

# **Динамическое программирование**

# Динамическое программирование

Словосочетание **динамическое программирование** впервые было использовано **в 1940-х годах Р. Беллманом** для описания процесса нахождения решения задачи, где ответ на одну задачу может быть получен только после решения задачи, «предшествующей» ей. Первоначально эта область была основана, как системный анализ и инжиниринг.

Слово «программирование» в словосочетании «динамическое программирование» в действительности к традиционному программированию почти никакого отношения не имеет и происходит от словосочетания «математическое программирование», которое является синонимом слова «оптимизация». Поэтому слово «программа» в данном контексте скорее означает оптимальную последовательность действий для получения решения задачи. К примеру, определенное расписание событий на выставке иногда называют программой. Программа в данном случае понимается как допустимая последовательность событий.

В общем случае мы можем решить задачу, в которой присутствует оптимальная подструктура, проделывая следующие три шага:

- Разбиение задачи на подзадачи меньшего размера.
- Нахождение оптимального решения подзадач рекурсивно, проделывая такой же трехшаговый алгоритм.
- Использование полученного решения подзадач для конструирования решения исходной задачи.

Подзадачи решаются делением их на подзадачи ещё меньшего размера и т. д., пока не приходят к тривиальному случаю задачи, решаемой за константное время (ответ можно сказать сразу). К примеру, если нам нужно найти

## Недостаток рекурсии:

Простой рекурсивный подход будет расходовать время на вычисление решение для задач, которые он уже решал.

## Что делать?

Чтобы избежать такого хода событий мы будем сохранять решения подзадач, которые мы уже решали, и когда нам снова потребуется решение подзадачи, мы вместо того, чтобы вычислять его заново, просто достанем его из памяти. Этот подход называется кэшированием.

# Пример 1. Числа Фибоначчи

**//рекурсивный вариант**

```
int fib (int n) {  
    if (n <= 1)  
        return 1;  
    return fib(n - 2) + fib(n - 1);  
}
```

**//дп**

```
int i;  
int fib_num[1000] = {1, 1};  
for (i = 2; i < 1000; i++)  
    fib_num [i] = fib_num [i - 2] + fib_num [i - 1];
```

*Динамическим программированием* называется способ программирования, при котором

- задача разбивается на *подзадачи*,
- вычисление идет от малых подзадач к большим,
- ответы подзадач запоминаются в таблице и используются при решении больших задач.

Необходимо определить исходные данные задачи – **параметры**.

Например, при нахождении суммы некоторого набора чисел параметрами задачи будут количество чисел и их значения.

Тогда задача может быть формализована в виде некоторой функции, аргументами которой могут являться количество параметров и их значения.

Под **подзадачей** понимается та же постановка задачи, но с меньшим числом параметров или с тем же числом параметров, но при этом хотя бы один из параметров имеет меньшее значение.

*Преимущество метода* состоит в том, что если подзадача решена, то ее ответ где-то хранится и никогда **не вычисляется** заново.

Сведение решения задачи к решению некоторых подзадач может быть записано в виде **соотношений**, в которых значение функции, соответствующей исходной задаче, выражается через значения функций, соответствующих подзадачам.

Значения аргументов у любой из функций в правой части соотношения меньше значения аргументов функции в левой части соотношения. Если аргументов несколько, то достаточно уменьшения одного из них.

Динамическое программирование может быть применено к задачам **оптимизации**, когда требуется найти оптимальное решение, при котором значение какого-то параметра будет мин. или макс. в зависимости от постановки задачи.

Обычно требуется описать оптимальное решение, выписать рекуррентные соотношения, связывающие оптимальные значения параметра для подзадач, двигаясь снизу вверх, вычислить оптимальные решения для подзадач и используя их построить оптимальное решение для поставленной задачи.

Отметим, что для динамического программирования характерно, что зачастую решается не заданная задача, а более общая, при этом решение исходной задачи является частным случаем решения более общей задачи.

**Пример 2.** Найти количество последовательностей длины  $N$  из нулей и единиц, не содержащих двух единиц подряд.

Пусть  $seq[k]$  – количество последовательностей длины  $k$  из нулей и единиц, не содержащих двух единиц подряд.

$$k = 0 \quad seq[k] = 0$$

$$k = 1 \quad seq[k] = 2 \quad 1, 0$$

$$k = 2 \quad seq[k] = 3 \quad 00, 01, 10$$

Пусть мы знаем решение для всех  $i < k$ , тогда посчитаем  $seq[k]$ .

