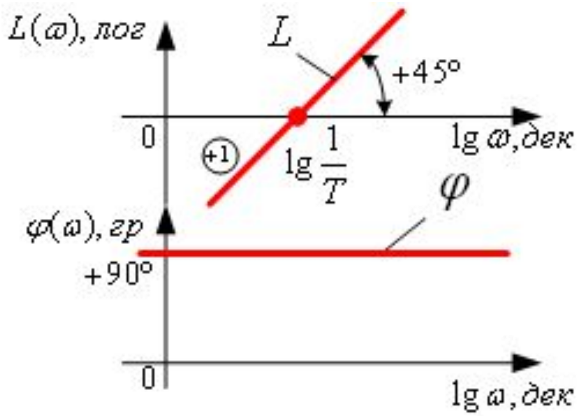
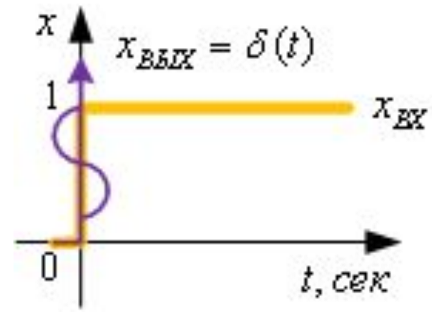
2 этап: найдем передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{X_{вых}(p)}{X_{вх}} = \frac{\Omega(p)}{U_я(p)} = \frac{1}{\dfrac{L_я J}{C\Phi}p^2 + \dfrac{R_я J}{C\Phi}p + k\Phi}$$

1. Элементарные типовые динамические звенья

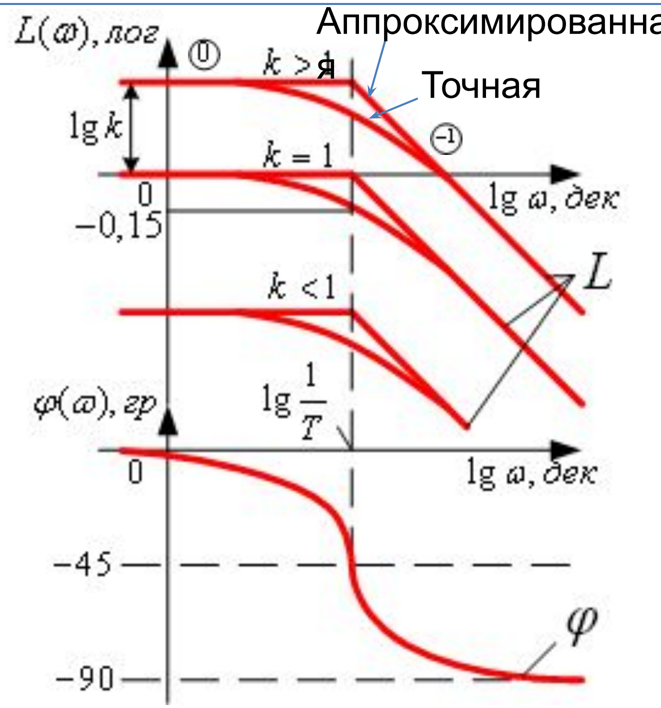
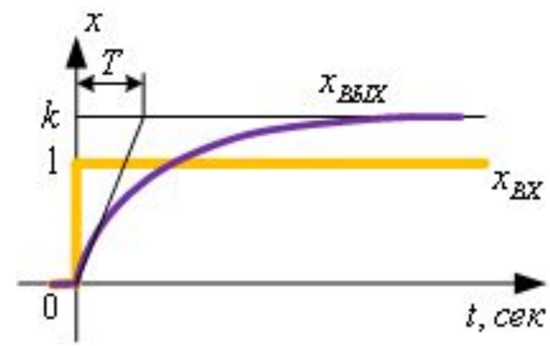
Название	Уравнения, $W(p)$	ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$	Переходная функция
Усилительное, (пропорцио-нальное, безынерцион-ное)	$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = k$		 $x_{\text{вых}}(t) = k \cdot 1(t)$

