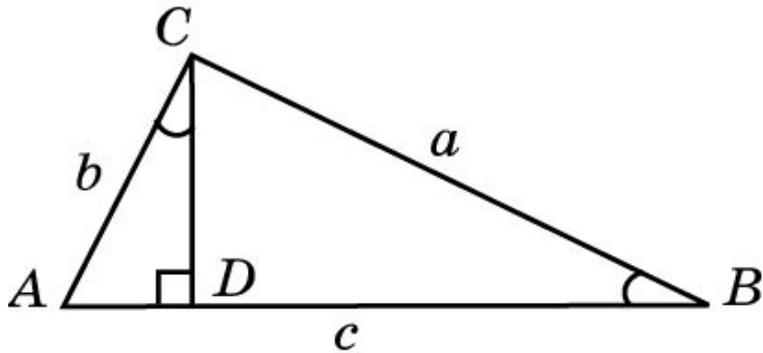


# Теорема Пифагора

**Теорема.** В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



$$c^2 = a^2 + b^2.$$

**Доказательство.** Пусть  $ABC$  - прямоугольный треугольник с прямым углом. Проведем высоту  $CD$ . Треугольники  $ABC$  и  $ACD$  подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно,  $AB \cdot AD = AC^2$ .

Аналогично треугольники  $ABC$  и  $CBD$  подобны (по первому признаку подобия треугольников). Следовательно,  $AB \cdot BD = BC^2$ . Складывая полученные равенства почленно и замечая, что  $AD + DB = AB$ , получим:  $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$ .

# Соизмеримые и несоизмеримые отрезки

Два отрезка называются **соизмеримыми**, если их отношение является рациональным числом. Иначе говоря, если один из них принять за единичный отрезок, то длина другого будет выражаться рациональным числом.

Два отрезка называются **несоизмеримыми**, если их отношение является иррациональным числом. Иначе говоря, если один из них принять за единичный отрезок, то длина другого будет выражаться иррациональным числом.

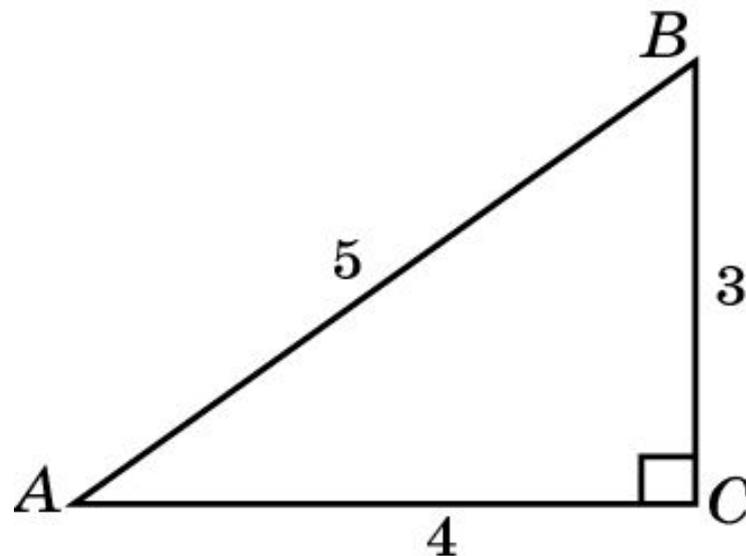
Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с его катетами.

# Пифагоровы тройки

**Пифагоровой тройкой** называется тройка  $(x, y, z)$  натуральных чисел  $x, y, z$ , для которых выполняется равенство  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Числа пифагоровой тройки представляют собой длины сторон прямоугольного треугольника.

Примером пифагоровой тройки является тройка  $(3, 4, 5)$ .



# Вопрос 1

Сформулируйте теорему Пифагора.

**Ответ:** В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

## Вопрос 2

Какие два отрезка называются соизмеримыми?

**Ответ:** Два отрезка называются соизмеримыми, если их отношение является рациональным числом.

## Вопрос 3

Какие два отрезка называются несоизмеримыми?

**Ответ:** Два отрезка называются несоизмеримыми, если их отношение является иррациональным числом.

## Вопрос 4

Приведите пример несоизмеримых отрезков.

**Ответ:** Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника и его катет.

## Вопрос 5

Что называется пифагоровой тройкой?

**Ответ:** Пифагоровой тройкой называется тройка  $(x, y, z)$  натуральных чисел  $x, y, z$ , для которых выполняется равенство:  $x^2 + y^2 = z^2$ .

## Вопрос 6

Каков геометрический смысл чисел пифагоровой тройки?

**Ответ:** Числа пифагоровой тройки представляют собой длины сторон прямоугольного треугольника.

## Вопрос 7

Приведите примеры пифагоровых троек.

**Ответ:** (3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), ...

# Упражнение 1

У прямоугольного треугольника заданы катеты  $a$  и  $b$ . Найдите гипотенузу  $c$ , если: а)  $a = 3$ ,  $b = 4$ ; б)  $a = 1$ ,  $b = 1$ ; в)  $a = 5$ ,  $b = 6$ .

