Математический анализ (ю)

Лекция -1

Введение

- Математика зародилась в глубокой древности и к настоящему времени проникла во многие сферы человеческий деятельности. Математические методы давно и успешно используются в таких точных науках как механика, физика, астрономия и находят широкое применение в технике.

- Со второй половины XX в. приложения математики начали интенсивно внедряться в химию, биологию, медицину, психологию, лингвистику, социологию и другие гуманитарные науки. Стали привычными сочетания слов “математическая экономика”, “математическая биология”, “математическая лингвистика”. <u>Поэтому современный инженер немыслим без прочного и всестороннего союза с математикой.</u>

Введение

- В чем же суть **инженерной математики** ?

  В общих чертах ее суть проявляется в практических приложениях математики. Например, для конкретного физического объекта или явления строят абстрактный геометрический образ и/или определенное логическое соотношение и далее подбирают готовую **модель** в виде уравнений и формул, затем средствами **математического аппарата** анализируют ее.

- Результаты анализа проверяют с реальностью и в случае расхождения уточняют модель или создают новую. В то же время математическое моделирование позволяет не только рассчитывать параметры реальных объектов, но и делать открытия в реальной действительности.

  Например, в астрономии Леверье в 1846 г. открыл – предсказал – планету Нептун по рассчитанным отклонениям планеты Уран. Аналогично в 1930 г. открыли планету Плутон

Введение

Основным инструментом процесса математического анализа является умение логически мыслить.

- **<u>Логика</u>** – наука о способах доказательств и опровержений; совокупность научных теорий, в каждой из которых рассматриваются определенные способы **доказательств** и **опровержений**.

- Для математики характерно использование системы символов, являющаяся аппаратом формальной логики. Формальная или символическая логика – специальный метод познания, формирующий структуру нашего мышления. Так запись логичных рассуждений в символах придает доказательствам более краткий и простой вид. Выстраивая цепь таких рассуждений, формальная логика оперирует определенными **высказываниями** (это наша речь). В этом случае **<u>высказывание</u>** – предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, что оно **<u>истинно</u>** или **<u>ложно</u>**.

<u>Пример</u>: выражения “Москва – столица России”, “Петров И.И. – студент МГТУ”, или выражения типа $x^2 + y^2 = 1, \quad x \in \Re$ или $2 < 1/2$ — высказывания - истинное и ложное, а выражение $x^2 - 2x + y^2$ – не является высказыванием.

В математических формулировках определений, теорем и т. п. часто повторяются отдельные слова и целые выражения. Поэтому при их записи полезно использовать <u>формальную символику</u>.

- Укажем лишь несколько самых простых символов :

: – так, что; ¬ – отрицание;
$\forall$ – любой; $\Rightarrow$ – следует, выполняется;
$\exists$ – существует; $\Leftrightarrow$ – тогда и только тогда;
! – единственный; &, $\wedge$ – и;
$\vee$ – или; ~ – эквивалентно.
$\in$, $\notin$ – символы принадлежности или <u>не принадлежности</u>
$A \subset B$ или $B \supset A$ ($\subset$, $\supset$ - знаки включения для множеств)

Теорема

- Логические символы и кванторы общности широко используются в математике при записи предложений, выражающих мысли и представляющих собой свойства математических объектов. Однако следует отметить, что часть предложений приходится выражать словами. К ним относятся такие понятия как теорема. В общем случае любая **теорема** состоит в задании некоторого свойства ***A*** , называемого ***условием***, из которого выводят свойство ***B*** , называемого ***заключением***

- В отличие от теоремы **аксиома** – утверждение, истинность которого принимается (в основном, на основе практики).

- <u>**Множество**</u>

  понятие **множество** принадлежит к числу основных математических понятий. Оно строго не определено, но может быть пояснено на <u>примерах</u>:

  множество учащихся одного выпуска, множество всех книг, составляющих данную библиотеку, множество всех точек данного отрезка прямой, множество всех решений данного уравнения и т.д.

- **Множество** будем обозначать заглавными буквами ***A***, ***B*** , ***C***, …, ***X***, ***У***, ***Z*** , а их **элементы** – прописными ***a*** , ***b*** , ***c*** , …, ***x*** , ***y*** , ***z*** ; ***x*** является элементом множества ***E*** обозначают $x \in E$. Запись $x \notin E$ означает, что ***x*** не принадлежит множеству ***E*** Два множества E_1 и E_2 называют равными $E_1 = E_2$, если они состоят из одних и тех же элементов.