Название	Уравнения, $W(p)$	ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$	Переходная функция
Интегрирую-щее	$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{T \cdot p}$		 $x_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{T} \cdot t \cdot 1(t)$

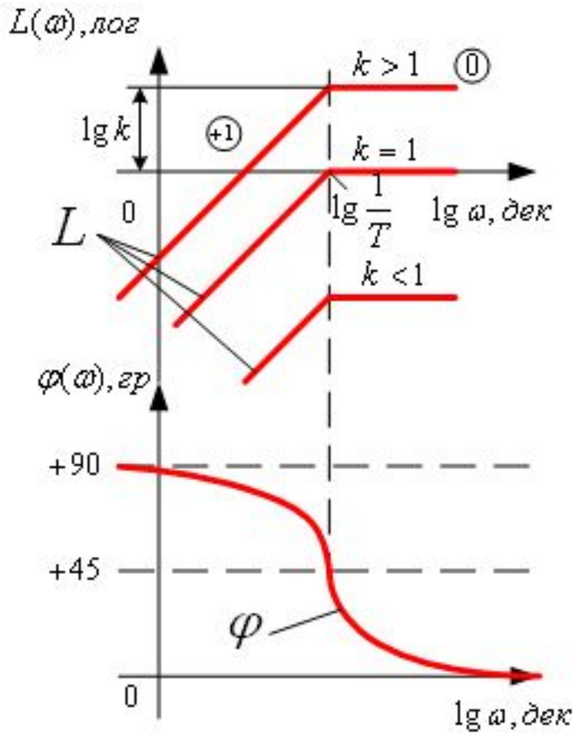
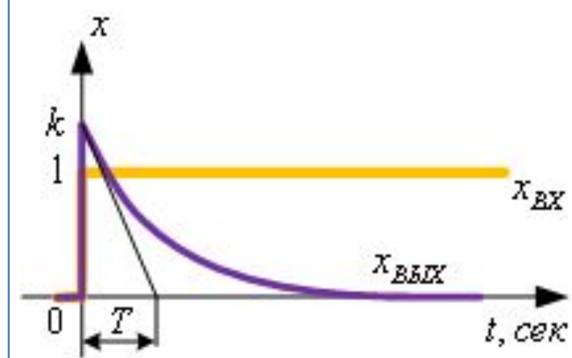
Название	Уравнения, $W(p)$	ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$	Переходная функция
Дифферен-цирующее	$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} =$ $= T \cdot p$		 $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$

2. Реальные типовые динамические звенья

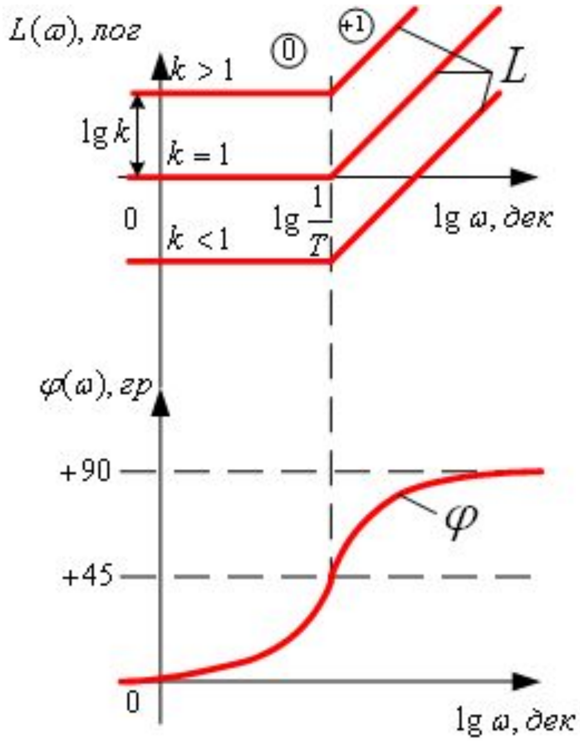
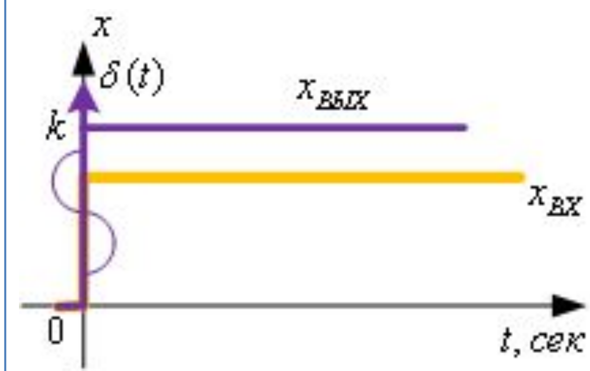
2.1 Звенья первого порядка

