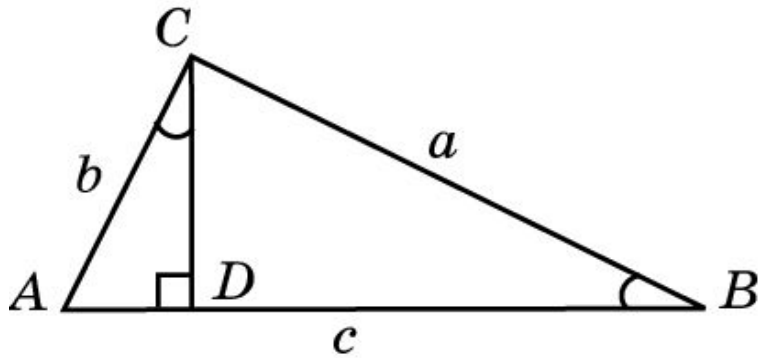


Теорема Пифагора

Теорема. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доказательство. Пусть ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом. Проведем высоту CD . Треугольники ABC и ACD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, $AB \cdot AD = AC^2$.

Аналогично треугольники ABC и CBD подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно, $AB \cdot BD = BC^2$. Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим: $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$.

Соизмеримые и несоизмеримые отрезки

Два отрезка называются **соизмеримыми**, если их отношение является рациональным числом. Иначе говоря, если один из них принять за единичный отрезок, то длина другого будет выражаться рациональным числом.

Два отрезка называются **несоизмеримыми**, если их отношение является иррациональным числом. Иначе говоря, если один из них принять за единичный отрезок, то длина другого будет выражаться иррациональным числом.

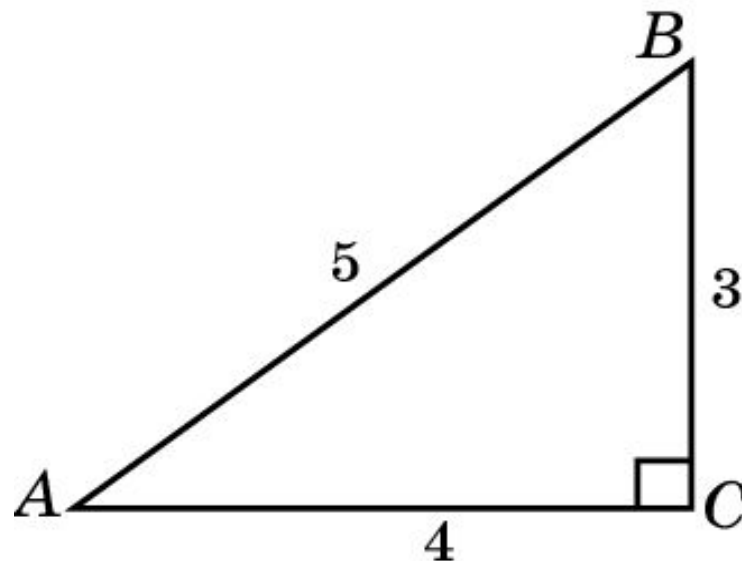
Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с его катетами.

Пифагоровы тройки

Пифагоровой тройкой называется тройка (x, y, z) натуральных чисел x, y, z , для которых выполняется равенство $x^2 + y^2 = z^2$.

Числа пифагоровой тройки представляют собой длины сторон прямоугольного треугольника.

Примером пифагоровой тройки является тройка $(3, 4, 5)$.



Вопрос 1

Сформулируйте теорему Пифагора.

Ответ: В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Вопрос 2

Какие два отрезка называются соизмеримыми?

Ответ: Два отрезка называются соизмеримыми, если их отношение является рациональным числом.

Вопрос 3

Какие два отрезка называются несоизмеримыми?

Ответ: Два отрезка называются несоизмеримыми, если их отношение является иррациональным числом.

Вопрос 4

Приведите пример несоизмеримых отрезков.

Ответ: Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника и его катет.

Вопрос 5

Что называется пифагоровой тройкой?

Ответ: Пифагоровой тройкой называется тройка (x, y, z) натуральных чисел x, y, z , для которых выполняется равенство: $x^2 + y^2 = z^2$.

Вопрос 6

Каков геометрический смысл чисел пифагоровой тройки?

Ответ: Числа пифагоровой тройки представляют собой длины сторон прямоугольного треугольника.

Вопрос 7

Приведите примеры пифагоровых троек.

Ответ: (3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), ...

Упражнение 1

У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b . Найдите гипотенузу c , если: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 1$, $b = 1$; в) $a = 5$, $b = 6$.

Ответ: а) 5;

б) $\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{61}$.