**Ответ:** а) 5;

б)  $\sqrt{2}$  ;

в)  $\sqrt{61}$  .

## Упражнение 2

У прямоугольного треугольника заданы гипотенуза  $c$  и катет  $a$ . Найдите второй катет, если: а)  $c = 5$ ,  $a = 3$ ; б)  $c = 13$ ,  $a = 5$ ; в)  $c = 6$ ,  $a = 5$ .

**Ответ:** а) 4;  
б) 12;  
в)  $\sqrt{11}$ .

## Упражнение 3

Стороны прямоугольника равны 5 и 12. Найдите его диагональ.

Ответ: 13.

## Упражнение 4

Диагональ прямоугольника равна 10. Одна из его сторон равна 6. Найдите другую, не равную ей сторону.

Ответ: 8.

## Упражнение 5

Стороны квадрата равны 5. Найдите квадрат его диагонали.

Ответ: 50.

## Упражнение 6

Диагональ квадрата 2. Чему равна его сторона?

Ответ:  $\sqrt{2}$ .

## Упражнение 7

Точка, лежащая внутри прямого угла, удалена от его сторон на расстояния, равные  $a$  и  $b$ . Найдите расстояние от точки до вершины угла.

Ответ:  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

## Упражнение 8

Могут ли стороны прямоугольного треугольника быть пропорциональны числам 5, 6, 7?

Ответ: Нет.

## Упражнение 9

Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором: а) гипотенуза равна 10 см, разность катетов – 2 см; б) гипотенуза равна 26 см, а отношение катетов 5 : 12.

**Ответ:** а) 6 см, 8 см, 10 см;  
б) 10 см, 24 см, 26 см.

## Упражнение 10

Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите стороны этого треугольника.

**Ответ:** 5, 12 и 13.

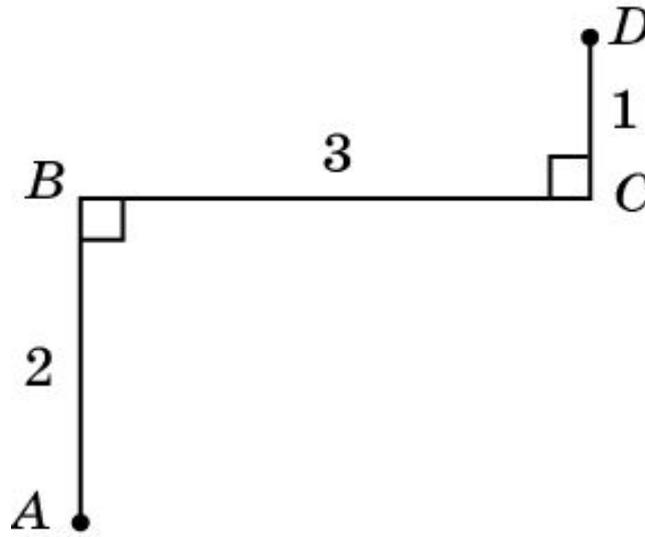
## Упражнение 11

В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.

**Ответ:** 2,4; 1,8 и 3,2.

## Упражнение 12

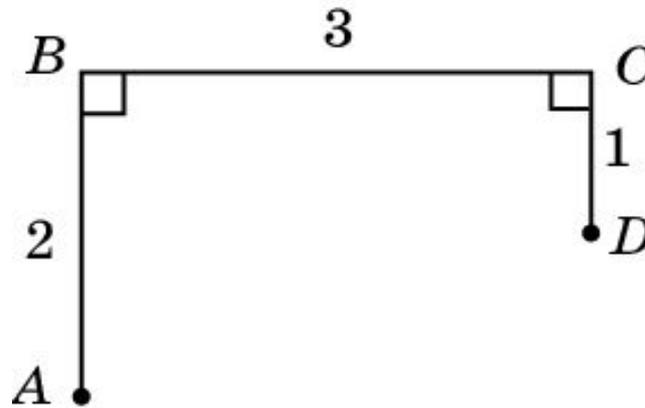
На рисунке отрезки  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны  $BC$ . Найдите квадрат расстояния между точками  $A$  и  $D$ .



Ответ: 14.

