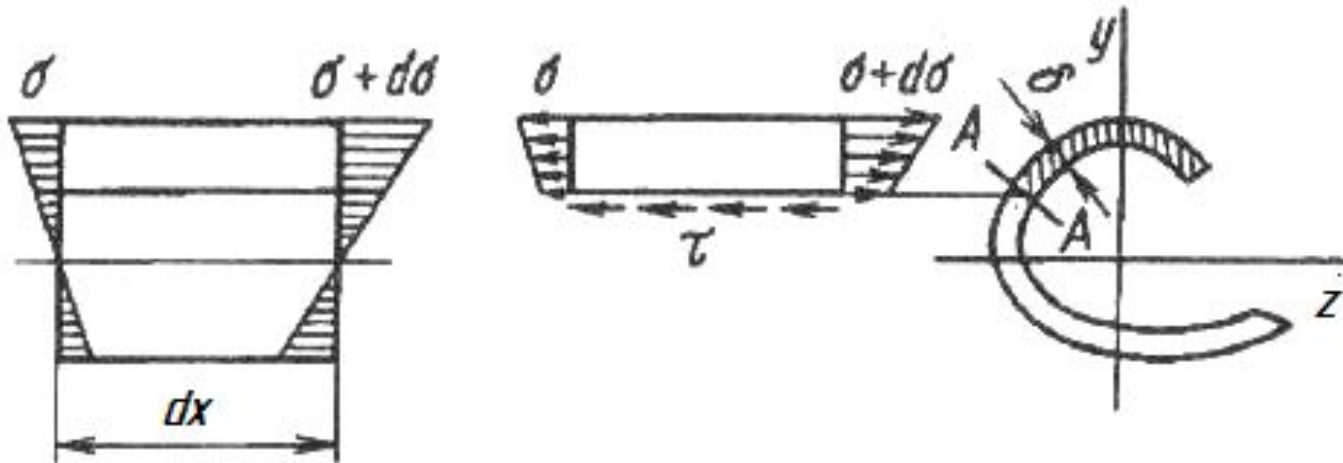


Изгиб тонкостенных профилей Изгиб бруса большой кривизны

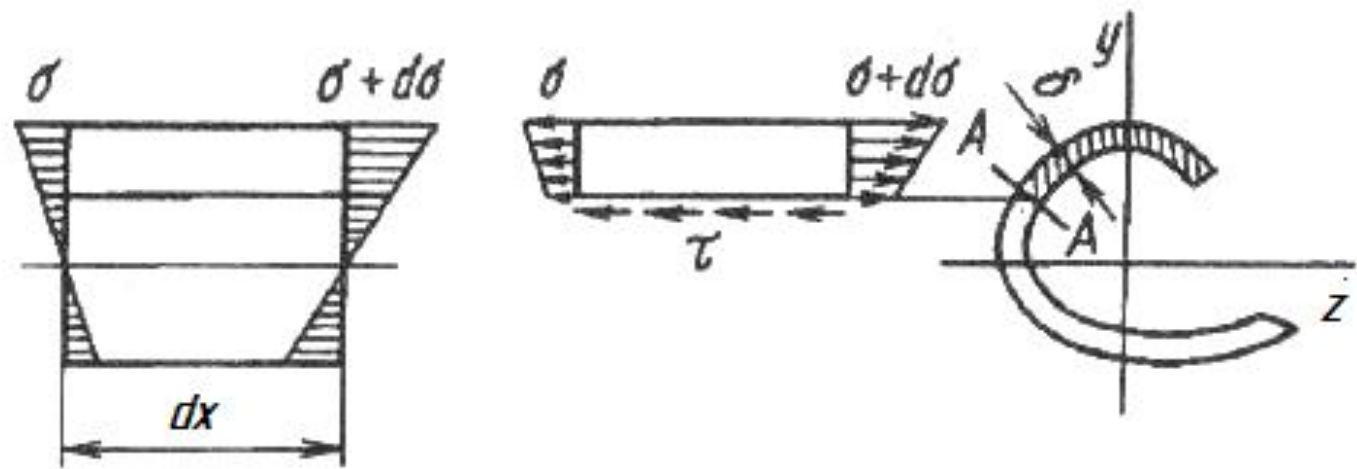
Доцент кафедры
Самолетостроения
К.т.н. Мухин Д.В.

Изгиб тонкостенных профилей

При поперечном изгибе тонкостенного стержня в его сечениях преобладающими остаются нормальные напряжения, которые в основном и определяют прочность стержня. Однако здесь, в отличие от стержня сплошного сечения, существенное значение приобретают касательные напряжения и законы их распределения.



Касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенного стержня определяются по тому же принципу, что и для сплошного стержня. Разность нормальных сил для элементарного участка, расположенного по одну сторону от продольного разреза, уравнивается касательными напряжениями τ .



В отличие от стержня сплошного сечения продольный разрез тонкостенного стержня следует производить не параллельной нейтральному слою плоскостью, а плоскостью А-А, нормальной к средней линии контура. Такое сечение имеет наименьшую ширину, равную δ , и в нем касательные напряжения, уравнивающие разность нормальных сил, будут больше, чем в других продольных сечениях.

Проводя построения, аналогичные выводу формулы Журавского, получаем, что для тонкостенного стержня в этом выводе ничего не меняется, кроме того, что обозначение b заменяется на δ . В итоге имеем:

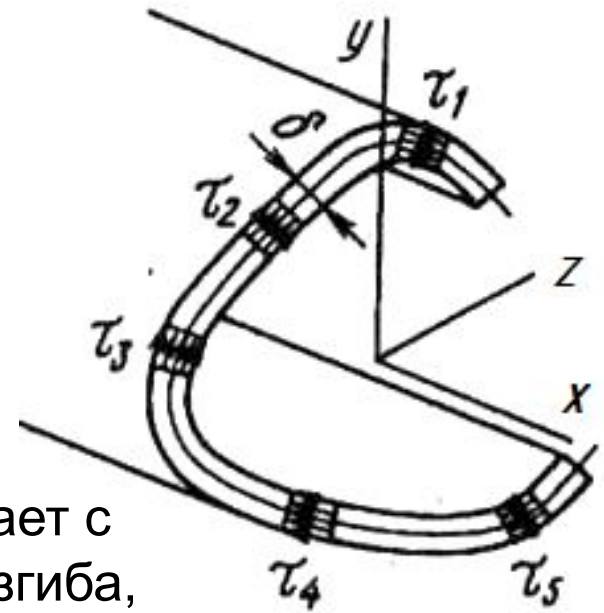
$$\tau = \frac{Q \cdot S_z^*}{J_z \cdot \delta}$$

Q - поперечная сила в сечении, направленная перпендикулярно оси z ,

S_z^* - статический момент заштрихованной части сечения относительно z ;

J_z - момент инерции всего сечения относительно оси z .