Упражнение 2

У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза c и катет a . Найдите второй катет, если: а) $c = 5$, $a = 3$; б) $c = 13$, $a = 5$; в) $c = 6$, $a = 5$.

Ответ: а) 4;
б) 12;
в) $\sqrt{11}$.

Упражнение 3

Стороны прямоугольника равны 5 и 12. Найдите его диагональ.

Ответ: 13.

Упражнение 4

Диагональ прямоугольника равна 10. Одна из его сторон равна 6. Найдите другую, не равную ей сторону.

Ответ: 8.

Упражнение 5

Стороны квадрата равны 5. Найдите квадрат его диагонали.

Ответ: 50.

Упражнение 6

Диагональ квадрата 2. Чему равна его сторона?

Ответ: $\sqrt{2}$.

Упражнение 7

Точка, лежащая внутри прямого угла, удалена от его сторон на расстояния, равные a и b . Найдите расстояние от точки до вершины угла.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Упражнение 8

Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?

Ответ: Нет.

Упражнение 9

Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором: а) гипотенуза равна 10 см, разность катетов – 2 см; б) гипотенуза равна 26 см, а отношение катетов 5 : 12.

Ответ: а) 6 см, 8 см, 10 см;
б) 10 см, 24 см, 26 см.

Упражнение 10

Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите стороны этого треугольника.

Ответ: 5, 12 и 13.

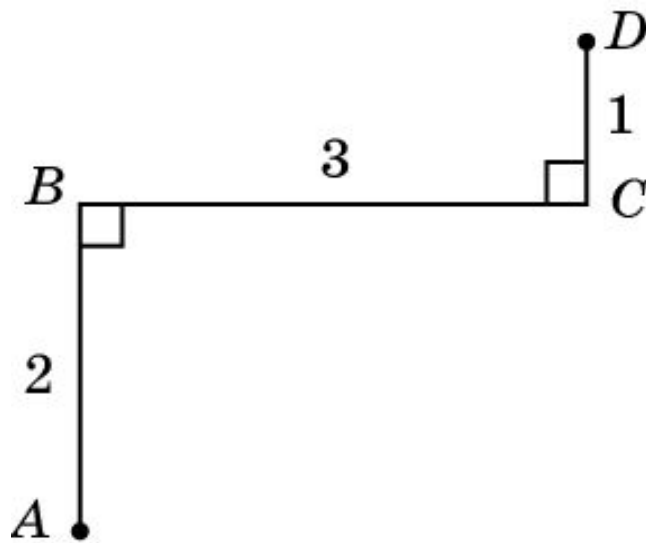
Упражнение 11

В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.

Ответ: 2,4; 1,8 и 3,2.

Упражнение 12

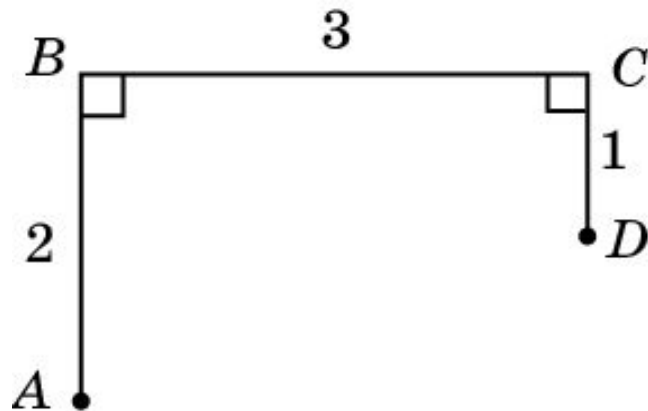
На рисунке отрезки AB и CD перпендикулярны BC . Найдите квадрат расстояния между точками A и D .



Ответ: 14.

Упражнение 13

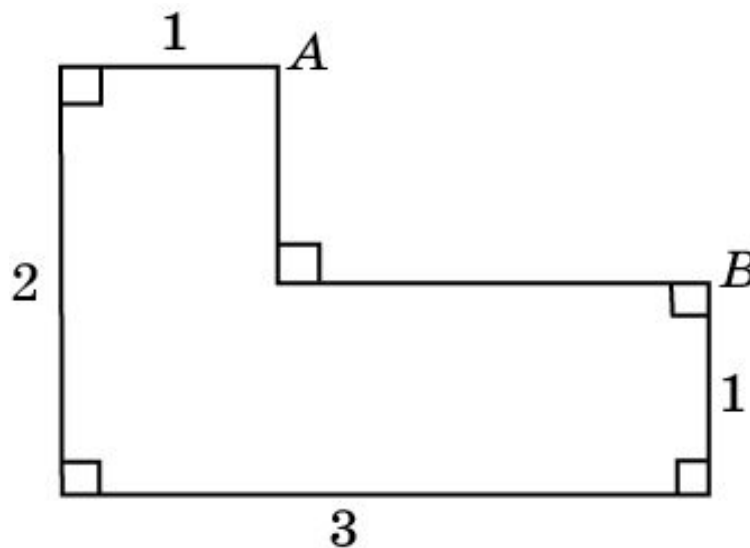
На рисунке отрезки AB и CD перпендикулярны BC . Найдите квадрат расстояния между точками A и D .