## Упражнение 13

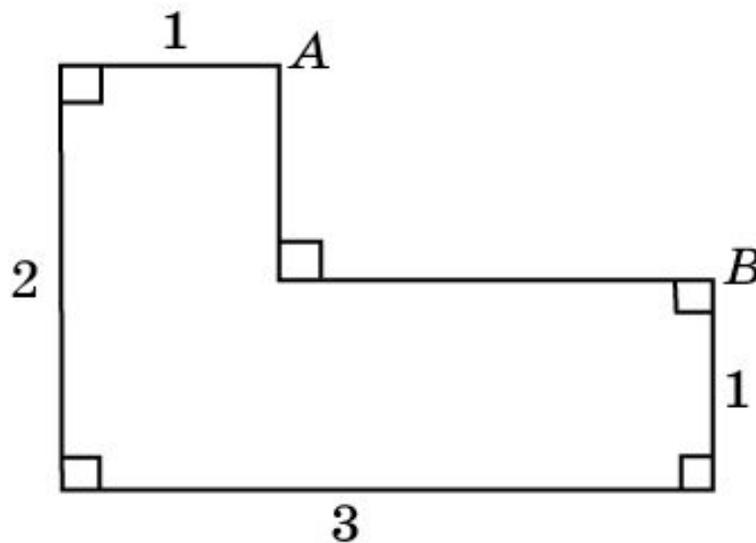
На рисунке отрезки  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны  $BC$ . Найдите квадрат расстояния между точками  $A$  и  $D$ .



Ответ: 10.

## Упражнение 14

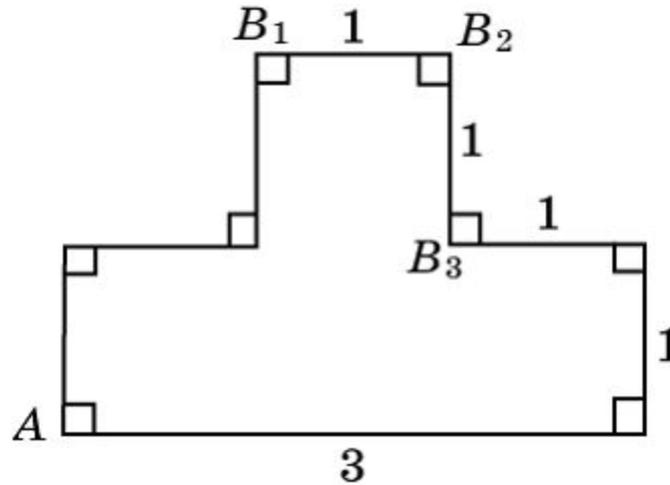
Найдите квадрат расстояния между точками  $A$  и  $B$ , изображенными на рисунке.



Ответ: 5.

## Упражнение 15

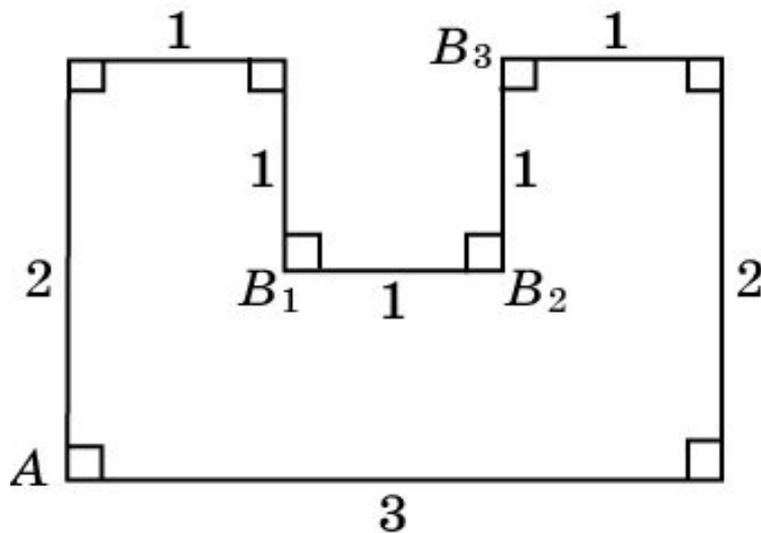
Найдите квадрат расстояния между точками  $A$  и:  
а)  $B_1$ ; б)  $B_2$ ; в)  $B_3$ , изображенными на рисунке.