Как и в случае кручения тонкостенных профилей касательные напряжения τ предполагаются равномерно распределенными по ширине сечения δ . В поперечном сечении стержня возникают напряжения, парные τ . Они направлены по касательной к линии контура.



Если направление поперечной силы Q не совпадает с главной осью сечения, то, как и в случае косоугольного изгиба, эта сила может быть разложена на составляющие Q_y и Q_z , направленные по главным осям.

Результирующие касательные напряжения будут равны сумме касательных напряжений, обусловленных каждой составляющей, то есть:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{J_z \cdot \delta} + \frac{Q_z \cdot S_y^*}{J_y \cdot \delta}$$

Пример 1

Определить закон распределения касательных напряжений в корытном профиле при поперечном изгибе в вертикальной плоскости.

При размерах, показанных на рисунке:

$$J_z = \frac{h^2 \cdot \delta}{12} \cdot (h + 6 \cdot b)$$

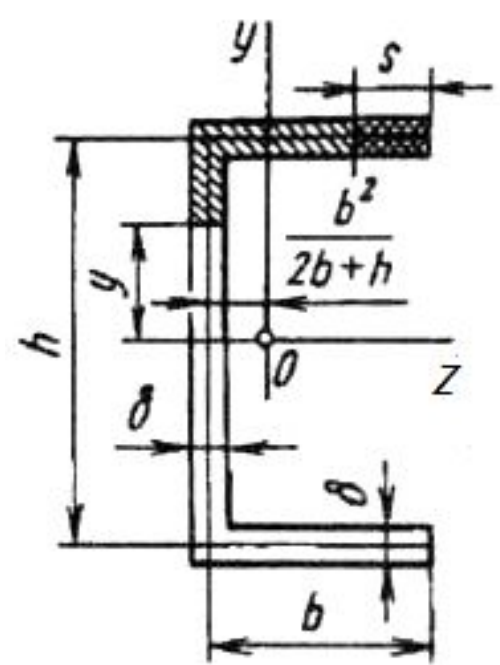
Для участка полки длиной s :

$$S_z^* = \frac{h}{2} \cdot \delta \cdot s$$

Таким образом, для полки, согласно полученной ранее зависимости

$$\tau = \frac{6 \cdot Q \cdot s}{h \cdot \delta \cdot (h + 6 \cdot b)}$$

и касательное напряжение оказывается пропорциональным s . То же самое имеет место и для нижней полки.



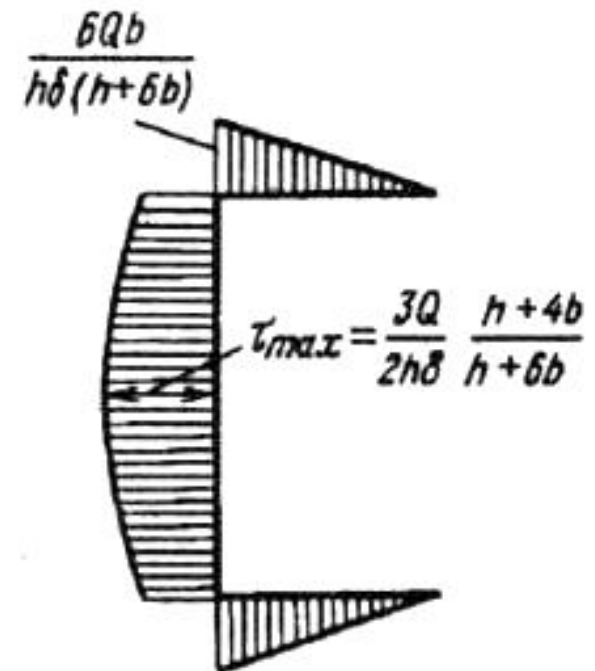
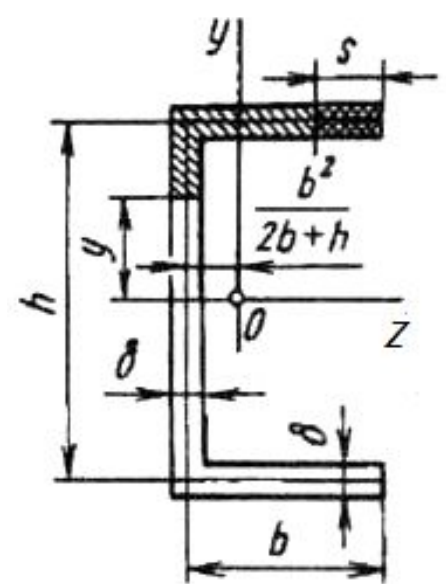
Если разрез сечения произвести на участке вертикальной стенки, статический момент части сечения, расположенной выше уровня y , будет равен:

$$S_z^* = \frac{\delta}{2} \cdot \left(b \cdot h + \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

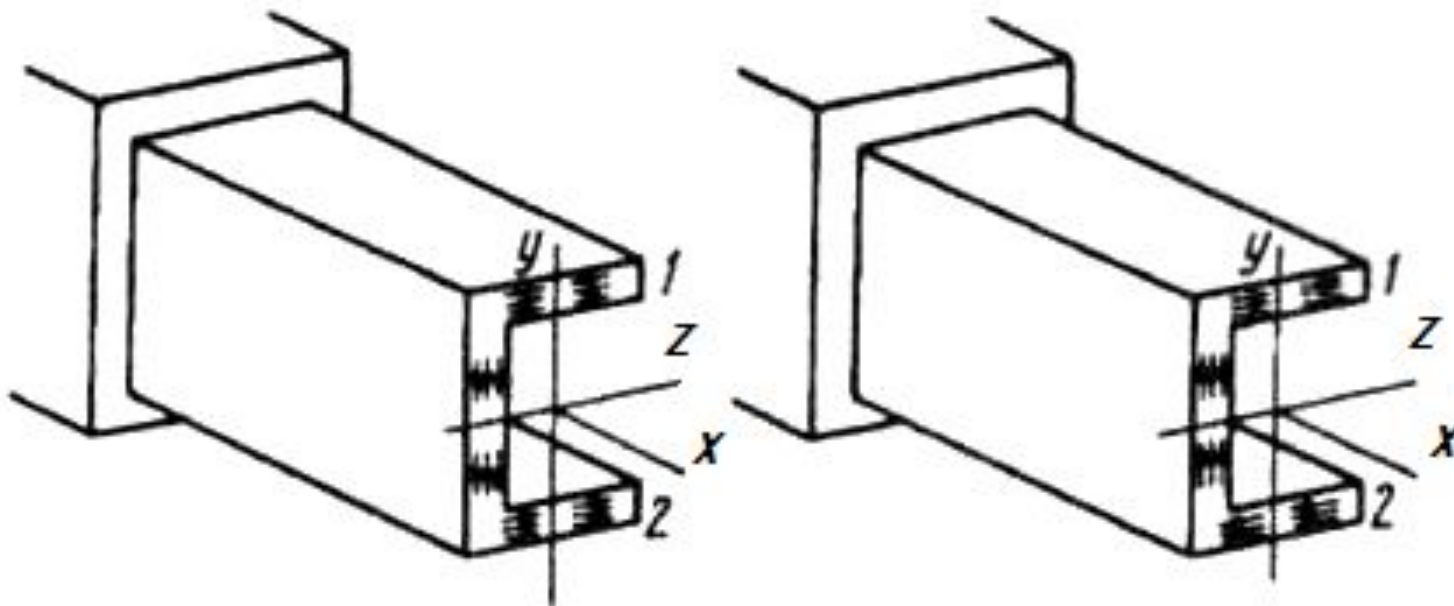
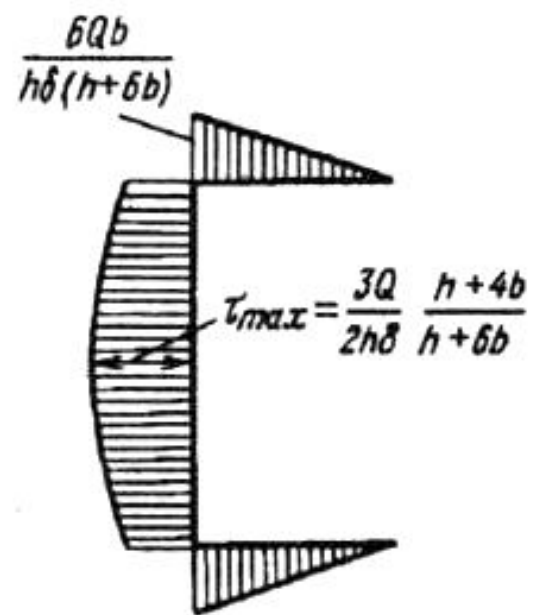
После подстановки получаем выражение для касательных напряжений:

