- **ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ**

15.1. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ЇХ ПОХІДНІ

15.1.1. Комплексна змінна

$z = a + ib$ $\qquad$ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\qquad$ $z = r\,e^{i\varphi}$

Озн. Область називається ***відкритою***, якщо для довільної точки області існує окіл точки, який повністю належить області.

Озн. Область називається ***зв'язною***, якщо дві довільні точки області можна сполучити кривою, яка не виходить за межі області.

15.1.2. Функція комплексної змінної (ФКЗ). Умови Коші — Рімана

$$w = f(z)$$

1) границя функції

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U_{z_0}\ \forall z \in U_{z_0} \setminus \{z_0\}: \left| f(z) - A \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

2) неперервність в точці z_0

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

3) похідна

$$w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

4) диференціал

$$dw = f'(z)dz.$$

$$z = x + iy$$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{15.1}$$

Умови (15.1) називаються ***умовами Коші—Рімана*** (або ***Ейлера—Д'Аламбера***)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$w = f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{15.2}$$

Умови (15.2) називаються ***умовами Коші—Рімана*** для функції *f*(*z*), коли *z* задано у тригонометричній формі

$$f'(z) = \frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial v}{\partial \rho}\right)$$

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

Теорема. *Для того щоб функція* $w = f(z)$ *була диференційовна як ФКЗ у точці* z*, необхідно й достатньо, щоб при відповідних значеннях* x *і* y *функції* u *та* v *були диференційовні як функції двох дійсних змінних і виконувались умови (15.1).*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Озн. Функція називається ***аналітичною*** в деякій ***точці***, якщо вона диференційовна в цій точці і в деякому її околі.

Озн. Функція називається ***аналітичною*** в деякій ***області***, якщо вона аналітична в кожній точці цієї області.

Озн. Функцію $T(x, y)$, яка визначена в області D і неперервна у цій області разом зі своїми частинними похідними першого та другого порядків, і яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

називається ***гармонічною функцією.***

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = 0$$

Приклад.

Знайти аналітичну ФКЗ $w = u + iv,$ якщо $v = y - x.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{15.1}$$

v — гармонічна

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = (y - x)_y' = 1 \qquad u = x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(y - x)_x' = 1$$

$$\varphi'(y) = 1 \qquad \varphi(y) = y + C$$

$$u_y' = 0 + \varphi'(y)$$

$$u = x + y + C \qquad w = (x + y + C) + i(y - x)$$

Приклад.

Знайти аналітичну ФКЗ $w = u + iv$, якщо $u = x^2 - y^2 + 2x$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{15.1}$$

u — гармонічна

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 0 + 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{15.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2 \qquad v = 2xy + 2y + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \qquad \varphi'(x) = 0 \qquad \varphi(x) = C$$

$$v'_x = 2y + 0 + \varphi'(x)$$

$$v = 2xy + 2y + C$$

$$w = u + iv = \left(x^2 - y^2 + 2x\right) + i\left(2xy + 2y + C\right) =$$
$$= \left(x + iy\right)^2 + 2\left(x + iy\right) + iC = z^2 + 2z + iC$$

15.2. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

15.2.1. Теорема Коші

Інтеграл від ФКЗ ідентичний криволінійному інтегралу другого роду

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(z_i^*\right)\Delta z_i$$

$$f(z) = u + iv \qquad\qquad dz = dx + idy$$

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy$$

Приклад.

Обчислити $\int\limits_L \frac{dz}{z-z_0}$ де L – коло $z = z_0 + R\,e^{it}$.

$$\int\limits_L \frac{dz}{z-z_0} = \left| \begin{array}{c} R\,e^{it} = z - z_0 \\ dz = iR \cdot e^{it}\,dt \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iR \cdot e^{it}\,dt}{R \cdot e^{it}} = 2\pi i.$$

Теорема Коші. Якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язиій області D, обмеженій контуром L, то виконується рівність (15.4).

$$\int\limits_L f(z)dz = 0 \qquad (15.4)$$

Приклад 9.3. Обчислити $\int\limits_L Re\, z\, dz$, де L - радіус-вектор точки $1+3i$.

