Разбор задач
30 октября 2011 года

Санкт-Петербург

Задача А
Летопись

- Автор задачи – Виталий Аксёнов
- Условие – Алексей Цыпленков
- Подготовка тестов – Демид Кучеренко
- Разбор – Алексей Цыпленков

Постановка задачи

- Даны числа вида aa, bb и cc
- Вывести все различные перестановки этих чисел, соответствующие реальным датам

Как решать?

- Всего существует 6 перестановок из aa, bb и cc
- Каждую перестановку проверяем на соответствие реальной дате
- Сохраняем все и выкидываем одинаковые

Подводные камни

- на самом деле перестановки не всегда бывают различными – 01/01/01
- Если получилась дата вида dd/mm/00, значит, что дата соответствует 2100 -невисокосному году

Задача В
Икебана

- Автор задачи – Алексей Цыпленков
- Условие – Алексей Цыпленков
- Подготовка тестов – Павел Кунявский
- Разбор – Павел Кунявский

Постановка задачи

- Есть n ростков бамбука, растущих m - 1 ночь, у которых заданы изначальная высота и скорость роста
- Можно подравнять ростки с i по j до величины T
- Надо сделать минимальное число стрижек, чтобы в день m высота всех ростков была h

Как решать?

- Если все ростки в день m вырастают до величины h, то ответ 0
- Если какой-то росток в день m в любом случае не может достичь величины h, то ответ -1
- Во всех остальных случаях мы можем подстричь бамбук однажды – в последний день до высоты h, то есть ответ 1

Задача С
Номер страницы

Страница 3 из 11

- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Ульяна Зотова
- Подготовка тестов – Андрей Комаров
- Разбор – Олег Давыдов

Постановка задачи

- Дана последовательность цифр длины n
- Надо разбить её на 2 части так, чтобы первое число было не больше второго, и оба не начинались с нуля

Как решать?

- Будем последовательно перебирать место разбиения последовательности
- Если длина второй части уже короче, чем длина первой, то это разбиение нам уже не подходит
- Если длины частей равны, то нужно просто сравнить 2 длинных числа
- Если вторая часть “длиннее” и не начинается с 0 – то это разбиение нам подходит

Подводные камни

- Если длина строки 1, то ответ всегда 0
- Если строка начинается с 0, то ответ всегда 0
- Если второе число начинается на 0, то его считать не надо

Задача D
Пизанская башня

- Автор задачи – Андрей Станкевич
- Условие – Андрей Комаров
- Подготовка тестов – Андрей Станкевич
- Разбор – Юрий Петров

Постановка задачи

- Модификация задачи о Ханойской башне
- Изменение: со второго стержня мы можем переложить любое количество дисков сверху на какой-нибудь другой в том же порядке
- Надо найти минимальное количество действий для переноса с первого стержня на третий

Как решать?

- Будем считать динамику dp[from][to][k] – минимальное число действий нужно сделать, чтобы перенести со стержня from на стержень to ровно k дисков
- Если from = 2, то dp[from][to][k] = 1
- Иначе,
  dp[from][to][k] = dp[from][mid][k - 1] + 1 + dp[mid][to][k - 1],
  где mid – не to, и не from

Приблизительное доказательство

- Нам обязательно надо n-1 диск перенести со стержня from, чтобы достать самый большой
- Стержень to перед переносом туда самого большого диска должен быть пустым

Приблизительное доказательство (продолжение)

- Получается, что самый оптимальный способ перенести диски – перенести с from на mid ровно n-1 диск, перенести большой диск на стержень to, а потом опять перенести n-1 диск с mid на to

Задача Е
Печать

- Автор задачи – Георгий Корнеев
- Условие – Алина Дубатовка
- Подготовка тестов – Аксёнов Виталий
- Разбор –Аксёнов Виталий

Постановка задачи

- Есть набор картриджей с параметрами: стоимость и количество страниц, которое может напечатать
- Найти минимальную сумму, которую нужно заплатить, чтобы мы могли распечатать ровно k страниц

Как решать?