$$\tau = \frac{6 \cdot Q \cdot \left(b \cdot h + \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{h \cdot \delta \cdot (h + 6 \cdot b)}$$

Т.е. на вертикальном участке касательное напряжение представляет собой квадратичную функцию y

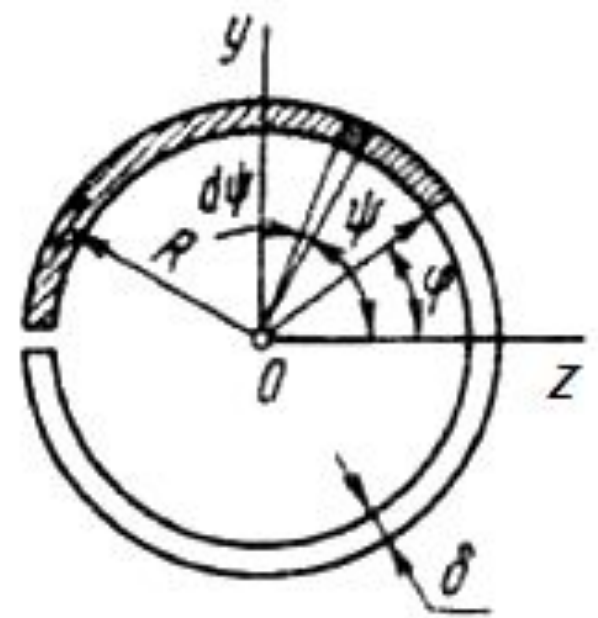


На рис. показана эпюра распределения касательных напряжений по контуру. Знак τ вдоль контура, как видим, не меняется. Следовательно, найденное касательное напряжение сохраняет для всех точек сечения постоянное направление, т.е. либо от края 1 к краю 2, либо же от края 2 к краю 1, в зависимости от знака поперечной силы.



Пример

Найти закон распределения касательных напряжений в круговом незамкнутом профиле при изгибе в плоскости, перпендикулярной оси симметрии.



Момент инерции сечения относительно оси z равен:

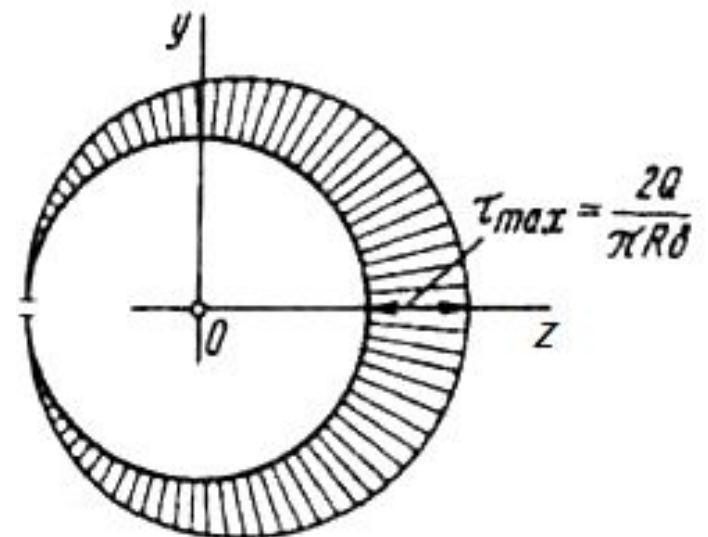
$$J_z = \pi \cdot R^3 \cdot \delta$$

Статический момент заштрихованной части сечения определяется интегралом:

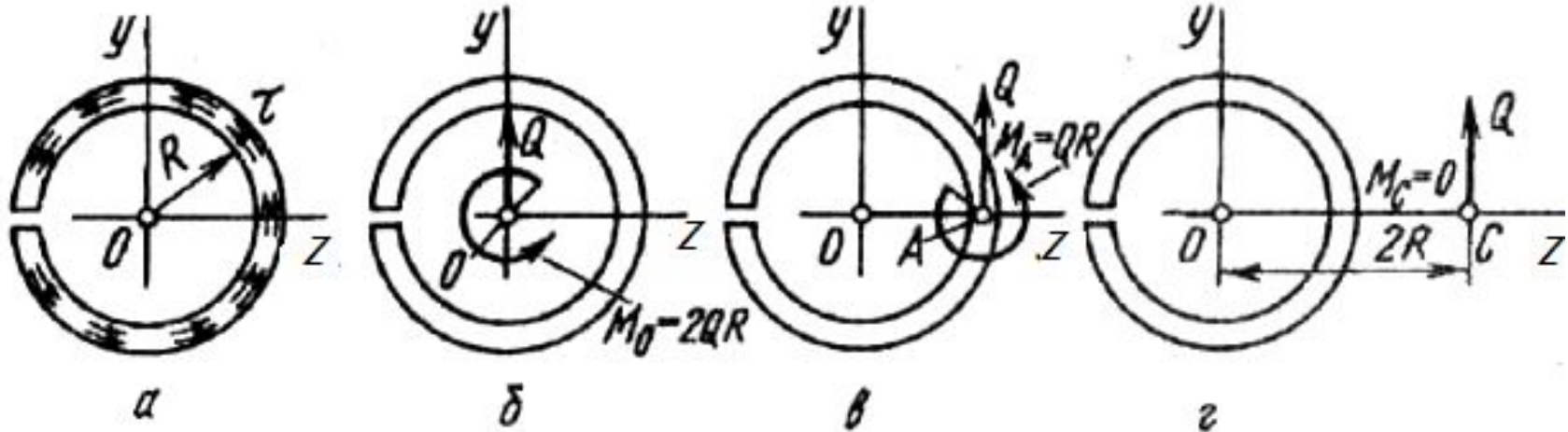
$$S_z^* = \delta \cdot \int_{\varphi}^{\pi} R^2 \cdot \sin \psi \cdot d\psi = R^2 \cdot \delta \cdot (1 + \cos \varphi)$$