Ответ: 10.

Упражнение 14

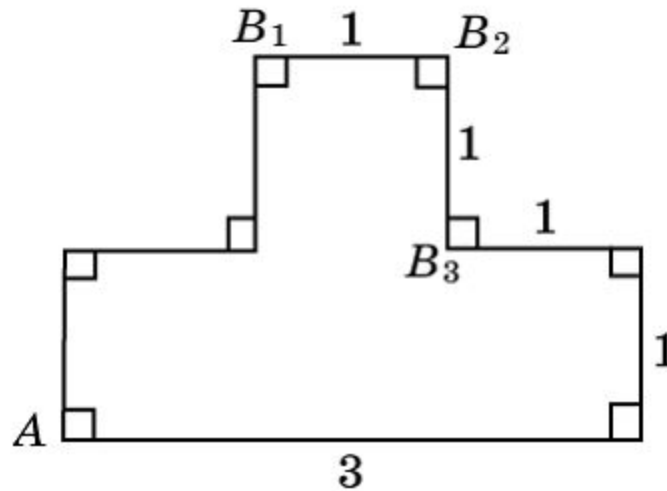
Найдите квадрат расстояния между точками A и B , изображенными на рисунке.



Ответ: 5.

Упражнение 15

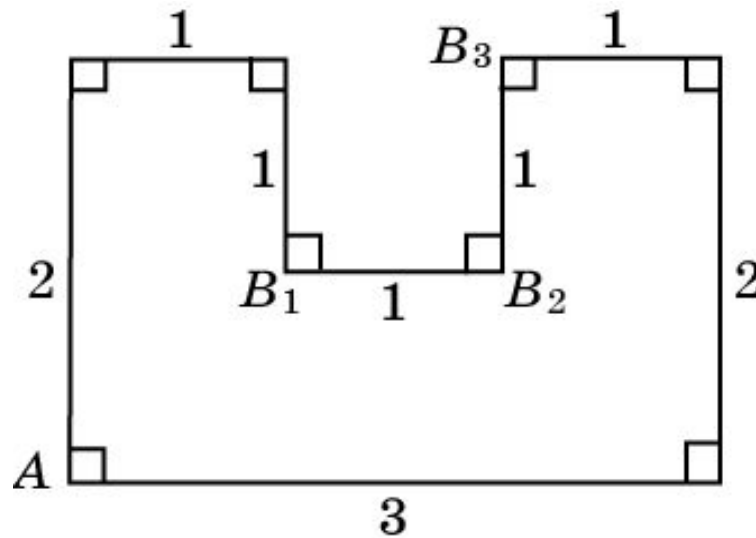
Найдите квадрат расстояния между точками A и:
а) B_1 ; б) B_2 ; в) B_3 , изображенными на рисунке.



Ответ: а) 5; б) 8; в) 5.

Упражнение 16

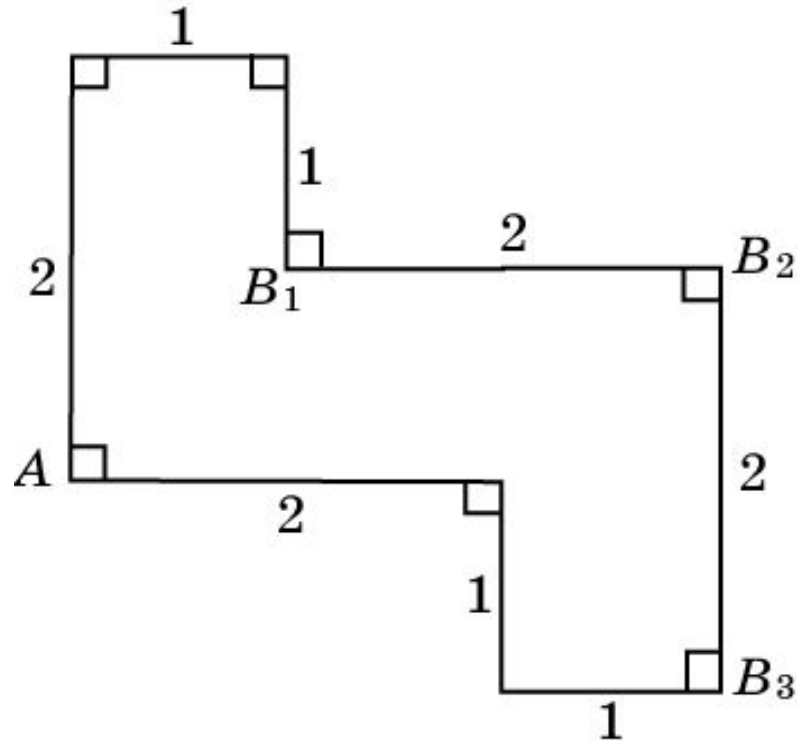
Найдите квадрат расстояния между точками A и:
а) B_1 ; б) B_2 ; в) B_3 , изображенными на рисунке.