- Нам имеет смысл рассматривать не более 200 картриджей
- Картридж, у которого отношение стоимости к количеству напечатанных страниц максимально, имеет номер opt
- Картридж с максимальным количеством страниц имеет номер max

Как решать? (продолжение)

- Выгодно брать картридж opt, до тех пор когда количество страниц не станет меньше $p_{max*}p_{opt}$
- А для количества страниц до $p_{max*}p_{opt}$ решим стандартную задачу о рюкзаке

Обоснование

- Имеет смысл считать только до $p_{max*}p_{opt}$, так как мы можем получить почти все остатки от деления на p_{opt}, не превышая $p_{max*}p_{opt}$. А, значит, этого хватает, чтобы понять, что алгоритм находит самое оптимальное решение.

Задача F Квадродерево

- Автор задачи – Павел Кротков, Михаил Дворкин
- Условие – Павел Кротков
- Подготовка тестов – Аксёнов Виталий
- Разбор – Аксёнов Виталий

Постановка задачи

- Дано квадродерево на таблице из 0 и 1
- Найти минимальное число вершин, которое может остаться, при изменении не более, чем k ячеек

Как решать?

- Посчитаем динамику на полном квадродереве, то есть в каждой вершине посчитаем - какое минимальное количество ячеек нужно изменить, чтобы в квадродереве с корнем в этой вершине было ровно m вершин

Обоснование

- Если таблица имеет размер n*n – то количество вершин в квадродереве $O(n^2)$
- Каждая такая вершина “пересчитывается” за $O(n^4)$
- $T(n) = O(n^4) + 4T(n/4) = O(n^4)$
- Итого: $O(n^4)$ – время работы программы

Задача G
Шпаги

- Автор задачи – Юрий Петров
- Условие – Алина Дубатовка, Андрей Станкевич
- Подготовка тестов – Павел Кротков
- Разбор – Павел Кротков

Постановка задачи

- Дано k чисел
- Построить такое двоичное дерево, что числа, записанные в детях, меньше, чем число, записанное в вершине, не менее, чем на k

Как решать?

- Отсортируем числа в порядке убывания
- У вершины с индексом v – предком будет вершина с индексом [n/2]
- Не очень трудно убедиться, что если не выполняются условия задачи для этого ответа, то ответ равен -1

Задача H
Светофор

- Автор задачи – Виталий Аксёнов
- Условие – Андрей Комаров
- Подготовка тестов – Павел Кунявский
- Разбор – Павел Кунявский

Постановка задачи

- Даны 2 односторонние дороги, по которым машины едут к центру
- У машин есть 3 параметра: дорога, по которой едут, положение в начальный момент времени, скорость
- Надо найти такое разбиение периода светофора, чтобы максимальное число машин, которые одновременно стоят на перекрёстке, было минимально

Как решать?

- Для каждой машины надо найти время, когда она доедет до перекрёстка
- Это время равно максимуму из её времени “без торможения” и из времен приезда машин, которые находятся ближе к перекрёстку

Как решать? (продолжение)

- “Нужные отрезки” – (k(r+g)+g, (k+1)(r+g)) для первой и (k(r+g), k(r+g)+g) для второй прямой
- “Разобьём” время на блоки по x
- Нам нужно найти такое g, что максимум из количества машин на “нужных” отрезках была минимальной
- Каждая машина принадлежит какому-то блоку

Как решать? (продолжение)

- Возьмём все времена по модулю x и отсортируем, а далее воспользуемся методом сканирующей прямой
- Изначально, g = 0
- 2 события:
  - Машина с первой прямой успевает на зелёный
  - Машина со второй прямой теперь не успевает на зелёный

Как решать? (продолжение)

- Для каждой машины мы знаем блок, которому она принадлежит
- При использовании сканирующей количество машин в блоках мы можем поддерживать с помощью дерева отрезков

Задача I
Гири

- Автор задачи – Михаил Дворкин
- Условие – Ульяна Зотова
- Подготовка тестов – Андрей Комаров
- Разбор – Павел Кротков

Постановка задачи

- Разбить числа от 1 до n на 3 группы, суммы чисел в которых равны

Как решать?

- $n <= 4$ и $n \equiv 1 \pmod 3$ – разбить на кучи нельзя
- Если мы умеем разбивать n, то умеем и n + 6
  - n = 5 – {{5}, {1, 4}, {2, 3}}
  - n = 6 – {{1, 6}, {2, 5}, {3, 4}}
  - n = 8 – {{4, 8}, {5, 7}, {1, 2, 3, 6}}
  - n = 9 – {{7, 8}, {6, 9}, {1, 2, 3, 4, 5}}

Спасибо за внимание! Вопросы?

http://neerc.ifmo.ru/school