Чтобы получить последовательность длины  $k$  из последовательности длины  $k - 1$ , нужно в конец дописать либо 0 либо 1.

Дописываем 0:  $seq[k] = seq[k - 1]$

Дописываем 1:  $seq[k] = seq[k - 2]$ , т.к. в конце должно быть только ...01


$$seq[k] = seq[k - 1] + seq[k - 2]$$

# Пример 3. Сумма квадратов

На какое минимальное количество квадратов можно разложить число  $n$ ?

Пусть  $sq[k]$  – минимальное количество квадратов, на которые можно разложить число  $k$ .

$$k = 0 \quad sq[k] = 0$$

$$k = 1 \quad sq[k] = 1 \quad 1 \times 1$$

$$k = 2 \quad sq[k] = 2 \quad 1 \times 1 + 1 \times 1$$

Пусть нам известно решение для всех  $i < k$ , тогда посчитаем  $sq[k]$ .

Предположим, что нам нужно узнать, сколько квадратов будет в разложении  $k$ , если в этом разложении обязательно есть квадрат  $j \times j$ .

$$sq[k] = 1 + sq[k - j \cdot j], \text{ если } j \cdot j \leq k$$

# Пример 3. Сумма квадратов, продолжение

```
dp[0] = 0;
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    dp[i] = INT_MAX;
    for (int j = 1; j * j <= i; j++) {
        dp[i] = min(dp[i], dp[i - j*j] + 1);
    }
}
```

dp == [0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 1, 2, 2 ...]

## Пример 4. Рюкзак 1

Имеется  $n$  неделимых предметов, вес  $i$ -го предмета есть  $w_i$ .

Определить, существует ли набор предметов, суммарный вес которого равен  $W$  килограммам.

Если такой набор существует, то определить список предметов в наборе.

Обозначим через  $T(n, W)$  функцию, значение которой равно 1, если искомый набор имеется, и равно 0, если набора нет. Аргументами функции будут количество предметов  $n$ , по которому можно определить вес каждого предмета, и суммарный вес набора  $W$ .

Определим подзадачи, решением которых будут функции  $T(i, j)$ , где

$i$  обозначает количество начальных предметов,  $j$  – требуемый суммарный вес, где  $0 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq W$ .

Определим начальные значения функции  $T$ :

$T(0, j) = 0$  при  $j \geq 1$  (нельзя без предметов набрать массу  $j > 0$ ),

$T(i, 0) = 1$  при  $i \geq 1$  (всегда можно набрать вес, равный 0).

Для решения подзадачи, соответствующей функции  $T(i, j)$ , рассмотрим два случая.

1)  $i$ -ый предмет в набор не берется.

Решение задачи с  $i$  предметами сводится к решению задачи с  $i - 1$  предметом:

$$T(i, j) = T(i - 1, j).$$

2)  $i$ -ый предмет в набор берется. Вес оставшихся предметов уменьшается на величину  $w_i$ :

$$T(i, j) = T(i - 1, j - w_i).$$

При этом нужно учитывать, что эта ситуация возможна только тогда,

когда масса  $i$ -го предмета не больше значения  $j$ .

Для оптимального решения из двух возможных вариантов нужно выбрать наилучший. Рекуррентное соотношение при  $i \geq 1$  и  $j \geq 1$ :

$$T(i, j) = T(i - 1, j) \text{ при } j < w_i$$

$$T(i, j) = \max(T(i - 1, j), T(i - 1, j - w_i)) \text{ при } j \geq w_i$$

$$W = 16; w_1 = 4; w_2 = 5; w_3 = 3; w_4 = 7; w_5 = 6.$$

$$W = 16; w_1 = 4; w_2 = 5; w_3 = 3; w_4 = 7; w_5 = 6.$$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Решение нашего примера определяется  $T[5, 16] = 1$ .

$T[5, 16] = T[4, 16]$ , то 5-ый предмет можно в набор не включать.

$T[4, 16] \neq T[3, 16] \rightarrow$  4-ый предмет включается. Оставшаяся масса равна  $16 - w_4 = 16 - 7 = 9$ .