После подстановки:

$$\tau = \frac{Q}{\pi \cdot R \cdot \delta} \cdot (1 + \cos \varphi)$$



Центр изгиба

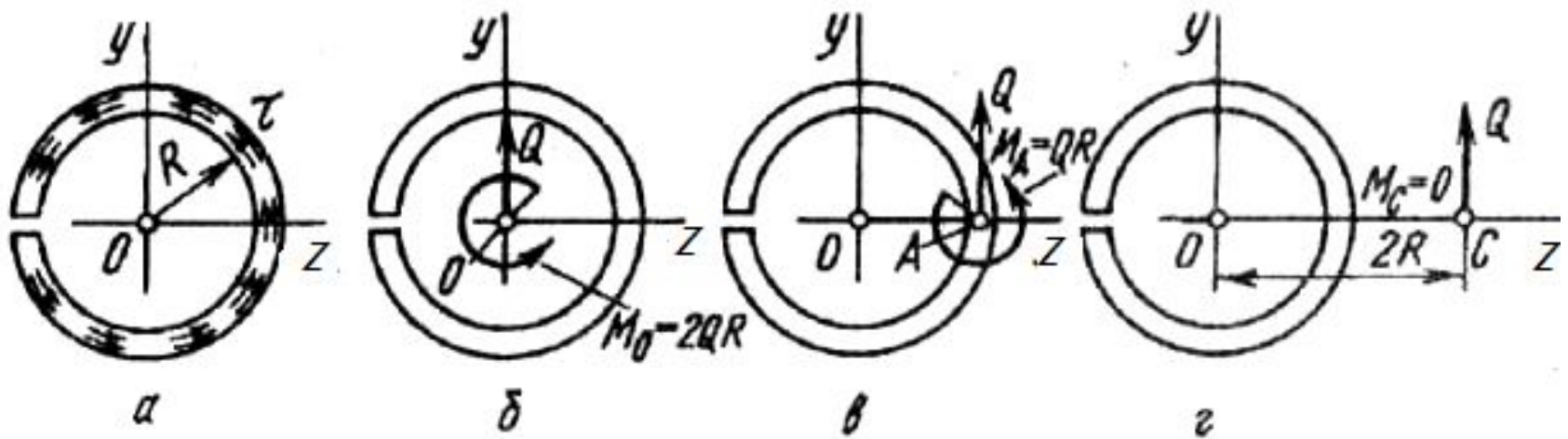


Система сил, лежащих в плоскости сечения, как известно из теоретической механики, может быть приведена к любой точке плоскости в виде главной силы и главного момента.

Равнодействующая сила не зависит от точки приведения и во всех случаях равна поперечной силе Q . В этом можно убедиться хотя бы на примере рассмотренного кругового незамкнутого профиля. Здесь равнодействующая касательных сил по оси y определяется следующим интегралом:

$$\int_A \tau \cdot \cos \varphi \cdot dA = \frac{Q}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = Q$$

То же самое имеет место и для рассмотренного выше примера корытного и вообще для любого профиля.



Что касается равнодействующего момента в сечении, то он зависит от положения точки приведения сил. Так, например, в том же случае кругового незамкнутого профиля момент касательных сил относительно центра круга будет:

$$M_0 = \int_A \tau \cdot R \cdot dA = \frac{Q \cdot R}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \varphi) \cdot d\varphi = 2Q \cdot R$$

При переходе от одной точки к другой момент изменится, очевидно, на величину $Q \cdot a$, где a - расстояние между этими точками. Так, если привести силы к точке А (см. рис. в), то

$$M_A = M_0 - Q \cdot R$$

Существует такая точка, относительно которой момент касательных сил в сечении при поперечном изгибе равен нулю. Эта точка называется центром изгиба.

В рассмотренном примере центр изгиба находится на расстоянии $2R$ от центра круга

Для корытного профиля в точке А имеем

$$M_A = 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \int_0^b \tau \cdot \delta \cdot ds$$

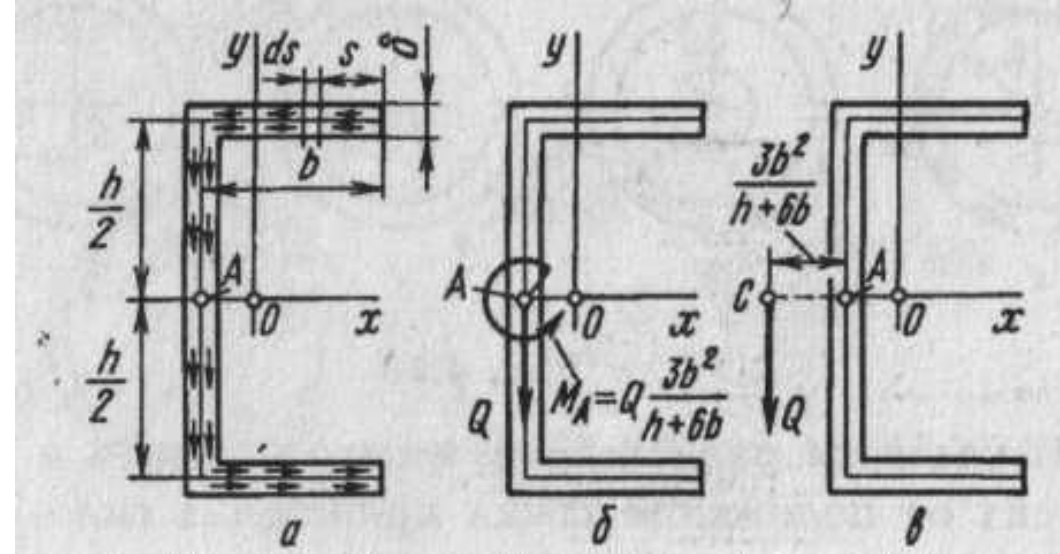
Подставляем τ для полок (силы от напряжений, возникающих в вертикальной части проходят через А и момента не дают)

$$\tau = \frac{6 \cdot Q \cdot s}{h \cdot \delta \cdot (h + 6 \cdot b)}$$

После подстановки и интегрирования получаем: $M_A = Q \cdot \frac{3 \cdot b^2}{h + 6 \cdot b}$