  Множество можно задавать перечислением элементов:

  A = {1, 2, 3, 5}.

Действительные числа

Что такое число известно каждому, но непонятно лишь специалис
Число – одна из основных математических абстракций, которой в
времена были посвящены многочисленные исследования ученых.

Аксиома полноты (непрерывности) множества $\mathbb{R}$

Всякое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет единственную точную верхнюю грань $\sup X \in \mathbb{R}$

Всякое непустое ограниченное снизу множество $Y \subset \mathbb{R}$ имеет единственную точную нижнюю грань $\inf Y \in \mathbb{R}$.

Числовая ось – геометрическая реализация множества $\mathbb{R}$

(a, b) – интервал, $[a, b]$ – отрезок (сегмент).

Определение : всякий интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, называются ее окрестностью – обозначение $O(x)$.

Определение : если $\varepsilon > 0$, то интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки $x \in \mathbb{R}$ – обозначение $O_\varepsilon(x)$.

Действительные числа

Действительные (вещественные) числа образуют множество элементов с определенными свойствами:

Свойства **упорядочности**, определяемое соотношениями между элементами – $a < b$, $a = b$ или $a > b$; при этом, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ – свойство **транзитивность** упорядочности.

1. натуральные числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – невыполнимо вычитание
2. целые числа $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – невыполнимо деление
3. рациональные числа $\mathbb{Q} = \{\mathbf{p/q}\}$, $\mathbf{p, q \in Z}$ – невыполнимо извлечение корня из положительных чисел
4. вещественные числа $\mathbb{R}$ – невыполнимо извлечение корня из отрицательного числа.
5. комплексные числа $\mathbb{C}$ – выполнимы все операции

__Элементарная математика__ –

- несколько неопределённое понятие, охватывающее совокупность таких разделов, задач и методов математики, в которых пользуются общими понятиями переменной функции, предела и т.п.
- Иначе **Э.м.** пользуется теми общими понятиями (абстракциями) , которые сложились до появления математического анализа;
- **Э.м.** продолжает развиваться и теперь и в ней появляются новые результаты, но всё же это происходит в рамках __тех же понятий__

Функции

Определение

Отображением $\mathbf{f}$ множества X в множество Y, или **функцией**, определенной на множестве X со значениями в множестве Y, называют **соответствие**, которое каждому элементу $x \in X$ соотносит некоторый единственный элемент $y \in Y$.

Множество Y называют **областью определения функции**, элемент

$x \in X$ - **аргументом функции**, а элемент $y \in Y$ - **зависимым переменным**. **Областью значений функции f** называют множество

$$f(X)=\{y\in Y : y = f(x)\ \forall x\in X\}.$$

Понятие функции состоит из трех неотъемлемых частей :

1) области определения X;
2) множества Y, содержащего значения функции;
3) правила **f**, которое для каждого элемента $x \in X$ задает единственный элемент $y = \mathbf{f}(x) \in Y$.

Правило, задающее отображение $\mathbf{f} : X \to Y$ (или функцию f), можно условно изобразить стрелками (рис. 2.1).