$T[3, 9] = T[2, 9] \rightarrow$  3-ый предмет в набор не включаем.

$T[2, 9] \neq T[1, 9] \rightarrow$  2-ой предмет включается. Оставшаяся масса равна  $9 - w_2 = 9 - 5 = 4$ .

$T[1, 4] \neq T[0, 4] \rightarrow$  1-ой предмет включается, оставшаяся масса равна 0.

## Пример 5. Задача о рюкзаке

Задача состоит в том, чтобы определить наиболее ценную выборку из  $n$  предметов, подлежащих упаковке в рюкзак, имеющий ограничение по весу, равное  $W$  килограмм.

При этом  $i$ -ый предмет характеризуется стоимостью  $c_i$  и весом

$w_i$ .

Итак, необходимо выбрать из этих предметов такой набор, чтобы суммарная масса не превосходила заданной величины

$W$ , а суммарная стоимость была максимальна.

Если перебирать всевозможные подмножества данного набора

из  $n$  предметов, то получится решение сложности не менее чем

$O(2^n)$ .

В настоящее время неизвестен алгоритм решения этой задачи, сложность которого является полиномиальной. Мы рассмотрим алгоритм решения данной задачи для случая, когда все

# Решение

Обозначим через  $T(n, W)$  функцию, значение которой соответствует решению нашей задачи. Аргументами функции является количество предметов  $n$ , по которому можно определить стоимость и массу каждого предмета, и ограничение по весу  $W$ .

Определим подзадачи, решением которых будут функции  $T(i, j)$ , а именно, определим максимальную стоимость предметов, которые можно уложить в рюкзак с ограничением по весу  $j$  килограмм, если можно использовать только первые  $i$  предметов из заданных, где  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq W$ .

Определим начальные значения функции  $T$ :  $T(0, 0) = 0$ ,  
 $T(0, j) = 0$  при  $j \geq 1$  (нет предметов, максимальная стоимость равна 0),

$T(i, 0) = 0$  при  $i \geq 1$  (можно брать любые из первых  $i$  предметов, но ограничение по весу равно 0)

Для решения подзадачи, соответствующей функции  $T(i, j)$ , рассмотрим два случая.

1)  $i$ -ый предмет не упаковывается в рюкзак. Решение задачи с

$i$  предметами сводится к решению задачи с  $i - 1$  предметом:

$$T(i, j) = T(i - 1, j).$$

2)  $i$ -ый предмет упаковывается в рюкзак. Масса оставшихся предметов уменьшается на величину  $w_i$ , а при добавлении  $i$ -го

предмета стоимость выборки увеличивается на  $c_i$ :

$$T(i, j) = T(i - 1, j - w_i) + c_i.$$

При этом нужно учитывать, что эта ситуация возможна только

тогда, когда масса  $i$ -го предмета не больше значения  $j$ .

Для оптимального решения из двух возможных вариантов

упаковки рюкзака нужно выбрать наилучший.

Рекуррентное соотношение при  $i \geq 1$  и  $j \geq 1$ :

$$T(i, j) = T(i - 1, j) \text{ при } j < w_i$$

$$T(i, j) = \max (T(i - 1, j), T(i - 1, j - w_i) + c_i) \text{ при } j \geq w_i$$

$$W = 16,$$

$$c_1 = 5,$$

$$w_1 = 4;$$

$$c_2 = 7,$$

$$w_2 = 5;$$

$$c_3 = 4,$$

$$w_3 = 3;$$

$$c_4 = 9,$$

$$w_4 = 7;$$

$$c_5 = 8,$$

$$w_5 = 6.$$

# Пример

$W = 16,$   
 $c1 = 5,$   
 $w1 = 4;$   
 $c2 = 7,$   
 $w2 = 5;$   
 $c3 = 4,$   
 $w3 = 3;$   
 $c4 = 9,$   
 $w4 = 7;$   
 $c5 = 8,$   
 $w5 = 6.$

i\j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
2	0	0	0	0	5	7	7	7	7	12	12	12	12	12	12	12	12
3	0	0	0	4	5	7	7	9	11	12	12	12	16	16	16	16	16
4	0	0	0	4	5	7	7	9	11	12	13	14	16	16	18	20	21
5	0	0	0	4	5	7	8	9	11	12	13	15	16	17	19	20	21

Решение примера определяется  $T[5, 16] = 21$ .