**Ответ:** а) 5; б) 8; в) 5.

## Упражнение 16

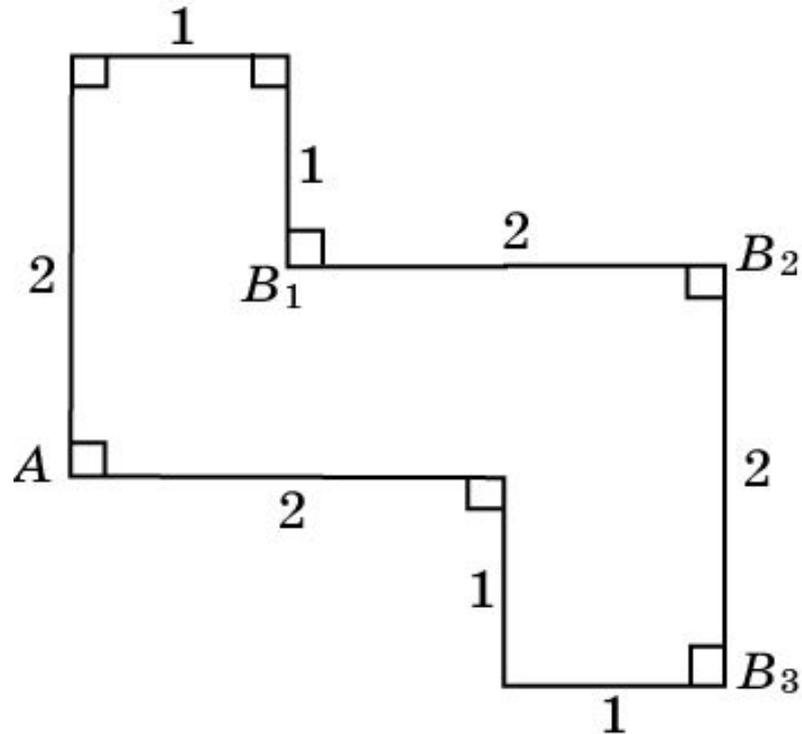
Найдите квадрат расстояния между точками  $A$  и:  
а)  $B_1$ ; б)  $B_2$ ; в)  $B_3$ , изображенными на рисунке.



**Ответ:** а)  $2$ ; б)  $5$ ; в)  $8$ .

## Упражнение 17

Найдите квадрат расстояния между точками  $A$  и:  
а)  $B_1$ ; б)  $B_2$ ; в)  $B_3$ , изображенными на рисунке.



**Ответ:** а) 2; б) 10; в) 10.

## Упражнение 18

Найдите сторону ромба, если его диагонали равны 6 м и 8 м.

Ответ: 5 м.

## Упражнение 19

Сторона ромба равна 13. Одна из его диагоналей равна 10. Найдите другую диагональ.

Ответ: 24.

## Упражнение 20

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10, основание равно 12. Найдите высоту этого треугольника, опущенную на основание.

Ответ: 8.

## Упражнение 21

Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, высота, опущенная на основание, равна 4. Найдите основание этого треугольника.

Ответ: 6.

## Упражнение 22

Основание равнобедренного треугольника равно 8, высота, опущенная на основание, равна 3. Найдите боковую сторону этого треугольника.

Ответ: 5.

## Упражнение 23

Найдите высоту равнобедренной трапеции, у которой основания равны 4 и 10, а боковая сторона равна 5.

Ответ: 4.

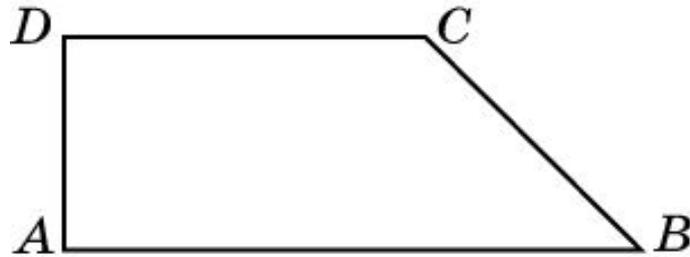
## Упражнение 24

Высота равнобедренной трапеции равна 15 см, основания равны 8 см и 24 см. Найдите боковые стороны.

Ответ: 17 см.

## Упражнение 25

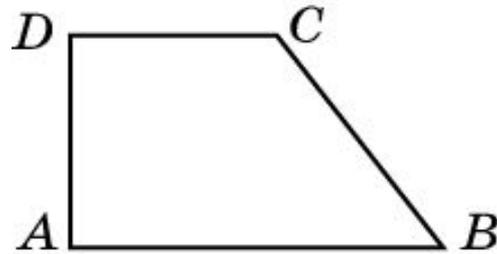
Основания прямоугольной трапеции равны 5 и 8, большая боковая сторона равна 5. Найдите меньшую боковую сторону.



Ответ: 4.

## Упражнение 26

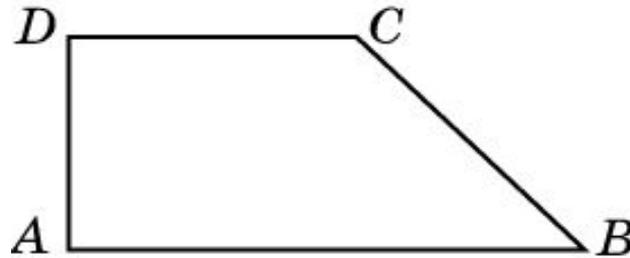
Боковые стороны прямоугольной трапеции равны 5 и 4, меньшее основание равно 4. Найдите большее основание.



Ответ: 7.

## Упражнение 27

Основания прямоугольной трапеции равны 4 и 8, меньшая боковая сторона равна 3. Найдите большую боковую сторону.



Ответ: 5.

## Упражнение 28

В правильном треугольнике со стороной 1 найдите: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

Ответ: а), б), в)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Упражнение 29

Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 5 и 12.

Ответ: 6,5.

## Упражнение 30

Диаметр окружности, описанной около прямоугольника, равен 10. Одна сторона этого прямоугольника равна 6. Найдите другую его сторону.