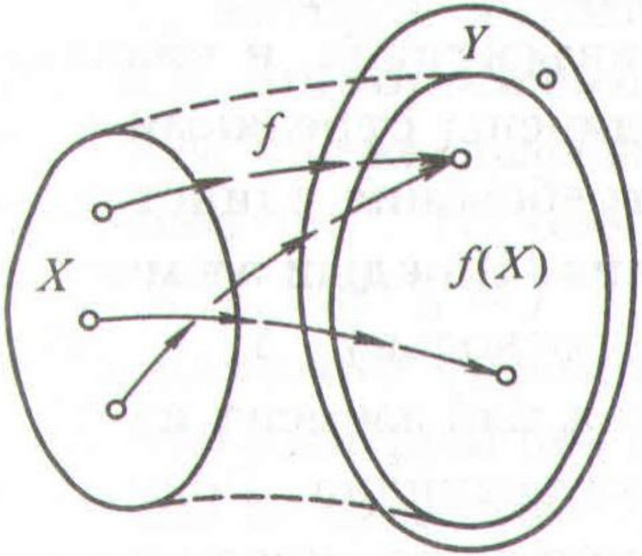


Рис. 2.1

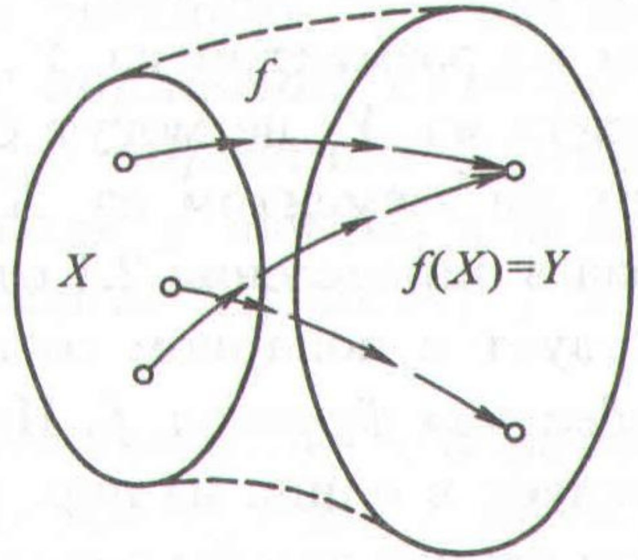


Рис. 2.2

Функция и ее график

Определение

Множество точек плоскости с координатами $(x, \mathbf{f}(x))$, $x \in X$ называют **графиком функции** $\mathbf{f}(x)$, определенной на множестве $X \subseteq \Re$.

Наряду обычного правила представления функции $\mathbf{f}(x)$ существуют сложные формы представления функциональных зависимостей – **суперпозиции функций** . В этом случае обозначенный аргумент y для функции $y = h(v)$ не является независимым переменным, а сам зависит от другого аргумента (например, от аргумента x в виде зависимости $v = g(x)$). Тогда имеется запись $y = f(x) = h(g(x))$. Отсюда ясно, что сложная функция может быть суперпозицией более чем двух функций.

Например, $y = tg\, v$, $v = u^3$, $u = cos\, x \;\rightarrow\; y = tg(cos\, x)^3$.

Основные элементарные функции

Среди огромного числа функций выделена небольшая совокупность относительно простых функций, часто встречаемых в разнообразных приложениях математики. Это **основные элементарные функции** .

1. Степенная функция - $y = x^s$ (обратная функция - $x = \sqrt[n]{y^k},\ s = k/n,$)
2. Показательная функция - $y = a^x$, $a > 1,\ a \neq 1$
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ - (обратная к показательной $y = a^x$)
4. Тригонометрические функции

   $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ $\rightarrow$

   обратные тригонометрические функции - $x = \arcsin y$, $x = \arccos y$,

   $x = \mathrm{arctg}\, y$, $x = \mathrm{arcctg}\, y$.

Для каждой тригонометрической функции существует обратная с бесконечным множеством однозначных ветвей. При этом на любом отрезке $[-\pi/2 + k\pi,\ \pi/2 + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$ функция $\sin x$ строго монотонна, а значит инъективна. Тогда совокупность всех однозначных ветвей многозначной функции представляется в виде

$$\mathrm{Arcsin}\, x = k\pi + (-1)^k \arcsin x , \quad k \in \mathbf{Z}$$

Аналогично и для других тригонометрических функций.

Тригонометрические ф-ии не являются взаимно-однозначными. Для определения обратных им ф-ий необходимо из области их определения на множестве X выделить подмножество $X_1 \subset X$, где они являются взаимно-однозначными, как ф-ии из X_1 в $\Re$:

- $X_1 = [-\pi/2; \pi/2]$ - $y = \sin x$
- $X_1 = [0; \pi]$ - $y = \cos x$
- $X_1 = (-\pi/2; \pi/2)$ - $y = \mathrm{tg}\, x$
- $X_1 = (0; \pi)$ - $y = \mathrm{ctg}\, x$

Функции arcsin x , arccos x определены на отрезке [-1,1] , а arctg x , arcctg x на числовой прямой.

Числовая последовательность

Определение. Если каждому натур. числу n поставлено в соотв. некоторое действит. число x_n, то говорят, что задана последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которую обознач.: $\{x_n\}$.

Отдельные числа $x_k \in \{x_n\}$ наз. членами (элементами) послед-ти $\{x_n\}$

Часто последовательность задается формулой для вычисления ее элементов по их номерам : $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n\}$ – функция натурального аргумента : $x_n = f(n)$

Определение: число a наз. предeлом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : (\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$

Обозначение : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\quad x_n \to a$ при $n \to \infty$

Определение: последовательность $\{x_n\}$, имеющая предел a называется сходящейся (к числу a) , а не имеющая предел – расходящейся.