В примере суммарная масса предметов, подлежащих упаковке в рюкзак, совпадает с  $W$ , в общем-же случае она не должна превосходить величину  $W$ .

## Обратный ход

Требуется определить набор предметов, которые подлежат упаковке в рюкзак.

Сравним значение  $T[n, W]$  со значением  $T[n-1, W]$ .

- 1) Если  $T[n, W] \neq T[n-1, W]$ , то предмет с номером  $n$  обязательно упаковывается в рюкзак, после чего переходим к сравнению элементов  $T[n-1, W - w_n]$  и  $T[n-2, W - w_n]$  и т.д.
- 2) Если  $T[n, W] = T[n-1, W]$ , то  $n$ -ый предмет можно не упаковывать в рюкзак. В этом случае следует перейти к рассмотрению элементов  $T[n-1, W]$  и  $T[n-2, W]$ .

## Пример

В примере  $T[5, 16] = T[4, 16]$ , поэтому 5-ый предмет в рюкзак не упаковывается. Переходим к сравнению элементов таблицы  $T[4, 16]$  и  $T[3, 16]$ . Их значения не равны, следовательно,

четвертый предмет должен быть включен в искомый набор, а ограничение на вес становится равным  $16 - w_4 = 16 - 7 = 9$ .

Далее сравним элементы  $T[3, 9]$  и  $T[2, 9]$ , они равны, поэтому третий предмет в рюкзак не упаковывается и сравниваем  $T[2, 9]$  и

$T[1, 9]$ , они не совпадают, следовательно, второй предмет должен

быть взят в рюкзак, а ограничение на вес становится равным  $9 - w_2 = 9 - 5 = 4$ .

И наконец сравниваем элементы  $T[1, 4]$  и  $T[0, 4]$ , они не равны,

поэтому второй предмет включатся в искомый набор, при этом,

```

void Print_item(int i, int j)
{
    if (T[i][j]==0)    //максимальный рюкзак для параметров
        return;      //имеет нулевую ценность
    else if (T[i-1][j] == T[i][j])
        Print_item (i-1,j); //можно составить
        // рюкзак без i-го предмета
    else {
        Print_item(i-1,j-w[i]); //Предмет i
        //упаковывается в рюкзак
        Printf("%d ", i); // печать i-го предмета
    }
}
}

```

В программе нужно вызвать функцию `Print_item` с параметрами  $(n, W)$  .

Заметим, что рассуждения были приведены для случая, когда все предметы различны. Самостоятельно рассмотрите, какие изменения будут внесены в таблицу в противном случае.

## Пример 6. Задача "Divisibility" 1999-2000 ACM NEERC (подключена в системе тестирования NSUTS в школьных тренировках)

Рассмотрим произвольную последовательность целых чисел. Можно поставить знаки операций  $+$  или  $-$  между целыми в данной последовательности, получая при этом различные арифметические выражения, которые при их вычислении имеют различные значения. Давайте, например, возьмем следующую последовательность: **17, 5, -21, 15**. Из нее можно получить восемь различных выражений:

$$17+5+-21+15= 1 \quad 17-5+-21+15=6$$

$$17+5+-21-15=-14 \quad 17+5--21+15=58$$

$$17+5--21-15= 28 \quad 17-5+-21-15=-24$$

$$17-5--21+15= 48 \quad 17-5--21-15=18$$

Назовем последовательность **делимой** на  $K$ , если можно так расставить операции  $+$  или  $-$  между целыми в последовательности, что значение полученного выражения делилось бы нацело на  $K$ . В приведенном выше примере последовательность делима на **7** ( $17+5+-21-15=-14$ ), но не делима на **5**.

Напишите программу, которая определяет делимость последовательности целых чисел.

# Решение

Если число  $N$  делится на некоторое число  $K$ , то остаток от деления  $N$  на  $K$  равен 0.