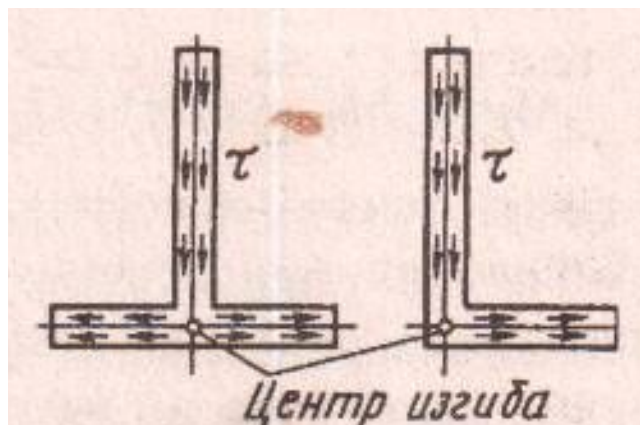
Отсюда следует, что центр изгиба находится на расстоянии от средней линии стенки

$$\frac{3 \cdot b^2}{h + 6 \cdot b}$$



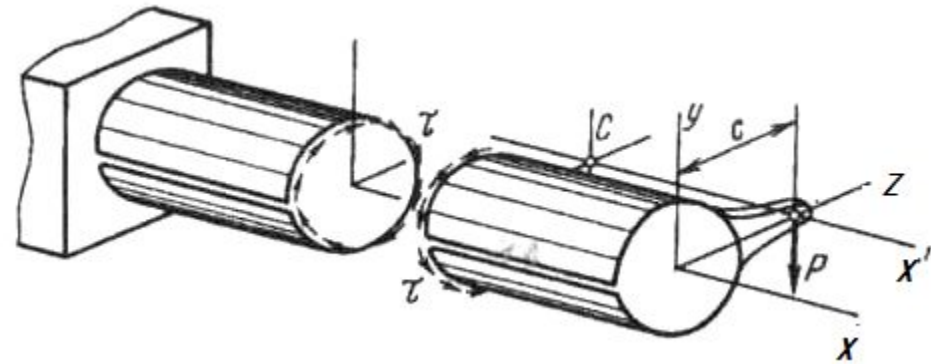
Для сечений, имеющих две оси симметрии, центр изгиба совпадает, очевидно, с центром тяжести.

В некоторых простейших случаях положение центра изгиба может быть указано без проведения каких бы то ни было вычислений. Например, у таврового и углового профилей центр изгиба находится в точке пересечения средних линий стенки и полки. Момент касательных сил относительно этой точки всегда равен нулю.



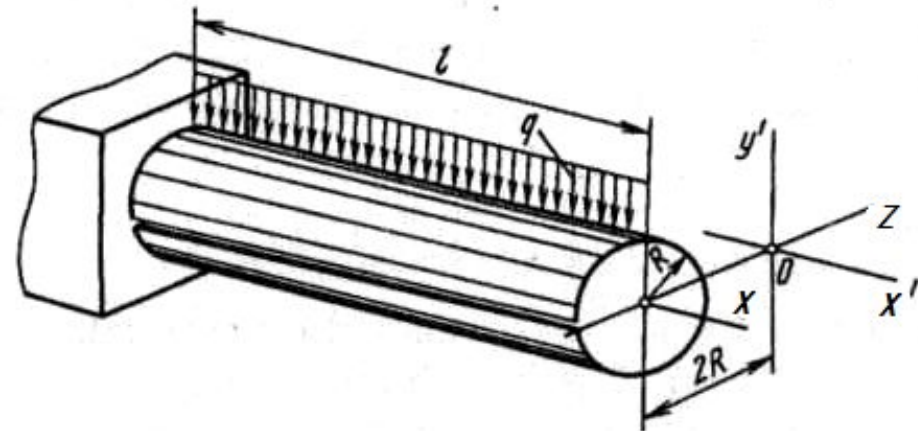
Итак, если момент касательных сил в сечении относительно центра изгиба равен нулю, то и момент внешних сил относительно центра изгиба должен быть равен нулю, иначе в стержне будут возникать деформации, свойственные не только поперечному изгибу, но и кручению. В дальнейшем целесообразно, очевидно, при определении внутренних силовых факторов приводить касательные силы в сечении не к центру тяжести, а к центру изгиба и под крутящим моментом понимать соответственно внутренний момент относительно центра изгиба.

Так, рассматривая, например, стержень, показанный на рисунке можно сказать, что поскольку линия действия силы проходит через ось x' (ось центров изгиба), то крутящий момент в сечении равен нулю и стержень закручиваться не будет.



Тот же самый стержень, заземленный одним концом и находящийся под действием собственного веса, будет закручиваться. Крутящий момент в заделке равен:

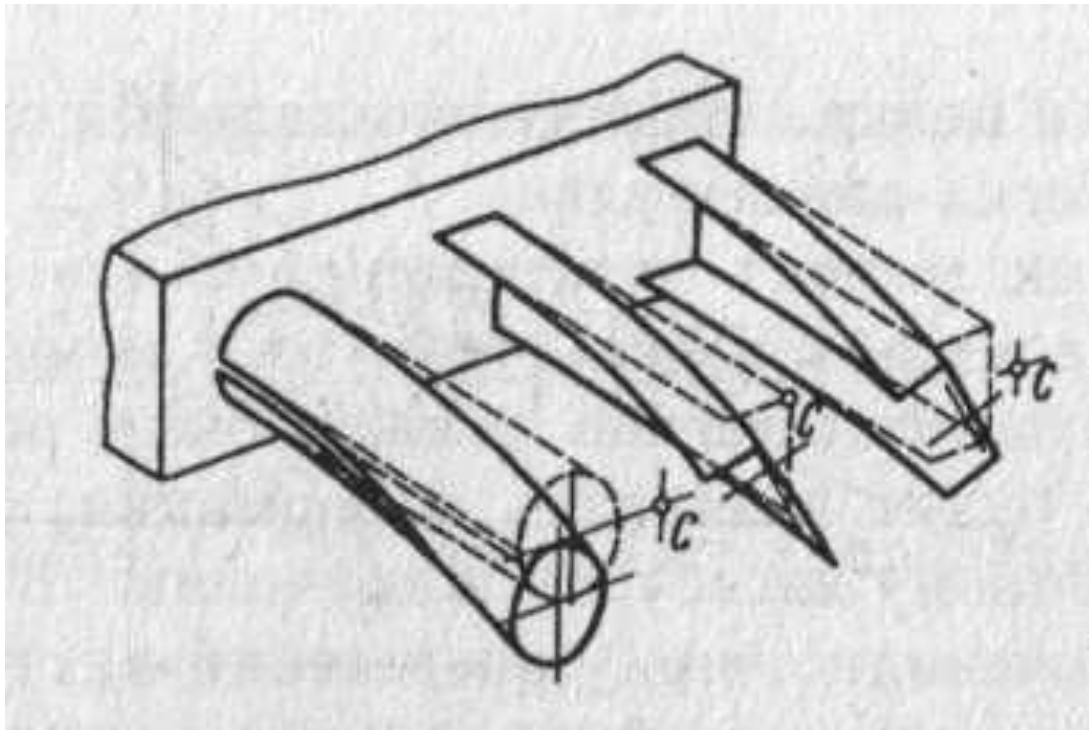
$$M_K = Q \cdot 2R = ql \cdot 2R$$



Дополнительные касательные напряжения кручения распределяются в сечении по законам для открытого профиля. При этом

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M_{\kappa}}{\delta^2 \cdot s} = \frac{3 \cdot q \cdot l}{\pi \cdot \delta^2}$$

Аналогичная картина имеет место и при изгибе тонкостенного стержня любого профиля, если только равнодействующая внешних сил не проходит в сечении через центр изгиба.