Ответ: а) 2 ; б) 5 ; в) 8 .

Упражнение 17

Найдите квадрат расстояния между точками A и:
а) B_1 ; б) B_2 ; в) B_3 , изображенными на рисунке.



Ответ: а) 2; б) 10; в) 10.

Упражнение 18

Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 6 м и 8 м.

Ответ: 5 м.

Упражнение 19

Сторона ромба равна 13. Одна из его диагоналей равна 10. Найдите другую диагональ.

Ответ: 24.

Упражнение 20

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10, основание равно 12. Найдите высоту этого треугольника, опущенную на основание.

Ответ: 8.

Упражнение 21

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, высота, опущенная на основание, равна 4. Найдите основание этого треугольника.

Ответ: 6.

Упражнение 22

Основание равнобедренного треугольника равно 8, высота, опущенная на основание, равна 3. Найдите боковую сторону этого треугольника.

Ответ: 5.

Упражнение 23

Найдите высоту равнобедренной трапеции, у которой основания равны 4 и 10, а боковая сторона равна 5.

Ответ: 4.

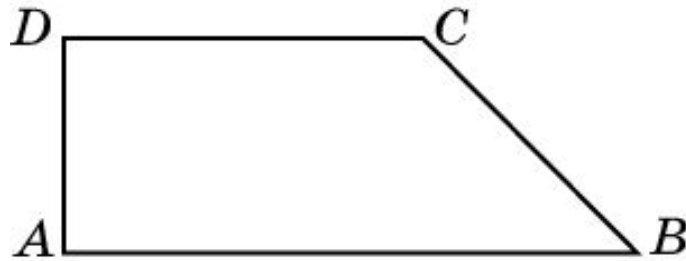
Упражнение 24

Высота равнобедренной трапеции равна 15 см, основания равны 8 см и 24 см. Найдите боковые стороны.

Ответ: 17 см.

Упражнение 25

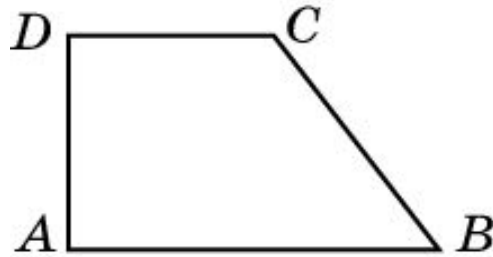
Основания прямоугольной трапеции равны 5 и 8, большая боковая сторона равна 5. Найдите меньшую боковую сторону.



Ответ: 4.

Упражнение 26

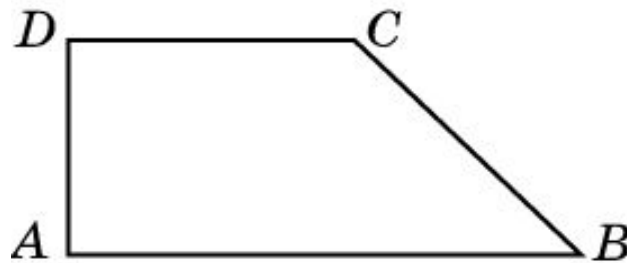
Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 5 и 4, меньшее основание равно 4. Найдите большее основание.



Ответ: 7.

Упражнение 27

Основания прямоугольной трапеции равны 4 и 8, меньшая боковая сторона равна 3. Найдите большую боковую сторону.



Ответ: 5.

Упражнение 28

В правильном треугольнике со стороной 1 найдите: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

Ответ: а), б), в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Упражнение 29

Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 5 и 12.

Ответ: 6,5.

Упражнение 30

Диаметр окружности, описанной около прямоугольника, равен 10. Одна сторона этого прямоугольника равна 6. Найдите другую его сторону.

Ответ: 8.

Упражнение 31

В равностороннем треугольнике со стороной a найдите радиусы r и R вписанной и описанной окружностей.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Упражнение 32

Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Ответ: 1 см.

Упражнение 33

Найдите гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, в который вписана окружность радиуса 1.