Остаток от деления суммы чисел на некоторое число равен остатку от деления суммы остатков от деления каждого числа на это число.

$$(a + b) \bmod c == (a \bmod c + b \bmod c) \bmod c$$

## Пример 7. Задача "Gangsters" (подключена в системе тестирования NSUTS в школьных тренировках)

- $N$  гангстеров идут в ресторан.  $i$ -ый гангстер заходит в  $T_i$ -е время и имеет при себе  $P_i$  денег. Дверь ресторана имеет  $k+1$  стадий открытия, выраженных в целых числах от 0 до  $k$ . Состояние открытия может измениться на 1 в единицу времени, т.е. либо открыться на 1, либо закрыться на 1, либо остаться прежним. В начальный момент состояние двери закрытое = 0.
- $i$ -тый гангстер может войти в ресторан, если дверь открыта специально для него, т.е. состояние двери совпадает с шириной его плеч  $S_i$ . Если в момент времени, когда гангстер подошел к ресторану, состояние открытия двери не совпадает с шириной его плеч, то он уходит и никогда не возвращается. ресторан работает в интервале времени  $[0, T]$ .
- Цель: собрать в ресторане гангстеров с максимальным количеством денег.

# Гангстеры , продолжение

первая строка входного файла содержит значения  $N$ ,  $K$  и  $T$ , разделенные пробелами ( $1 \leq N \leq 100$ ,  $1 \leq K \leq 100$ ,  $0 \leq T \leq 30000$ ); вторая строка содержит моменты времени, в которые гангстеры подходят к ресторану  $T_1, T_2, \dots, T_N$ , разделенные пробелами ( $0 \leq T_i \leq T$  для  $i = 1, 2, \dots, N$ ); в третьей строке записаны суммы денег каждого гангстера  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , разделенные пробелами ( $0 \leq P_i \leq 300$ , для  $i = 1, 2, \dots, N$ ); четвертая строка содержит значения ширины плеч каждого гангстера, разделенные пробелами ( $0 \leq S_i \leq K$  для  $i = 1, 2, \dots, N$ ). Все значения целые.

**Выходные данные:** В выходной файл выдать одно целое число — максимальное значение достатка всех гангстеров, собранных в ресторане. Если ни один гангстер не может попасть в ресторан, выдать 0.

## Пример 1

Вход:           Выход:

4 10 20        26

10 16 8 16

10 11 15 1

10 7 1 8

## Пример 2

Вход:           Выход:

2 17 100       0

5 0

50 33

6 1

# Пример

t = 1 2 3 4 5 6

S = 1 2 3 4 5 1

L P = 1 1 1 1 1 100

↓ — состояние двери

4					4	5	5
3				3	3	4	5
2			2	2	3	3	4
1		1	1	2	2	3	103
0	0	0	1	1	2	2	3
0	0	1	2	3	4	5	6

← гангстеры

$$m_{i,j} = \max \{ [m_{i-1,j-1}, m_{i-1,j}, m_{i-1,j+1}] + f_i \}$$

где

$$f_i = \begin{cases} p_i & \text{если } L = s_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

## Пример 8. Алгоритм Ахо

Пусть даны две строки  $S_1$  и  $S_2$ . Необходимо за минимальное число *допустимых* операций преобразовать строку  $S_1$  в строку

$S_2$ . Допустимой операцией являются следующие операции удаления символа из строки и вставки символа в строку:

$DEL(S, i)$  – удалить  $i$ -ый элемент строки  $S$ ;

$INS(S, i, c)$  – вставить символ  $c$  после  $i$ -го элемента строки  $S$ .

Обозначим через  $S [i..j]$  – подстроку от  $i$ -го символа до  $j$ -го.

Пусть  $M(i, j)$  – минимальное количество операций, которые требуются, чтобы преобразовать начальные  $i$  символов строки

$S_1$  в начальные  $j$  символов строки  $S_2$ :  $S_1[0..i] \rightarrow S_2[0..j]$ .

$S_1[0..0]$  и  $S_2[0..0]$  – пустые строки.

Заметим, что для преобразования пустой строки в строку длины  $j$

требуется  $j$  операций вставки, т.е.  $M(0, j) = j$ .

Аналогично для преобразования строки длины  $i$  в пустую строку

требуется  $i$  операций удаления, т.е.  $M(i, 0) = i$ .

Пусть мы решили подзадачу с параметрами  $i-1$  и  $j-1$ . Это означает, что из строки  $S_1[0..i-1]$  построена строка  $S_2[0..j-1]$  за минимальное число допустимых операций  $M(i-1, j-1)$ .