Изгиб бруса большой кривизны

До сих пор мы рассматривали задачи, связанные с изгибом прямого бруса.

Обратимся теперь к изгибу кривого бруса, полагая, что внешние силы приложены в плоскости его кривизны.

Принято различать брус малой и большой кривизны. Основным признаком для такого деления является отношение высоты сечения h в плоскости кривизны к радиусу кривизны оси бруса ρ_0 . Если это отношение существенно меньше единицы ($h/\rho_0 < 0,2$), считается, что брус имеет малую кривизну. Для бруса большой кривизны отношение h/ρ_0 соизмеримо с единицей. Таким образом, указанное деление является условным и не имеет четкой границы.

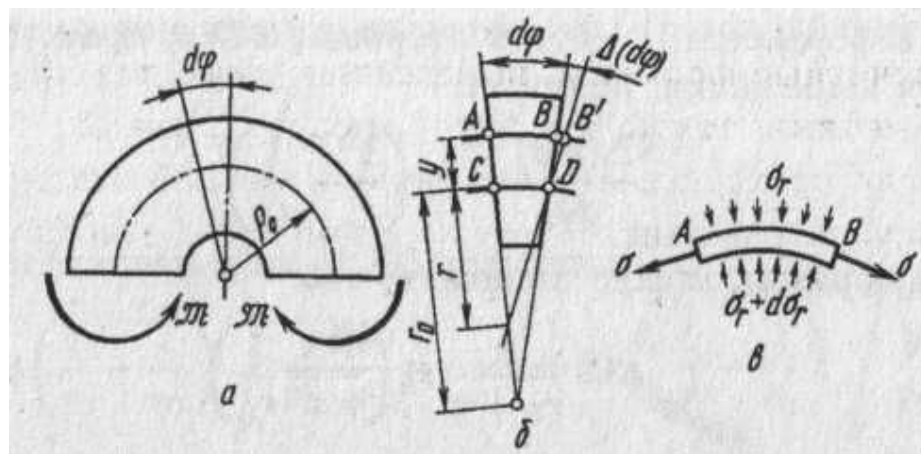
Расчетные формулы, выведенные ранее для прямого бруса, применимы также и к брусу малой кривизны. Очевидное изменение претерпевает только формула, определяющая кривизну нагруженного бруса. Взамен нее для бруса малой кривизны имеем

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{E \cdot J_z}$$

где $1/\rho_0$ - кривизна ненагруженного бруса. Таким образом, задачи, связанные с расчетом бруса малой кривизны на прочность, не содержат в себе специфических особенностей.

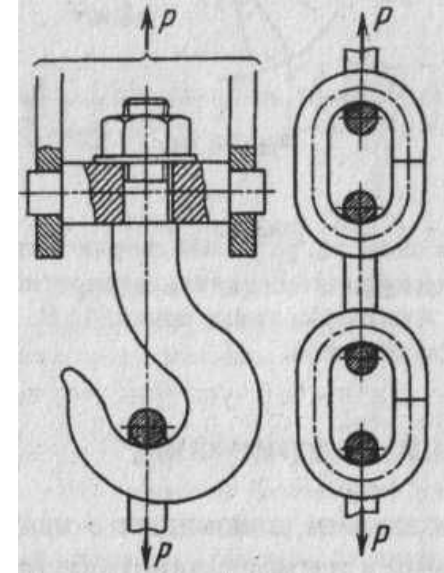
Перейдем теперь к брусу большой кривизны. К схеме такого бруса сводится, например, задача расчета на прочность крюка подъемника или звеньев металлической цепи).

Положим, имеется участок бруса большой кривизны постоянного сечения, нагруженный по концам моментами M .



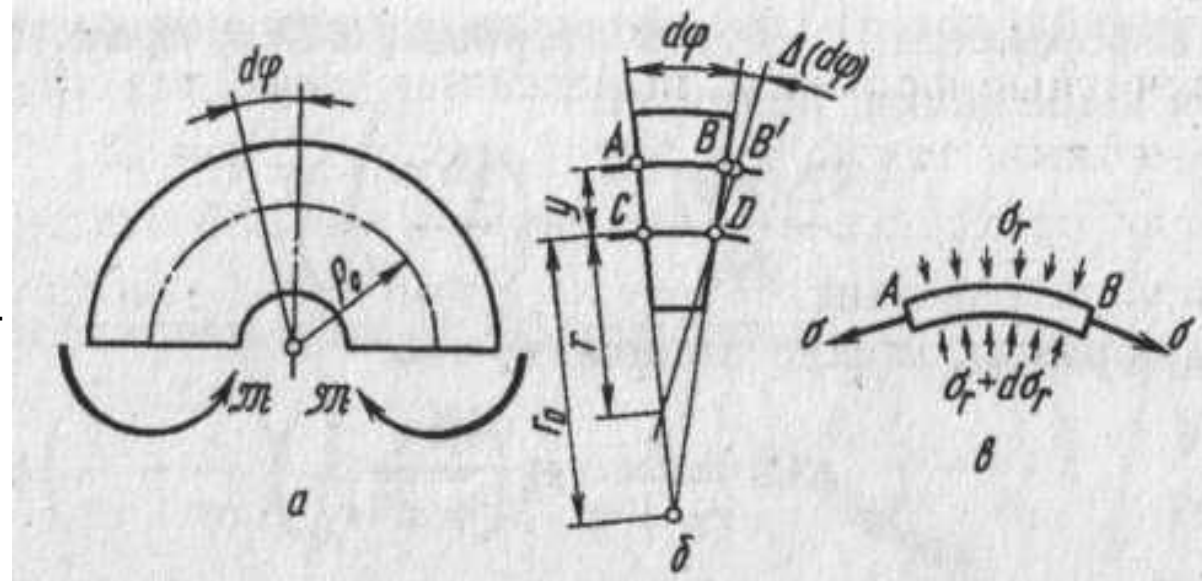
Так же как и для прямого бруса, можно показать, что множество точек, образующих до изгиба поперечное сечение бруса, после изгиба также образует плоское сечение, но повернутое в пространстве. Иными словами, поперечные сечения бруса большой кривизны при чистом изгибе остаются плоскими.