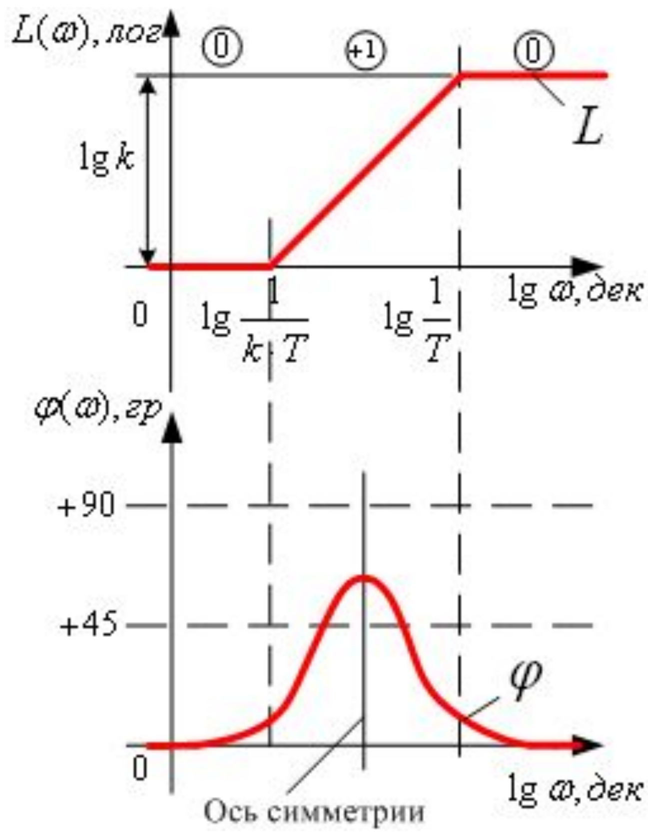
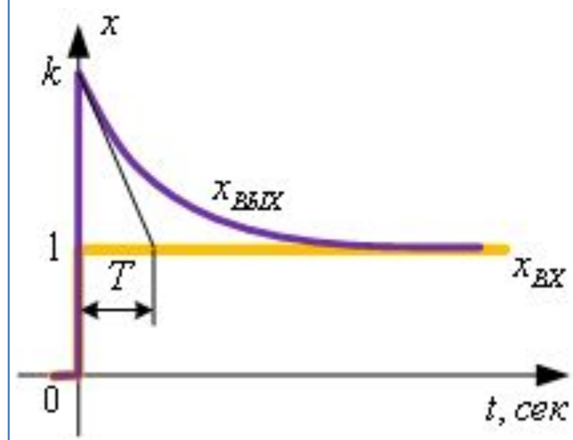
<table>
<tr><th>Название</th><th>Уравнения, $W(p)$</th><th>ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$</th><th>Переходная функция</th></tr>
<tr><td>Инерцион-ное (апериоди-ческое)</td><td>$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} =$
$= \frac{k}{T \cdot p + 1}$</td><td>
</td><td>