Ответ: 8.

## Упражнение 31

В равностороннем треугольнике со стороной  $a$  найдите радиусы  $r$  и  $R$  вписанной и описанной окружностей.

Ответ:  $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ;  $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

## Упражнение 32

Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Ответ: 1 см.

## Упражнение 33

Найдите гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, в который вписана окружность радиуса 1.

**Ответ:**  $2 + 2\sqrt{2}$  см.

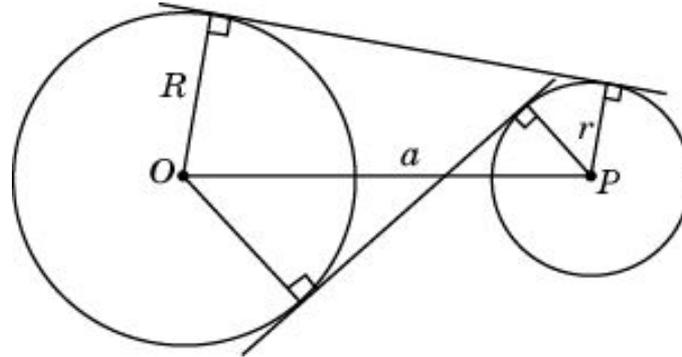
## Упражнение 34

Найдите медиану, опущенную на основание равнобедренного треугольника с основанием  $a$  и боковой стороной  $b$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ .

## Упражнение 35

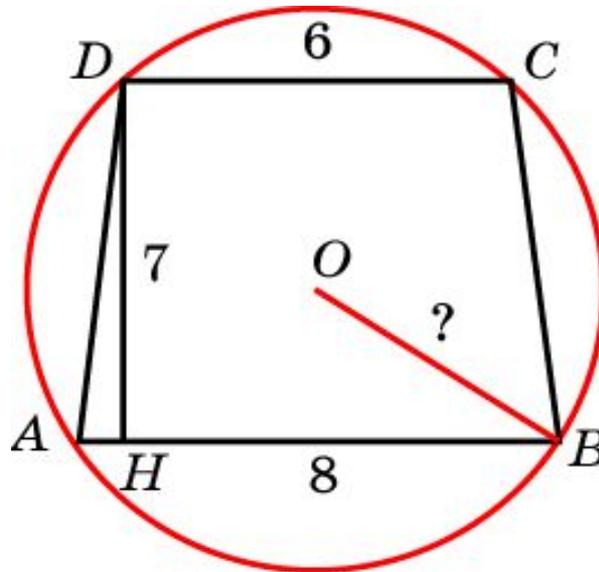
Даны две окружности, радиусов  $R$  и  $r$ . Расстояние между их центрами равно  $a > R + r$ . Найдите длины отрезков их общих касательных.



Ответ:  $\sqrt{a^2 - (R - r)^2}$ ,  $\sqrt{a^2 - (R + r)^2}$ .

## Упражнение 36

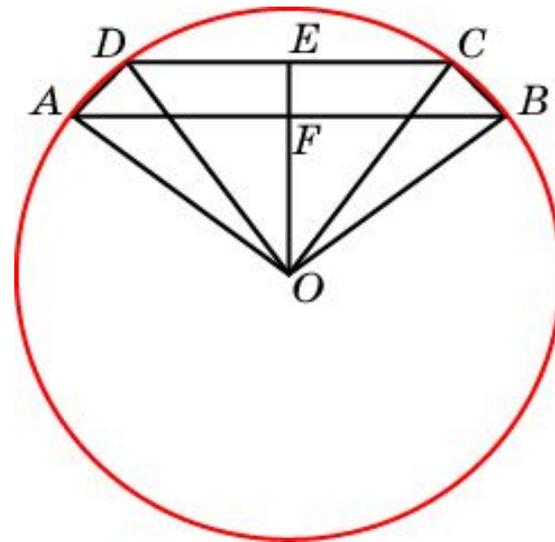
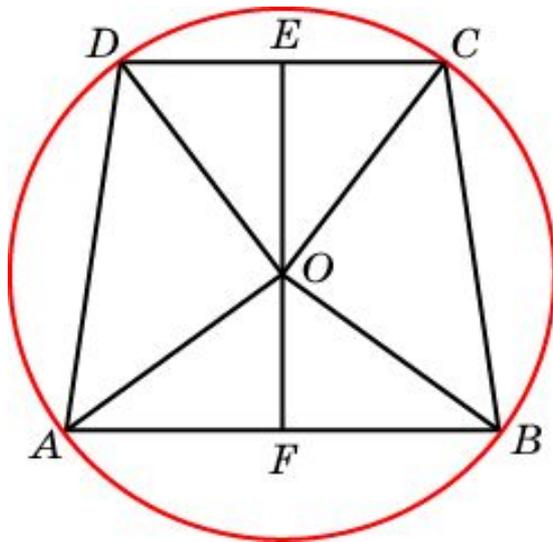
Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6, высота равна 7. Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 5.