Выделим из кривого бруса двумя близкими нормальными сечениями элементарный участок. При изгибе смежные сечения повернутся одно относительно другого на угол $\Delta(d\varphi)$, и в слоях бруса возникнут некоторые удлинения.



Введем необходимые обозначения. Через ρ_0 обозначим радиус кривизны оси бруса (линии центров тяжести сечений), а через r_0 - радиус кривизны нейтрального слоя.

Радиус r_0 пока неизвестен.

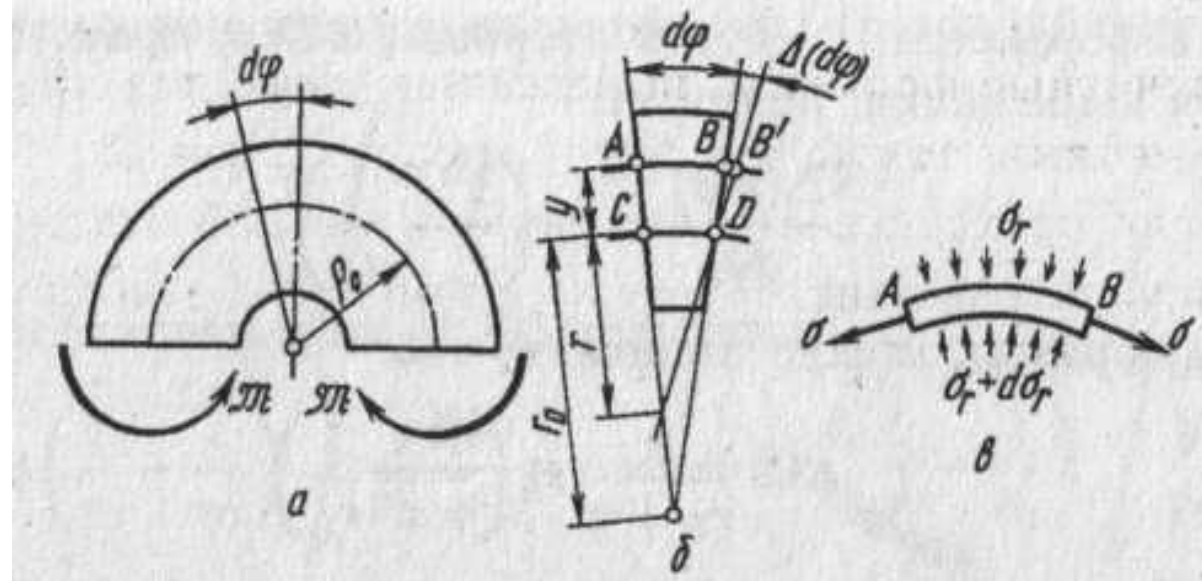


В дальнейшем мы увидим, что r_0 всегда меньше ρ_0 и нейтральная линия для бруса большой кривизны смещена относительно центра тяжести в сторону центра кривизны. Ординату y будем отсчитывать от нейтральной линии.

Удлинение слоя AB равно:
$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{y \cdot \Delta(d\varphi)}{(r_0 + y) \cdot d\varphi}$$

Здесь предполагается, что в процессе изгиба бруса y не меняется. Однако, строго говоря, это не так. Если рассмотреть условия равновесия элементарной полоски AB (см. рис. в), станет очевидным, что между соседними волокнами должно существовать взаимодействие в виде сил, направленных по радиусу, в результате чего форма поперечного сечения бруса меняется и размер y не остается прежним. Для сплошных сечений это изменение несущественно. Для тонкостенного же бруса радиальные перемещения волокон довольно велики и могут коренным образом изменить картину распределения напряжений в сечении.

Отношение $\Delta(d\varphi)/d\varphi$ пропорционально изменению кривизны бруса. Из рис. видно, что с одной стороны $CD = (d\varphi + \Delta(d\varphi)) \cdot r$, где r - радиус кривизны нейтрального слоя после деформации; с другой стороны, $CD = r_0 \cdot d\varphi$.



Приравнивая эти выражения, получаем:

$$\frac{\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Таким образом, можно написать, что

$$\varepsilon = \frac{y}{r_0 + y} \cdot r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

и, далее, $\sigma = E \cdot \frac{y}{r_0 + y} \cdot r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$

В полученных выражениях наглядно проявляется основная особенность бруса большой кривизны: размеры поперечного сечения соизмеримы с радиусом r_0 , поэтому величина y , стоящая в знаменателе, имеет существенное значение и напряжения по высоте сечения распределяются нелинейно.

Для бруса малой кривизны размер y по сравнению с r_0 мал и зависимость упрощается

$$\sigma = E \cdot y \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

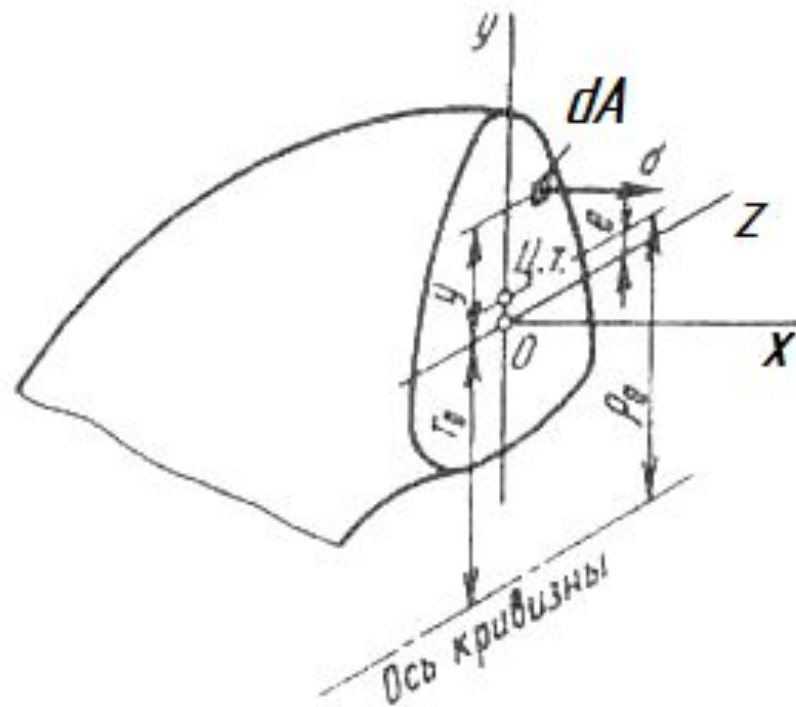
При $1/r_0 = 0$ это выражение принимает вид уравнения для прямой балки.