Ответ: $2 + 2\sqrt{2}$ см.

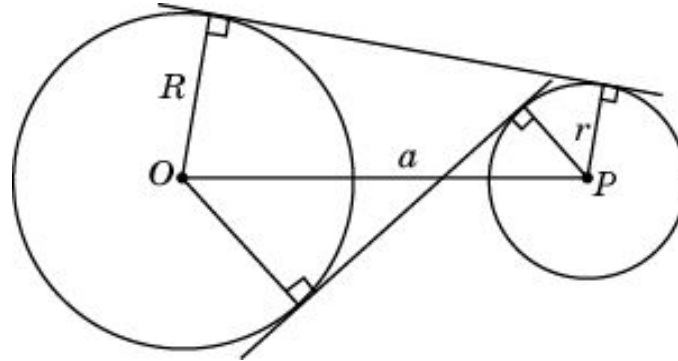
Упражнение 34

Найдите медиану, опущенную на основание равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b .

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

Упражнение 35

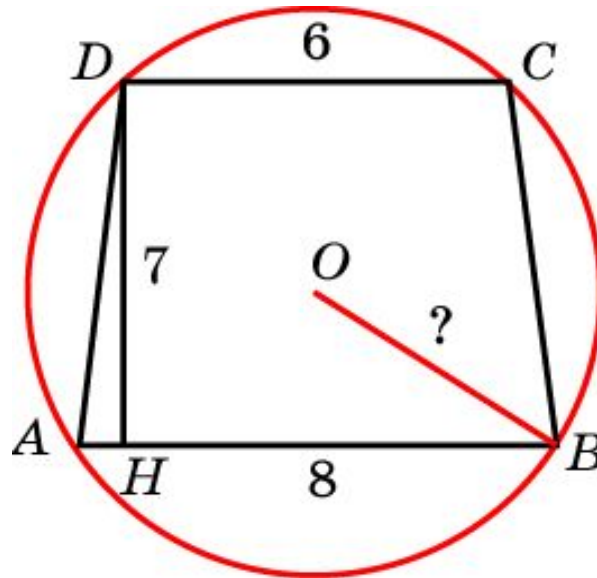
Даны две окружности, радиусов R и r . Расстояние между их центрами равно $a > R + r$. Найдите длины отрезков их общих касательных.



Ответ: $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$, $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$.

Упражнение 36

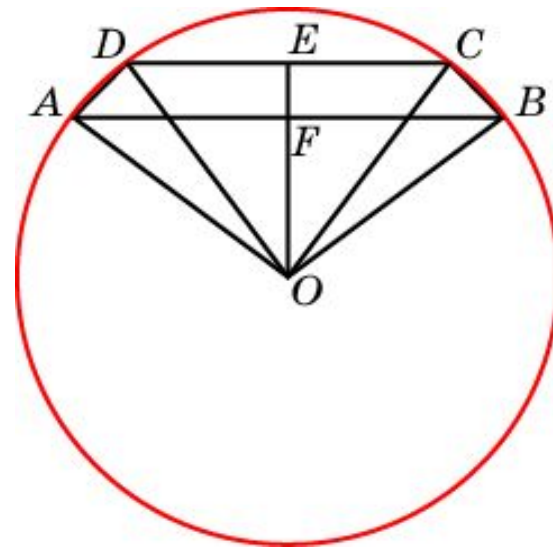
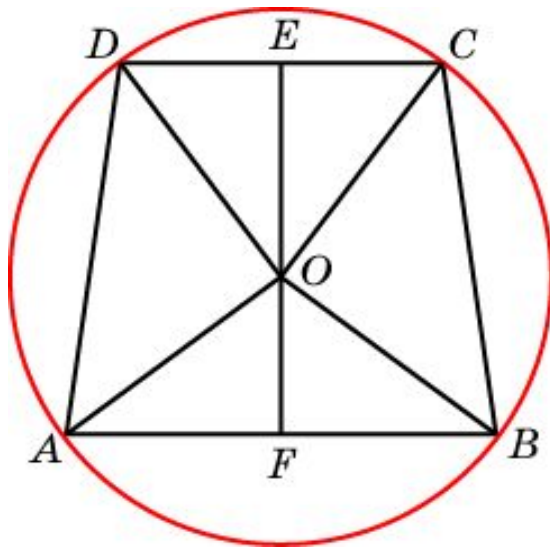
Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6, высота равна 7. Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5.