## Упражнение 37

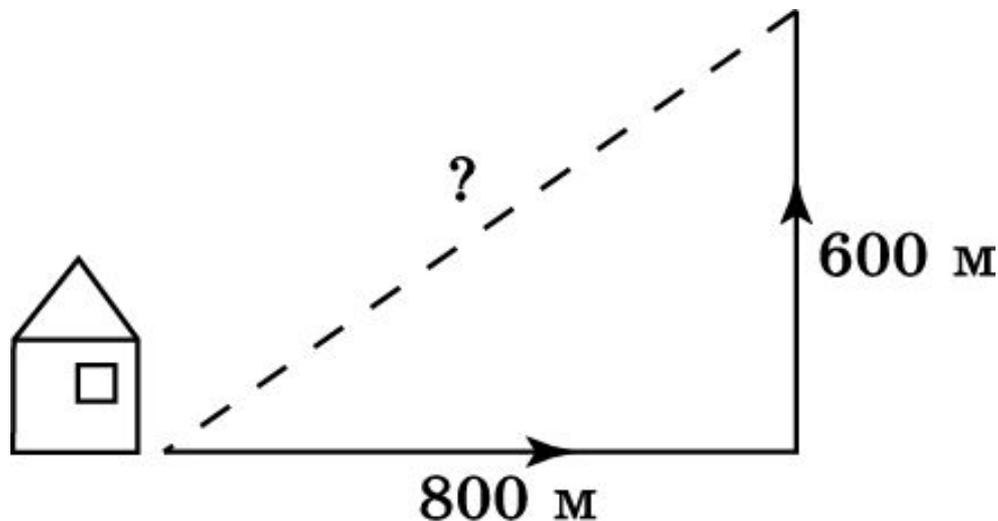
Основания равнобедренной трапеции равны 16 и 12, радиус описанной окружности равен 10. Найдите высоту трапеции.



**Ответ:** Возможны два случая. В первом высота трапеции равна 14, во втором - 2.

## Упражнение 38

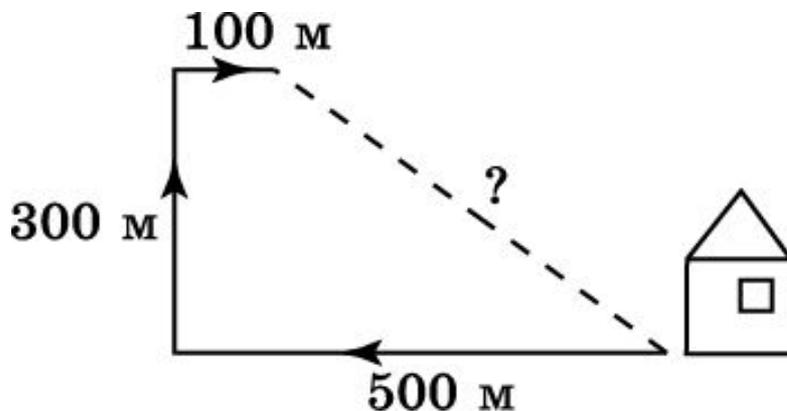
Мальчик прошел от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. На каком расстоянии от дома оказался мальчик?



**Ответ:** 1000 м.

## Упражнение 39

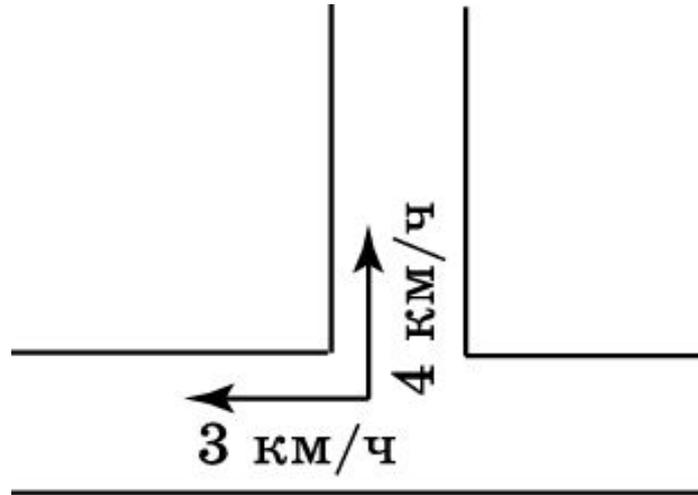
Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м. На каком расстоянии от дома оказалась девочка?