Примеры **(1)** : $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, т.е. $a = 0$. Поскольку выражение

$|1/n - 0| = 1/n < \varepsilon$ выполнено $\rightarrow \forall n > 1/\varepsilon = N(\varepsilon)$

$N(\varepsilon)$ – не обязательно целое, n – номер, обязательно целое.

(2) : $\{x_n\}$ – стационарная последовательность, $x_n = a$.

$\forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; т.к. $\forall n \Rightarrow |x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

Геометрическая интерпретация

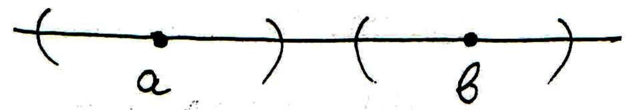
$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a) \Longleftrightarrow$ в любой ε-окрестн. т. a лежат все члены послед-ти $\{x_n\}$, начиная с некоторого.

Вне любой ε-окрестн. т. a лежит лишь конечное их число.

<u>Теорема</u>. Последовательность может иметь лишь один предел.

<u>Док-во</u>. От противного: $x_n \to a$ и $x_n \to в$, $a \neq в$ $\Rightarrow$

$\exists\, \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(в) = \varnothing$



$(x_n \to a) \Rightarrow$ вне $O_\varepsilon(a)$ лежит лишь конечное число эл-тов послед. $\{x_n\}$ что противоречит тому, что $x_n \to в$. ▶

<u>Определение.</u> Последовательность $\{x_n\}$ наз. ограниченной, если

$$\exists c : |x_n| < c \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

геометрически $x_n \in O_c(0)$ $\forall n$, все эл-ты посл-ти лежат внутри некоторого интервала (конечной длины)

<u>Теорема</u>. Сходящаяся последовательность ограничена.

<u>Док-во</u>. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмём $\varepsilon > 0$, все элементы послед-ти $\{x_n\}$, начиная с x_{N+1}, лежат в $O_\varepsilon(a)$.

Положим $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}$, тогда $|x_n| \le C \quad \forall n = 1, 2, \dots$ ▶

<u>Замечание.</u> Обратное неверно, например, $\{(-1)^n\}$.

Геометрически: <u>конечное</u> число эл-тов посл-ти $x_1, x_2, \dots, x_N$, очевидно, можно поместить в некоторую δ-окрестность т. a: $x_1, \dots, x_N \in O_\delta(a)$.

$r = \max\{\varepsilon, \delta\} \Rightarrow x_n \in O_r(a) = O_\varepsilon(a) \cup O_\delta(a) \quad \forall n$

Арифметические операции над последовательностями

<u>Определение</u>. Последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ наз., соответственно, суммой, разностью, произведением и частным последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. В последнем случае предполагается, что $y_n \neq 0$, $n=1,2,\ldots$

<u>Лемма</u>. $|a+b| \le |a|+|b|$

<u>Док.</u> $\left.\begin{aligned} -|a| \le a \le |a| \\ -|b| \le b \le |b| \end{aligned}\right] \Rightarrow -(|a|+|b|) \le a+b \le |a|+|b|$

<u>Следствие</u>. $|a-b| \le |a|+|b|$. <u>Док.</u> $b \leftrightarrow -b$.

<u>Теорема</u>. Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то

1) $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$, 2) $\lim(x_n y_n) = ab$, 3) $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$

Монотонные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ наз.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{неубывающей, если} & x_n \le x_{n+1}, \\ \text{(строго) возрастающей, если} & x_n < x_{n+1}, \\ \text{невозрастающей, если} & x_n \ge x_{n+1}, \\ \text{(строго) убывающей, если} & x_n > x_{n+1}, \end{array}\right\} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Обобщённо такие послед-ти наз. монотонными.

1 **Теорема.** Монотонная ограниченная послед-ть сходится.

При этом если последовательность является:

неубывающей, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$;

невозрастающей, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

33

Важнейший пример.

Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

возрастающая и ограниченная сверху

Её предел $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{def}{=} e$ – Число Эйлера

Численно найдено $e = 2,718281828459045...$

2 Теорема (о зажатой последовательности)

Если элементы последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, начиная с некоторого номера n_0, $x_n \le y_n \le z_n$ и при этом $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \\ a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon \end{array}\right] \Rightarrow a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon$$

при $n > \max\{N, n_0\}$ ▶

3

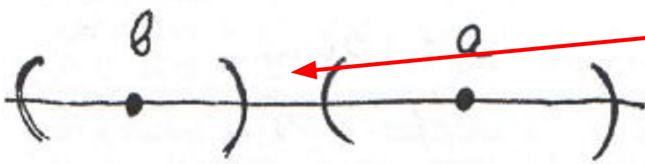
Теорема (о переходе к пределу в неравенстве)

Если последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ сходятся и $x_n \le y_n$ при $n >$

то $\lim x_n \le \lim y_n$.