Упражнение 37

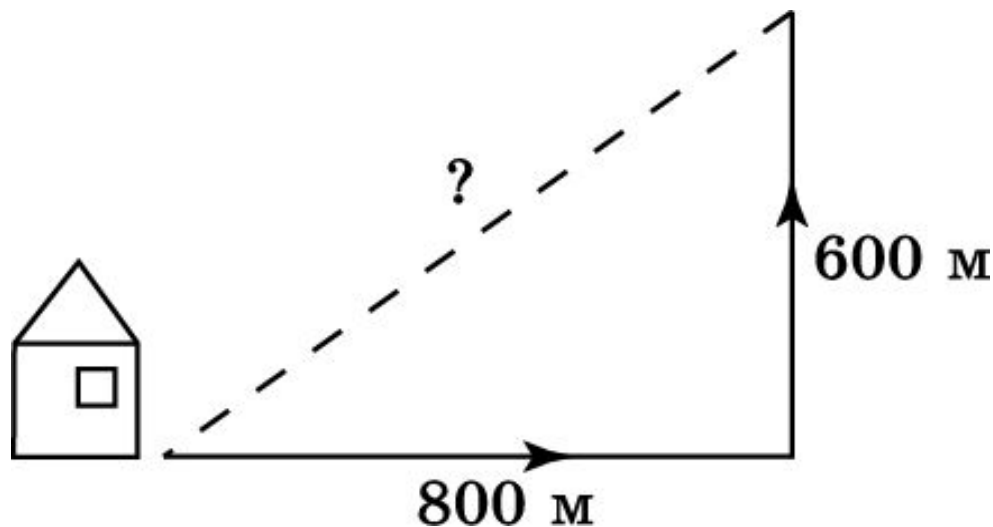
Основания равнобедренной трапеции равны 16 и 12, радиус описанной окружности равен 10. Найдите высоту трапеции.



Ответ: Возможны два случая. В первом высота трапеции равна 14, во втором - 2.

Упражнение 38

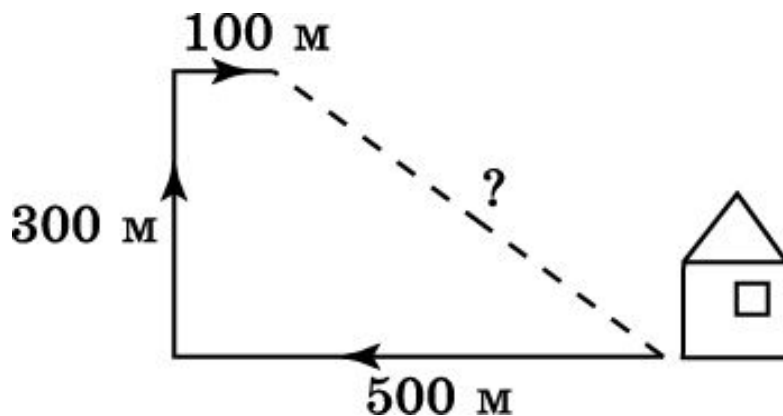
Мальчик прошел от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. На каком расстоянии от дома оказался мальчик?



Ответ: 1000 м.

Упражнение 39

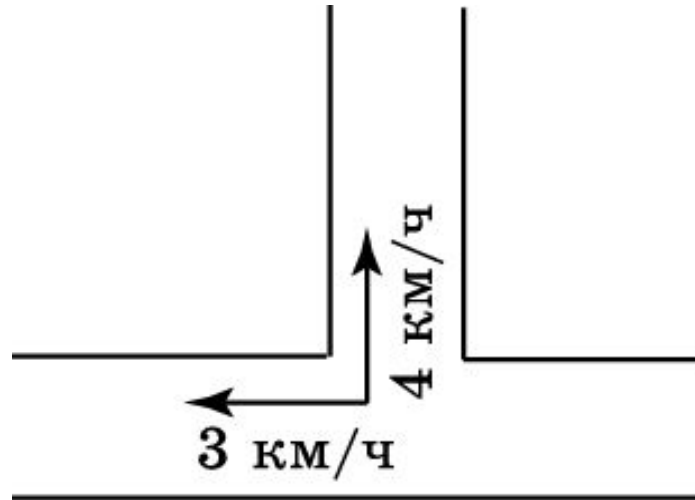
Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м. На каком расстоянии от дома оказалась девочка?



Ответ: 500 м.