Будем полагать для простоты, что сечение бруса симметрично относительно плоскости кривизны. Тогда ось y в сечении является осью симметрии и момент элементарных сил $\sigma \cdot dA$ относительно этой оси равен нулю. Напишем теперь выражения для нормальной силы N и изгибающего момента M :

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \quad M = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA$$

После подстановки σ получаем:

$$N = E \cdot r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int_A \frac{y \cdot dA}{r_0 + y}; \quad M = E \cdot r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \cdot \int_A \frac{y^2 \cdot dA}{r_0 + y}$$



Так как нормальная сила равна нулю, то
$$\int_A \frac{y \cdot dA}{r_0 + y} = 0$$

Выражение для M преобразуем, разбивая входящий в него интеграл на два слагаемых:

$$M = E \cdot r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \cdot \left[\int_A y \cdot dA - r_0 \int_A \frac{y \cdot dA}{r_0 + y} \right]$$

Первое слагаемое представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной линии и равно произведению $A \cdot e$, где e - расстояние от нейтральной линии до центра тяжести, $e = \rho_0 - r_0$

Второе слагаемое, как показано выше, равно нулю. Таким образом:

$$M = E \cdot r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \cdot A \cdot e$$

Исключив при помощи полученного соотношения разность $(1/r - 1/r_0)$

из выражения

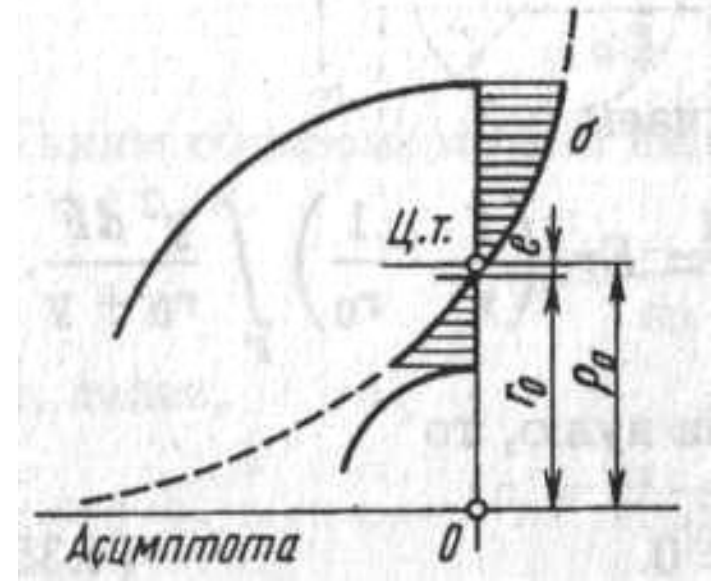
$$\sigma = E \cdot \frac{y}{r_0 + y} \cdot r_0 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

получим следующую расчетную формулу для определения нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r_0 + y}$$

$$\sigma = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r_0 + y}$$

Напряжения, как видим, меняются по высоте сечения нелинейно. Эпюра напряжений представляет собой гиперболу, одна из асимптот которой совпадает с осью кривизны. В зависимости от формы сечения наибольшие напряжения могут иметь место как в верхней, так и в нижней точке сечения.



Для того чтобы пользоваться данной формулой, необходимо определить r_0 . Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_A \frac{y \cdot dA}{r_0 + y} = 0$$

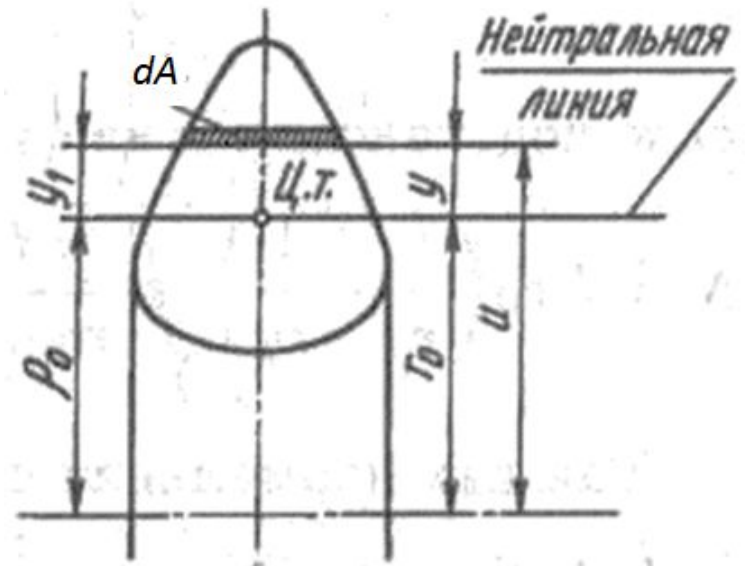
Введем новую переменную $u = r_0 + y$.

Тогда выражение примет вид

$$\int_A \frac{u - r_0}{u} \cdot dF = 0$$

откуда

$$r_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}}$$



$$r_0 = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}}$$

Интеграл, стоящий в знаменателе, представляет собой геометрическую характеристику сечения, такую же, как, например, статический момент или момент инерции.

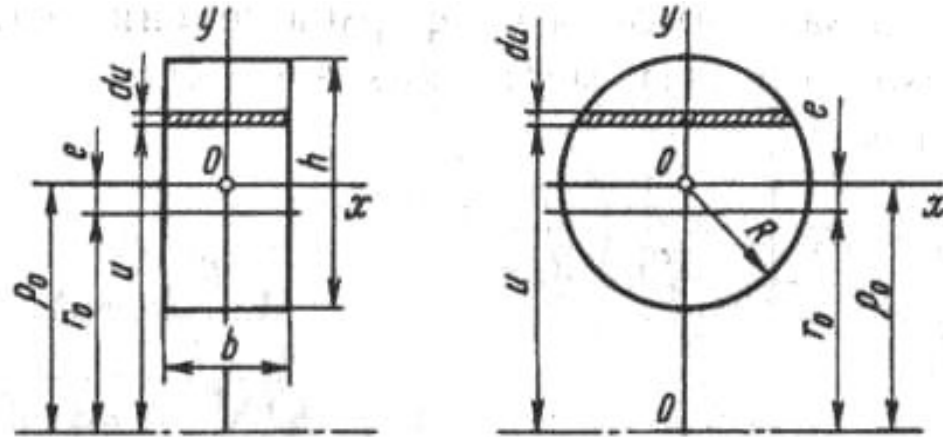
Для прямоугольника (рис. а) имеем:

$$\int_A \frac{dA}{u} = b \cdot \int_{\rho_0 - h/2}^{\rho_0 + h/2} \frac{du}{u} = b \cdot \ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}$$

$$r_0 = \frac{b \cdot h}{b \cdot \ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}} = \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}}$$

Смещение нейтральной линии относительно центра тяжести:

$$e = \frac{\rho_0 \cdot h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}}$$



Аналогично для круга

$$e = \frac{1}{2} \left(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - R^2} \right)$$