I) Пусть  $S_1[i] = S_2[j]$ . Тогда для получения строки  $S_2[0..j]$  из строки  $S_1[0..i]$  не требуется никаких дополнительных операций.

Следовательно,  $M(i, j) = M(i-1, j-1)$ .

II) Пусть  $S_1[i] \neq S_2[j]$ . Возможны два способа получения строки  $S_2[0..j]$ .

1. Пусть из строки  $S_1[0..i-1]$  построена строка  $S_2[0..j]$  за минимальное количество операций  $M(i-1, j)$ . Тогда для получения строки  $S_2[0..j]$  из строки  $S_1[0..i]$  требуется удалить  $i$ -ый символ из строки  $S_1$ .

2. Пусть из строки  $S_1[0..i]$  построена строка  $S_2[0..j-1]$  за минимальное количество операций  $M(i, j-1)$ . Тогда для получения строки  $S_2[0..j]$  из строки  $S_1[0..i]$  потребуется одна операция вставки  $i$ -го символа строки  $S_1$  после символа  $S_2[j-1]$ .

Из 2-х возможностей нужно выбрать лучшую.

Получим следующие рекуррентные соотношения:

$$M(0, j) = j; \quad M(i, 0) = i;$$

$$M(i, j) = \min(M(i-1, j-1), M(i-1, j) + 1, M(i, j-1) + 1),$$

$$\text{если } S_1[i] = S_2[j];$$

$$M(i, j) = \min(M(i-1, j), M(i, j-1)) + 1,$$

$$\text{если } S_1[i] \neq S_2[j];$$

Решением задачи будет значение  $M(m, n)$ ,

где  $m$  — длина строки  $S_1$ , а  $n$  — длина строки  $S_2$ .

## Пример

$$S_1 = "abc", S_2 = "aabddc"$$

Построим таблицу  $M$ , нумерация строк и столбцов которой начинается с нуля

и элементами которой будут числа, равные значениям функции, описанной

выше.

	-1	0	1	2	3
<i>c</i>	6	5	4	4	<b>3</b>
<i>d</i>	5	4	4	3	4
<i>d</i>	4	3	3	2	3
<i>b</i>	3	2	2	1	2
<i>a</i>	2	1	1	2	3
<i>a</i>	1	0	0	1	2
	0	1	1	2	3
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	

## Обратный ход

$M[1,3] = 2$ , означает, что из строки “ $a$ ” можно получить строку “ $aab$ ”, используя две допустимых операции. В примере за три допустимых операции можно преобразовать строку  $S_1$  в  $S_2$ . Для определения операций нужно встать на последний символ строки  $S_1$  и начать движение по таблице от правого верхнего угла. В примере движение начнется с ячейки  $M[3,6]$ .

Находясь в ячейке  $M[i, j]$ , будем рассматривать два случая.

1) Если  $M[-1, i] = M[j, -1]$ , то будем сдвигаться по диагонали влево-вниз, попадая в ячейку  $M[i-1, j-1]$ . При этом будем перемещаться по строке  $S_1$  на

один символ влево, т.е. сделаем текущим в строке символ, находящийся в  $i-1$

позиции.

2) Если  $M[-1, i] \neq M[j, -1]$ , то будем сдвигаться по таблице на одну позицию

либо влево, попадая в ячейку  $M[i, j-1]$ , либо вниз в ячейку  $M[i-1, j]$ . Этот выбор будет зависеть от того, какой из элементов, находящихся в этих ячейках, меньше. При движении влево будем удалять  $i$ -ый символ в строке

$S_1$ , перемещаясь на один символ влево. При движении вниз будем

## Последовательность действий для примера

Изначально текущим в строке  $S_1$  является последний символ –

символ  $c$ . Так как  $M[-1, 3] = M[6, -1]$ , то осуществляем переход

в ячейку  $M[5, 2]$  и текущим в  $S_1$  становится предпоследний символ –  $b$ . Далее, так как  $M[-1, 2] \neq M[5, -1]$ , передвигаемся в

ячейку  $M[4, 2]$ . При этом вставим после текущего символа  $b$  символ  $S_2[5] = d$  ( $j=5$ ). Продолжая этот процесс вставим символ

$S_2[4] = d$ , затем в строке  $S_1$  сделаем текущим символ  $a$ , вставим в

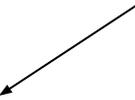
строку  $S_1$  символ  $a$ . Процесс продолжается до тех пор, пока не

достигнем ячейки  $M[0,0]$ .