$\triangleleft$ Маємо $y = 3x$. Тоді $z = x + iy = x + i3x = x(1+3i)$, $dz = (1+3i)dx$, $0 \le x \le 1$. Тому

$$\int\limits_L Re\, z\, dz = \int\limits_0^1 x(1+3i)dx = \frac{1+3i}{2}. \triangleright$$

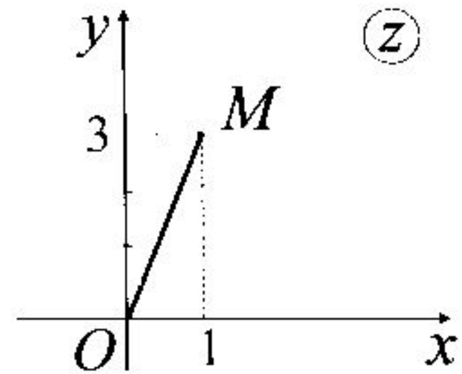

Рис. 31

15.2.2. Формула Коші

Інтегральна формула Коші має вигляд

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} \tag{15.5}$$

Диференціюючи (15.5):

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

Аналогічно:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{15.6}$$

Приклад 10.1. Обчислити

$$\oint\limits_L \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz\,,$$

якщо:

1. $L=\{z:|z-1|=1\}$; 2. $L=\{z:|z|=1/2\}$; 3. $L=\{z:|z-1-i|=\sqrt{2}\}$.

◁ 1. В області, обмеженій контуром $|z-1|=1$, є лише одна точка $z=1$, в якій знаменник підінтегральної функції перетворюється на нуль, а функція $\dfrac{z\,e^z}{z^2+1}$ аналітична.

Згідно з (10.1) маємо

$$\oint\limits_L \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz = 2\pi i\,\frac{z\,e^z}{z^2+1}\bigg|_{z=1} = i\pi e\,.$$

2. В області, що обмежена контуром $L = \{z : |z| = 1/2\}$, підінтегральна функція аналітична, а тому відповідно до теореми Коші

$$\oint\limits_L \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz = 0\,.$$

Приклад 10.1. Обчислити

$$\oint\limits_L \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz\,,$$

якщо:

1. $L=\{z:|z-1|=1\}$; 2. $L=\{z:|z|=1/2\}$; 3. $L=\{z:|z-1-i|=\sqrt{2}\}$.

3. В області D, що обмежена контуром $L=\{z:|z-1-i|=\sqrt{2}$, є дві точки $z=1$ і $z=i$, в яких знаменник перетворюється на нуль. Побудуємо

кола C_2 і C_2 з центрами в точках $z = 1$ і $z = i$ так, щоб вони не перетинались і містилися в крузі $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$. У тризв'язній області, що обмежена колами C_1, C_2 і L (рис. 36), підінтегральна функція аналітична. Відповідно до теореми Коші для многозв'язної області

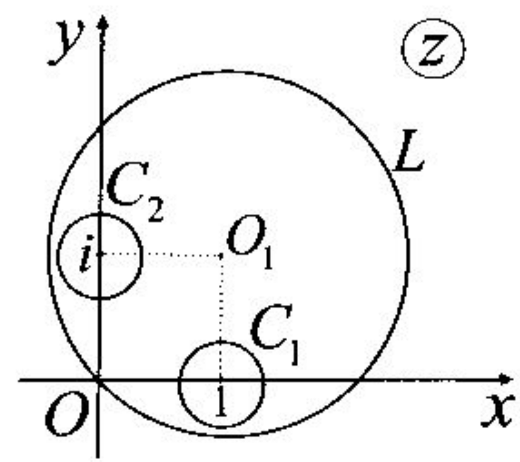

Рис. 36

$$\oint_L \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz =$$

$$= \oint_{C_1} \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz + \oint_{C_2} \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz\,.$$

Застосувавши (10.1) до кожного інтеграла правої частини окремо, одержимо

$$\oint\limits_L \frac{z\,e^z}{(z^2+1)(z-1)}\,dz = 2\pi i\,\frac{z\,e^z}{z^2+1}\bigg|_{z=1} + 2\pi i\,\frac{z\,e^z}{(z+i)(z-1)}\bigg|_{z=i} =$$

$$= \pi\,e\,i + \frac{\pi}{2}\,(1-i)\,e^i = \frac{\pi}{2}(\cos 1 + \sin 1) + i\frac{\pi}{2}(2e + \sin 1 - \cos 1)\,. \,\triangleright$$