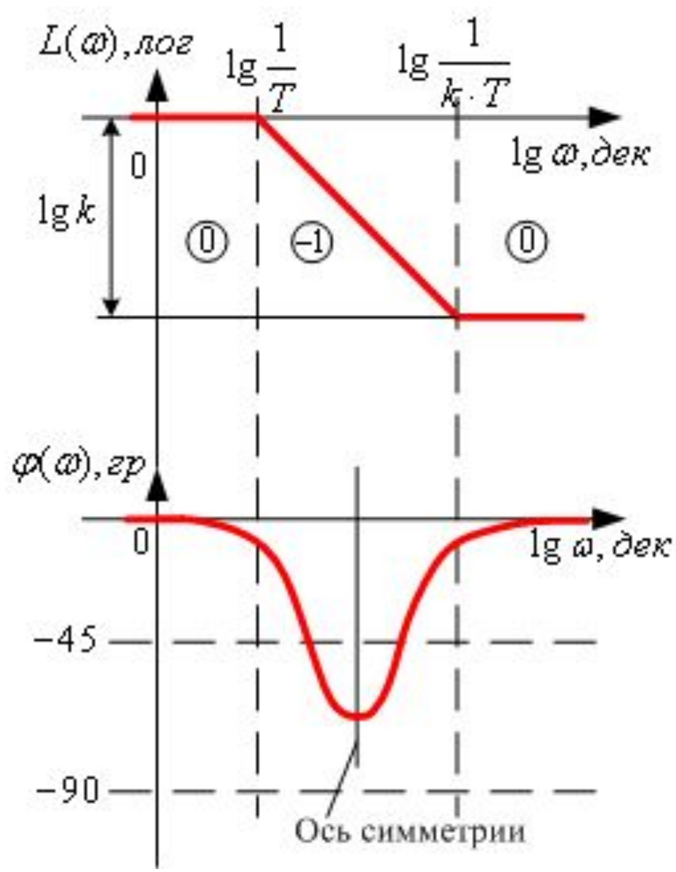
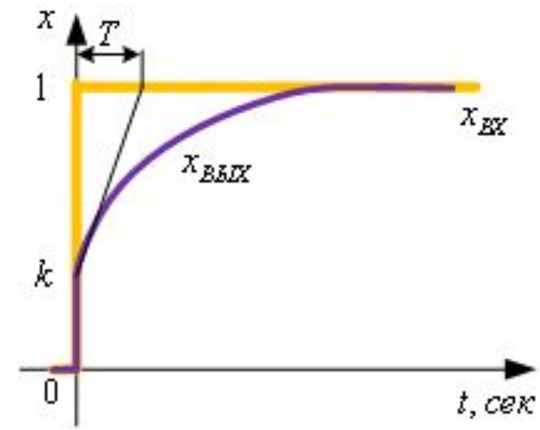
$x_{\text{ВЫХ}}(t) = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1(t);$
$t_{\text{ПП}} = (3 \dots 4) \cdot T.$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Название</th><th>Уравнения, $W(p)$</th><th>ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$</th><th>Переходная функция</th></tr>
<tr>
<td>Инерционно-дифференци-рующее (реальное дифференци-рующее)</td>
<td>$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{k \cdot T \cdot p}{T \cdot p + 1}$</td>
<td>
</td>
<td>

$x_{\text{ВЫХ}}(t) = k \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$
$t_{\text{ПП}} = (3 \ldots 4) \cdot T$</td>
</tr>
</table>