Для нашего примера последовательность операций будет

Отметим, что решений в данной задаче может быть несколько.

Движение по таблице представлено ниже.

	вниз по $i$ -му столбцу из $j$ -ой строки в $j-1$ -ю	$INS(S_1, i, S_2[j])$	вставка после $i$ -й позиции в $S_1$ символа $S_2[j]$
	движение влево по $j$ -й строке из $i$ -го столбца в $i-1$ -й	$DEL(S_1, i)$	удаление $i$ -го символа в $S_1$ и передвижение на $i-1$ -ю позицию
	движение по диагонали влево вниз		перемещение текущей позиции в $S_1$ на один символ влево

# Задача о телефонном номере

(подключена в системе тестирования NSUTS в школьных тренировках)

Если вы обратили внимание, то клавиатура многих телефонов выглядит как показано → Использование изображенных на клавишах букв позволяет представить номер телефона в виде легко запоминающихся слов. Многие фирмы пользуются этим и стараются подобрать себе номер телефона так, чтобы он содержал как можно больше букв из имени фирмы.

1	2 ABC	3 DEF
4 GHI	5 JKL	6 MNO
7 PRS	8 TUV	9 WXYZ
	0 OQZ	

Напишите программу, которая преобразует исходный цифровой номер телефона

в соответствующую последовательность букв и цифр, содержащую как можно

больше символов из названия фирмы. При этом буквы из названия фирмы должны быть указаны в полученном номере в той же последовательности, в которой они встречаются в названии фирмы. Например, если фирма называется

*IBM*, а исходный номер телефона — **246**, то замена его на ***BIM*** не допустима, тогда как замена его на ***2IM*** или ***B4M*** является правильной.

$S_1 = "IBM"$ ,  $S_2 = "246"$ . При этом, если в  $S_1$  встречаются буквы, которые соответствуют цифрам номера телефона в нужном порядке, то они останутся без изменения.

### ***Формат входных данных:***

Первая строка входного файла содержит название фирмы. Она состоит только из заглавных букв латинского алфавита, количество которых не превышает 80 символов. Вторая строка содержит номер телефона в виде последовательности цифр. Цифр в номере телефона также не более 80.

### ***Формат выходных данных:***

В единственной строке выходного файла должно содержаться число букв из измененного номера.

### ***Пример файла входных данных:***

IBM

246

### ***Пример файла выходных данных:***

2

## Пример 9. Задача о расстановке скобок

Рассмотрим вычисление произведения  $n$  матриц

$$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n. \quad (1)$$

Порядок, в котором матрицы перемножаются, может существенно сказаться на общем числе операций, требуемых для вычисления матрицы  $M$ , независимо от алгоритма, применяемого для умножения матриц.

Умножение матрицы размера  $[p \times q]$  на матрицу размера  $[q \times r]$  требует  $pqr$  операций.

## Пример

Рассмотрим произведение матриц:

$$M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$$
$$[10 \times 20] \quad [20 \times 50] \quad [50 \times 1] \quad [1 \times 100]$$

Если вычислять матрицу  $M$  в порядке:  $M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times M_4))$ ,  
то

потребуется **125 000** операций.

$$(50 * 1 * 100) \rightarrow [50 \times 100], \quad \mathbf{5000};$$

$$(20 * 50 * 100) \rightarrow [20 \times 100], \quad \mathbf{100000};$$

$$(10 * 20 * 100) \rightarrow [10 \times 100], \quad \mathbf{20000}.$$

Вычисление же в порядке:  $(M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4$  требует лишь  
**2 200** операций.

$$(20 * 50 * 1) \rightarrow [20 \times 1], \quad \mathbf{1000};$$

$$(10 * 20 * 1) \rightarrow [10 \times 1], \quad \mathbf{200};$$

$$(10 * 1 * 100) \rightarrow [10 \times 100], \quad \mathbf{1000}.$$

Перебор с целью минимизировать число операций имеет экспоненциальную сложность.

На первом этапе определим за какое минимальное количество операций можно получить матрицу  $M$  из равенства (1).