Упражнение 40

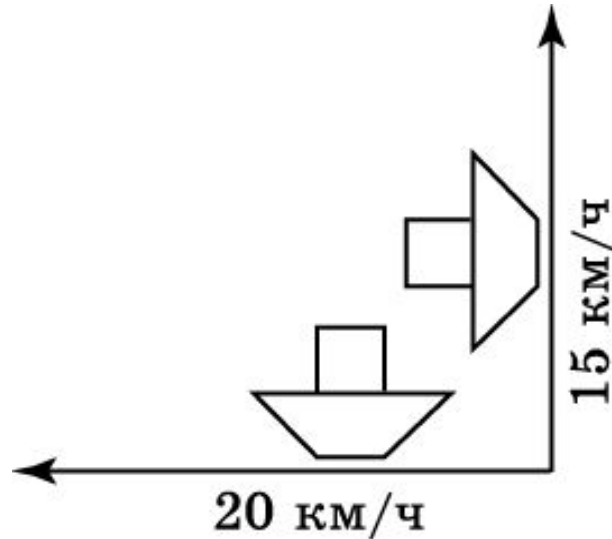
Мальчик и девочка, расставшись на перекрестке, пошли по взаимно перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка – 3 км/ч. Какое расстояние (в км) будет между ними через 30 мин?



Ответ: 2,5 км.

Упражнение 41

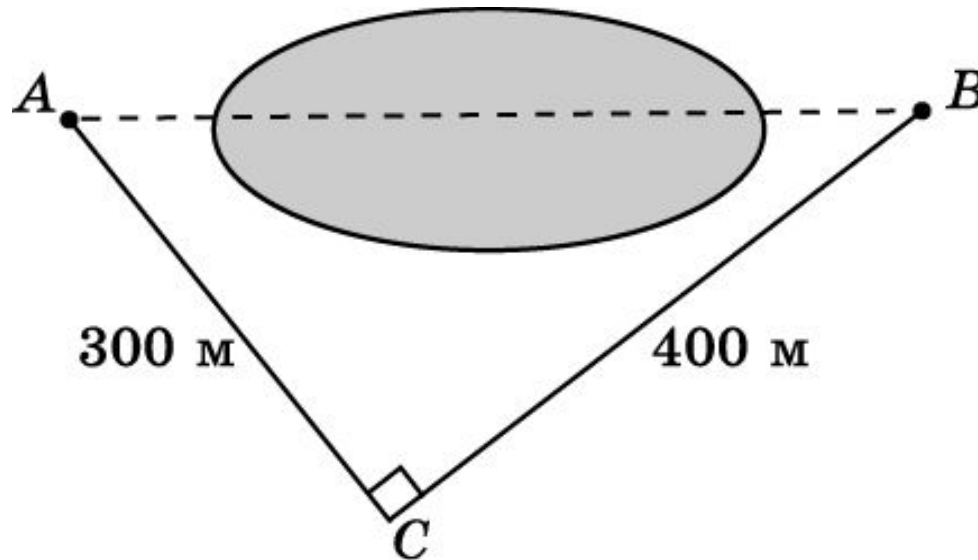
Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?



Ответ: 50 км.

Упражнение 42

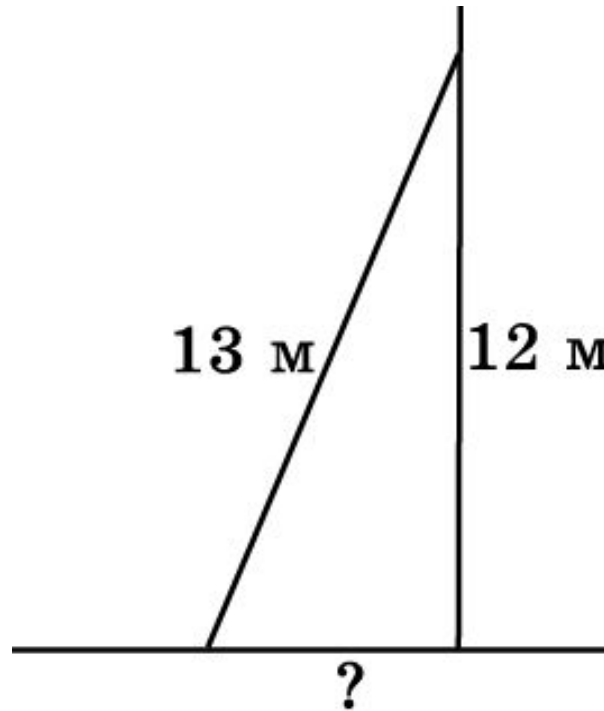
Используя данные, приведенные на рисунке, найдите расстояние в метрах между пунктами A и B , расположенными на разных берегах озера.



Ответ: 500 м .