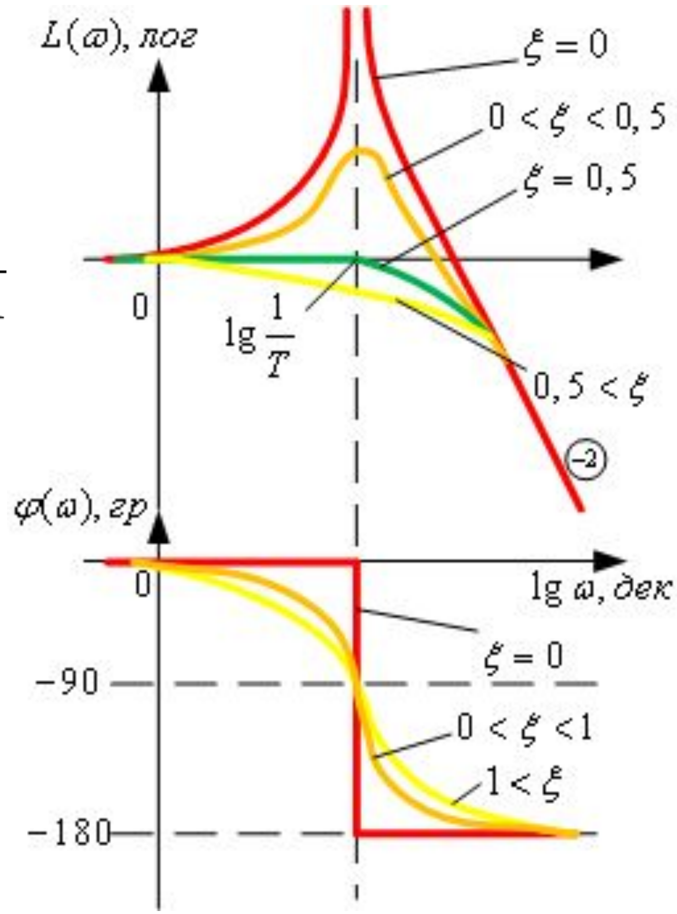
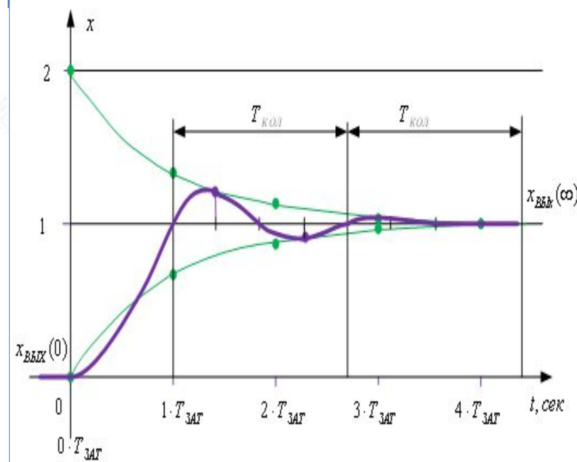
Название	Уравнения, $W(p)$	ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$	Переходная функция
Форсирую-щее	$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = = k \cdot (T \cdot p + 1)$		 $x_{\text{ВЫХ}}(t) = \{k \cdot [\delta(t) + x_{\text{ВХ}}(t)]\} \cdot 1(t)$

Название	Уравнения, $W(p)$	ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$	Переходная функция
Инерционно-форсирующее (упругое)	$W(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{k \cdot T \cdot p + 1}{T \cdot p + 1}$	<u>$k > 1$</u> 	 $x_{\text{ВЫХ}}(t) = [1 + (k-1) \cdot e^{-\frac{t}{T}}] \cdot 1(t)$

Название	Уравнения, $W(p)$	ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$	Переходная функция
Инерционно-форсирую-щее (упругое)	$W(p)=\dfrac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)}=\dfrac{k\cdot T\cdot p+1}{T\cdot p+1}$	<u>$k<1$</u> 	 $x_{\text{ВЫХ}}(t)=[1+(k-1)\cdot e^{-\frac{t}{T}}]\cdot 1(t)$

2. Реальные типовые динамические звенья

2.2 Звенья второго порядка

Название	Уравнения, $W(p)$	ЛАЧХ $[L(\omega)]$, ЛФЧХ $[\varphi(\omega)]$	Переходная функция
Колебательное	$W(p)=\dfrac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)}=$ $=\dfrac{1}{T^2\cdot p^2+2\cdot T\cdot\xi\cdot p+1}$		 $T_{\text{ЗАТ}}=\dfrac{1}{\omega_0\cdot\xi}$; $T_{\text{КОЛ}}=\dfrac{2\cdot\pi}{\omega_0\cdot\sqrt{1-\xi^2}}$; $\omega_0=\dfrac{1}{T}$.