Будем считать подзадачами вычисление минимального количества операций при перемножении меньшего, чем  $n$ , количества матриц. В качестве параметров рассматриваемой задачи возьмем индексы  $i$  и  $j$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ), обозначающие номера первой и последней матриц в цепочке

$$M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_j.$$

Сначала решим подзадачи, когда  $j = i+1$ , т.е. когда перемножаются

две рядом стоящие матрицы.

Решения – количество затраченных операций, запишем в ячейке таблицы  $T$  с номерами  $(i, j)$ .

$T_{ij}$  – число, равное количеству операций при умножении цепочки матриц  $M_i \times \dots \times M_j$ , где  $1 \leq i \leq j \leq n$ .

Обозначим через  $t_{ij}$  минимальную сложность вычисления цепочки матриц  $M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_j$ , где  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Ее можно получить следующим образом:

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \\ \min_{i \leq k < j} (t_{ik} + t_{k+1, j} + r_{ikj}), & \text{если } j > i \end{cases}$$

Здесь  $t_{ik}$  — минимальная сложность вычисления цепочки

$$M' = M_i \times M_{i+1} \times \dots \times M_k,$$

а  $t_{k+1, j}$  — минимальная сложность вычисления цепочки

$$M'' = M_{k+1} \times M_{k+2} \times \dots \times M_j.$$

Третье слагаемое  $r_{ikj}$  равно сложности умножения  $M'$  на  $M''$ . Утверждается, что  $t_{ij}$  ( $j > i$ ) — наименьшая из сумм этих трех членов по всем возможным значениям  $k$ , лежащим между  $i$  и  $j - 1$ .

Для примера из четырех матриц в таблице будут определены

следующие элементы  $T$ :  $t_{1,2}$ ,  $t_{2,3}$  и  $t_{3,4}$ .

0	10000		
	0	1000	
		0	5000
			0

$$M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$$

$$[10 \times 20] \quad [20 \times 50] \quad [50 \times 1] \quad [1 \times 100]$$

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \\ \min_{i \leq k < j} (t_{ik} + t_{k+1,j} + r_{ikj}), & \text{если } j > i \end{cases}$$

Далее перейдем к решению подзадач с параметрами  $j=i+2$ .

Рассмотрим, например, цепочку матриц  $M_1 \times M_2 \times M_3$ .

Решением этой подзадачи будет минимальное количество операций,

выбранное из двух возможных порядков перемножения матриц:  $(M_1 \times M_2) \times M_3$  и  $M_1 \times (M_2 \times M_3)$ . При этом для выражений в скобках ответы уже записаны в таблице  $T$ . Результат запишем в ячейку  $T_{1,3}$ .

Затем перейдем к решению подзадач с параметрами  $j=i+3$  и т.д.

Итак,  $t_{ij}$  вычисляются в порядке возрастания разностей нижних

индексов. Процесс начинается с вычисления  $t_{ij}$  для всех  $i$ , затем

$t_{i,i+1}$  для всех  $i$ , потом  $t_{i,i+2}$  и т. д. При этом  $t_{ik}$  и  $t_{k+1,j}$  будут уже вычислены, когда мы приступим к вычислению  $t_{ij}$ .

Оценка сложности данного алгоритма есть  $O(n^3)$ .

В результате работы алгоритма для примера из четырех матриц

будет построена следующая таблица  $T$ :

Порядок, в котором можно произвести эти умножения, легко определить, приписав каждой клетке то значение  $k$ , на котором достигается минимум.

0	10000	1200	2200
	0	1000	3000
		0	5000
			0

# Алгоритм

```
for (i=0; i<n; i++)    mi,i = 0;
for (l=1; l<n; l++)
  for (i=0; i<n; i++) {
    j = i + l;
    for (k = 0; k < j; k++)
      mij = min(mi,k + mk+1,j + ri-1*rk* rj)
  }
```

$r_{i-1}$  – количество строк в  $M'$

$r_k$  – количество столбцов в  $M'$

$r_j$  – количество столбцов в  $M''$

# Упражнение

Задана строка, состоящая из вещественных чисел,  
разделенных  
арифметическими операциями.

Требуется расставить в строке скобки таким образом,  
чтобы  
значение полученного выражения было максимальным.