**Ответ:** 500 м.

## Упражнение 40

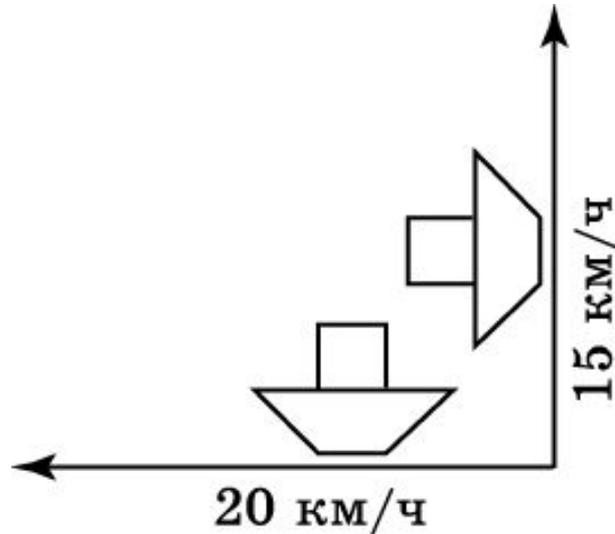
Мальчик и девочка, расставшись на перекрестке, пошли по взаимно перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка – 3 км/ч. Какое расстояние (в км) будет между ними через 30 мин?



**Ответ:** 2,5 км.

## Упражнение 41

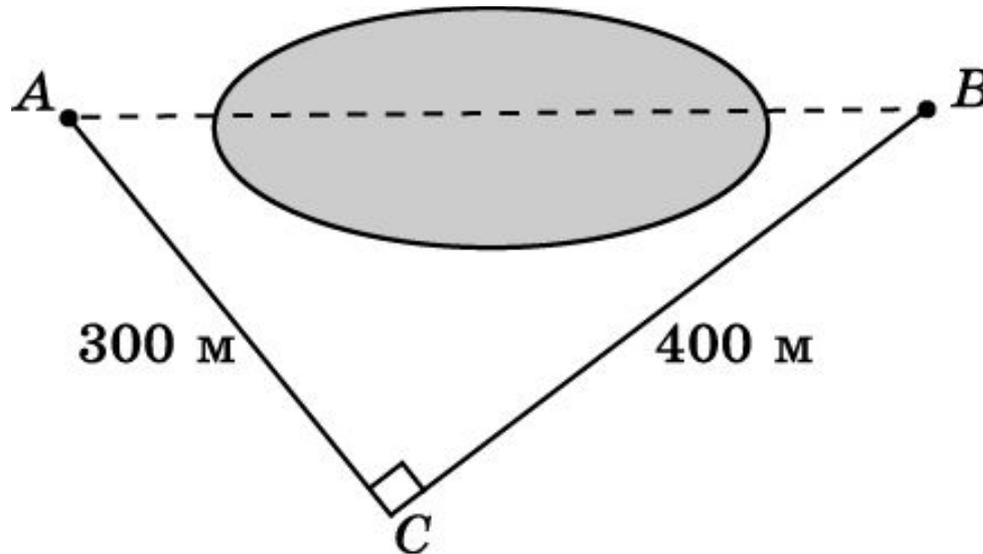
Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?



**Ответ:** 50 км.

## Упражнение 42

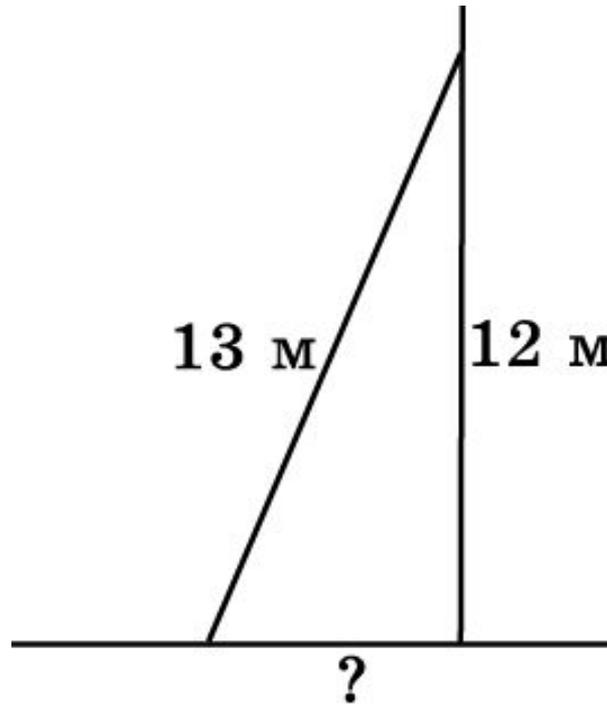
Используя данные, приведенные на рисунке, найдите расстояние в метрах между пунктами  $A$  и  $B$ , расположенными на разных берегах озера.