Док-во Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$

Предположим, что $b < a$, тогда $\exists\, \varepsilon > 0 : O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \varnothing$



$\exists N = N(\varepsilon) : y_n \in O_\varepsilon(b)$, $x_n \in O_\varepsilon(a)$

при $n > N \implies y_n < x_n$

при $n > \max\{N, n_0\}$ ▶

Замечание. $x_n < y_n \not\Rightarrow \lim x_n < \lim y_n$

Например, $0 < \frac{1}{n}$, но $\lim \frac{1}{n} = 0$.

4

Пример. Лемма. Послед. $\{y_n\}$, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходится.

Док.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1} : \frac{n+1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n} \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n} \frac{n}{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\frac{n}{n+1} = 1$$

нер-во Берн...

Поскольку $y_n > 0$ $\forall n = 1, 2, \ldots$, $y_{n-1} > y_n$

т.е. послед-ть $\{y_n\}$ убывающая $\Longrightarrow$ $0 < y_n < y_1 = 4$ $\Longrightarrow$

т.е. послед-ть $\{y_n\}$ ограниченная $\Longrightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

5

Теорема. Послед. $\{x_n\}$, $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Док-во.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\} =$$

$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Определение. $e \overset{def}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Числ. методами установлено, что

$e = 2.718281\ldots..$

Предел последовательности

Число a наз. пределом последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad ,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N .$$

Пример: показать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$

Составим разность

$$\left| \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon ,$$

если $n > 1/\varepsilon - 1 = N(\varepsilon)$.

Таким образом, для каждого положительного числа ε найдется число $N = 1/\varepsilon - 1$ такое, что при $n > N$ будет иметь место неравенство $n > 1/\varepsilon - 1$. Следовательно, число $a = 2$ является пределом

$$x_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Предел функции

Определение : функция $f(x) \to A$ при $x \to a$ (A, a - числа), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

. $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$

1. $$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x);$$

2. $$\lim_{x\to a}[f_1(x)\times f_2(x)] = \lim f_1(x) \times \lim f_2(x);$$

3. $$\lim_{x\to a}[f_1(x)/f_2(x)] = \lim f_1(x)/\lim f_2(x);$$

Непрерывные функции

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

Известно, что во многих наблюдаемых процессах и явлениях изменения происходят в основном постепенно, непрерывно. Например, поставили нагревать воду: время идет, температура воды повышается. Но как? Постепенно, без скачков, непрерывно, т.е. за малый промежуток времени температура изменяется мало. В этом примере, с точки зрения математика, температура воды есть функция времени, и эта функция такова, что при малом изменении аргумента (времени) мало изменяется функция (температура).

Равносильное определение непрерывности:

<u>Определение</u>. Функция $f(x)$, определённая в $\overset{\circ}{U}(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Точнее, $f(x)$ непрерывна в т. x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon):$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

<u>На языке последовательностей</u>:

$f(x)$ непрерывна в т. x_0, если

$$\forall \{x_n\}: \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

<u>Иначе,</u> $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$

Определение 9.3. Функцию $f(x)$ называют ***непрерывной в точке*** $a \in \mathbb{R}$, если приращение функции в этой точке является функцией, б.м. при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0. \tag{9.5}$$

Пример 9.1. а. Функция $f(x) = c = \mathrm{const}$ непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, так как $\forall a \in \mathbb{R}$ $\Delta f(a) = f(x) - f(a) \equiv 0$ и выполнено (9.5).

б. Функция $f(x) = x$ также непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, поскольку $\forall a \in \mathbb{R}$ $\Delta f(a) = f(x) - f(a) = x - a = \Delta x$ и выполнено (9.5).

в. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. Имеем

$$|\Delta f(x)| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leqslant |\Delta x|,$$

так как $|\cos(x + \Delta x/2)| \leqslant 1$, а $|\sin(\Delta x/2)| \leqslant |\Delta x|/2$. Поэтому $\Delta f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и выполнено условие определения 9.3 непрерывности данной функции в любой точке $a \in \mathbb{R}$. #