Упражнение 43

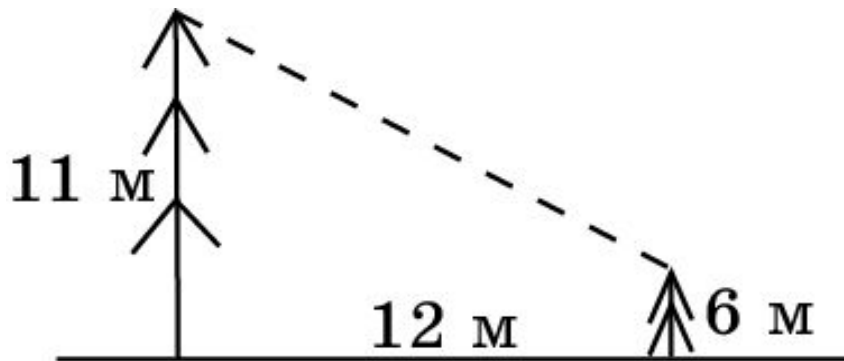
На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 13 м, чтобы верхний ее конец оказался на высоте 12 м?



Ответ: 5 м.

Упражнение 44

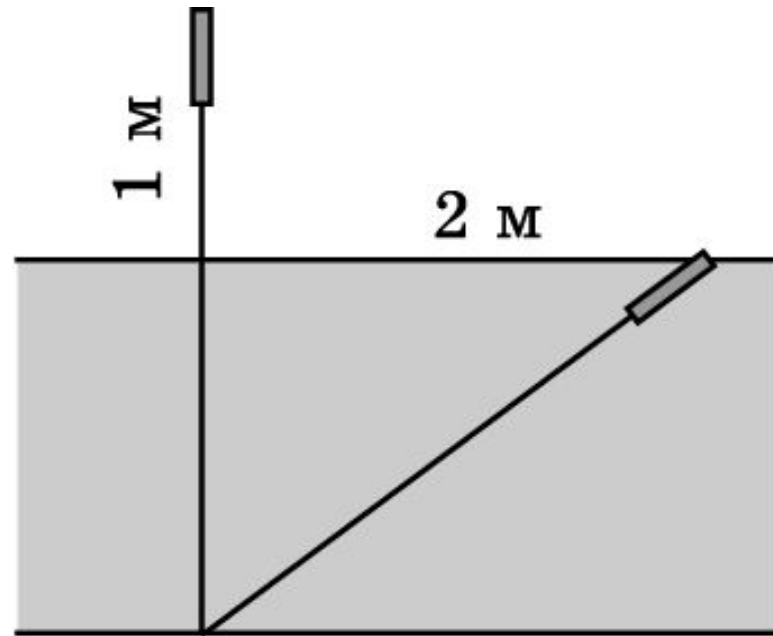
В 12 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 11 м, а другой – 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.



Ответ: 13 м.

Упражнение 45

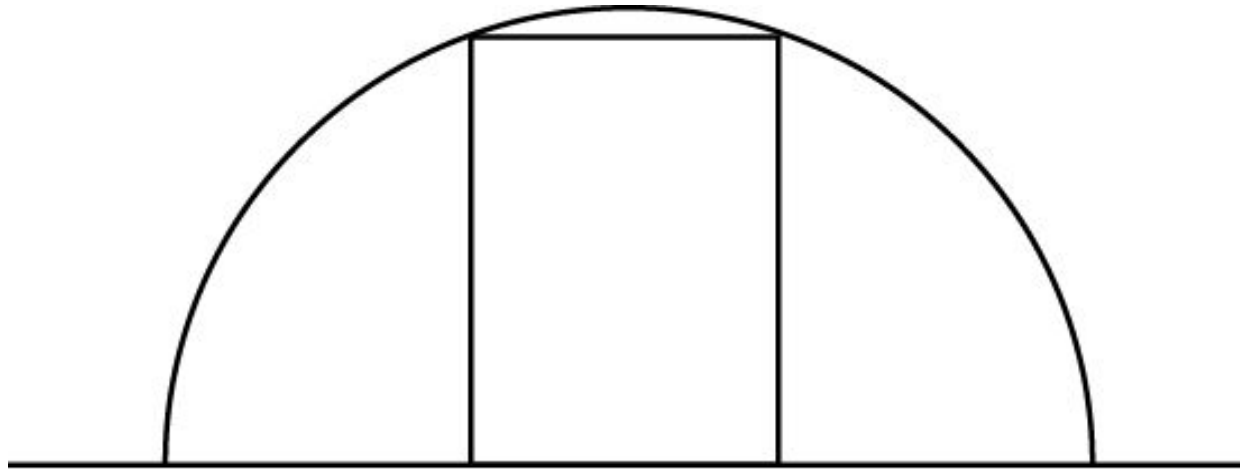
Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды. Найдите глубину озера в месте, где растет камыш.



Ответ: 1,5 м.

Упражнение 46

Туннель имеет форму полукруга радиуса 3 м. Какой наибольшей высоты должна быть машина шириной 2 м, чтобы она могла проехать по этому туннелю?



Ответ: $2\sqrt{2}$ м.