**Ответ:**  $500\text{ м}$ .

## Упражнение 43

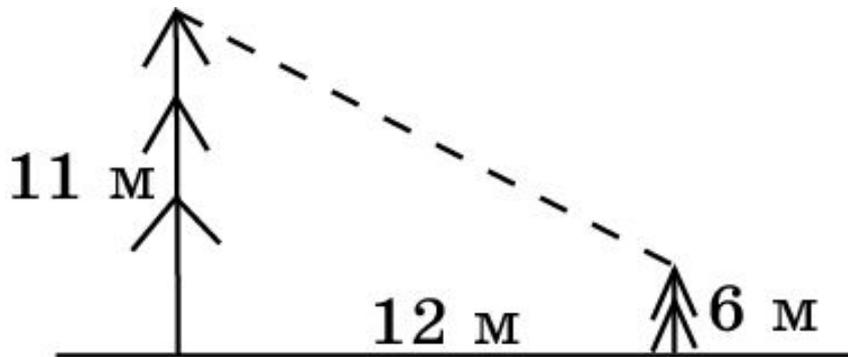
На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 13 м, чтобы верхний ее конец оказался на высоте 12 м?



**Ответ:** 5 м.

## Упражнение 44

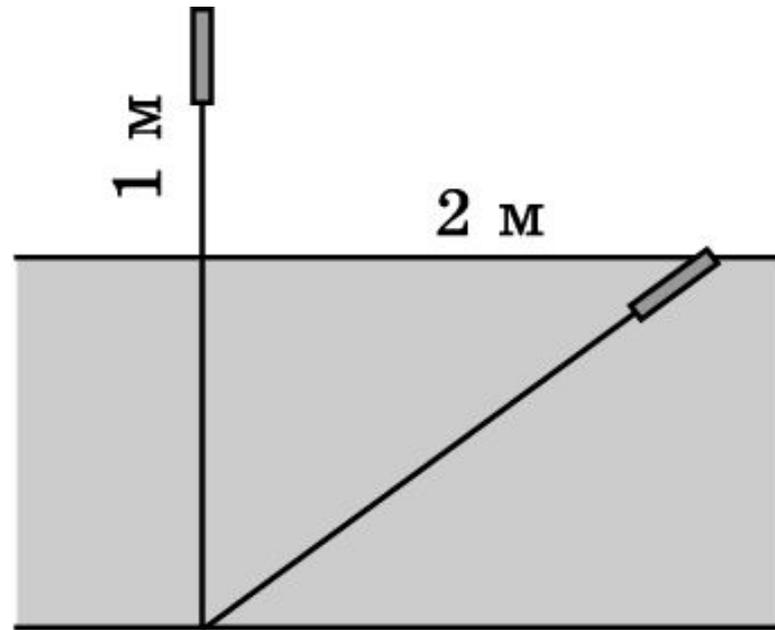
В 12 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 11 м, а другой – 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.



**Ответ:** 13 м.

## Упражнение 45

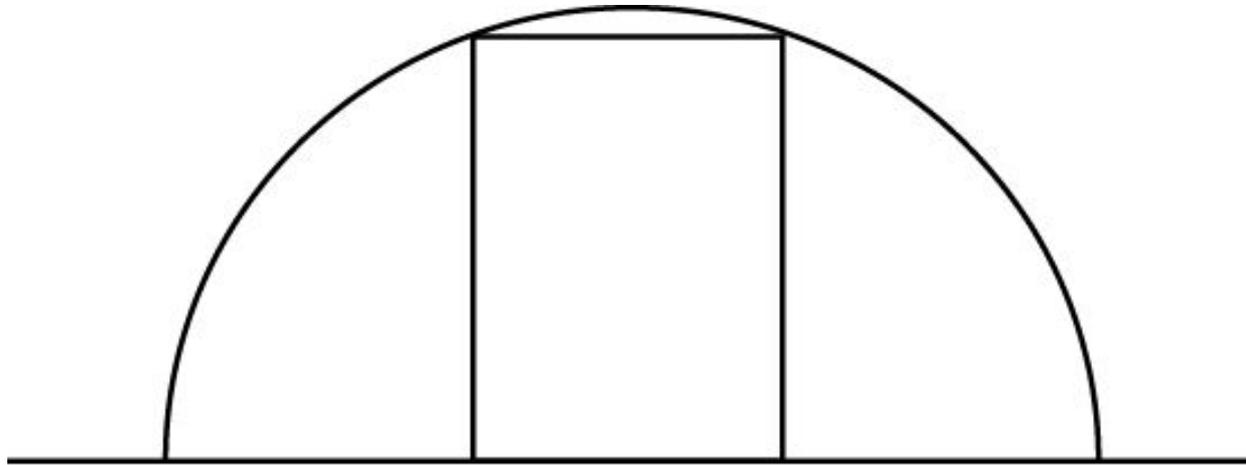
Стебель камыша выступает из воды озера на 1 м. Его верхний конец отклонили от вертикального положения на 2 м, и он оказался на уровне воды. Найдите глубину озера в месте, где растет камыш.



**Ответ:** 1,5 м.

## Упражнение 46

Туннель имеет форму полукруга радиуса 3 м. Какой наибольшей высоты должна быть машина шириной 2 м, чтобы она могла проехать по этому туннелю?



Ответ:  $2\sqrt{2}$  м.