Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) 2 порядка с постоянными коэффициентами

опрос:

1. Какое уравнение называется линейным ДУ первого порядка?

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$$

2. При каких условиях линейное ДУ первого порядка называется однородным?

$$\boxed{Q(x) = 0}$$

3. К какому ДУ приводится линейное однородное уравнение ?

ДУ с разделяющимися переменными

4. Каким метод решается линейное неоднородное ДУ ?

Методы Бернулли

5. В чем заключается метод Бернулли?

В замене $\boxed{y = UV}$

Проверка ДЗ:

$$yy' + 2 = 0 \qquad y(0) = 2$$

$$y\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -2 \quad \bigg| \times dx$$

$$ydy = -2dx$$

$$\int ydy = \int -2dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -2x + C \quad \bigg| \times 2$$

$$y^2 = -4x + C$$

$$\boxed{y = \sqrt{-4x + C}}$$

$$2 = \sqrt{-4 \cdot 0 + C}$$

$$C = 4$$

$$y = \sqrt{-4x + 4}$$

$$\boxed{y = \sqrt{4 - 4x}}$$

$$xy' - y = x^2 \cos x$$

$$y = U \cdot V \qquad y' = U'V + V'U$$

$$\underbrace{x \cdot (U'V + V'U)}_{y'} - \underbrace{U \cdot V}_{y} = x^2 \cos x$$

$$xU'V + xV'U - U \cdot V = x^2 \cos x$$

$$xU'V + U(xV' - V) = x^2 \cos x \quad (***)$$

$$(xV' - V) = 0$$

$$x\frac{dV}{dx} - V = 0$$

$$x\frac{dV}{dx} = V \quad \Big| \times \frac{dx}{xV}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln x + C}$$

$$\ln V = \ln x$$

$$\boxed{V = x}$$

$$(***) \quad xU' \cdot x = x^2 \cos x$$

$$x^2 U' = x^2 \cos x$$

$$\frac{dU}{dx} = \cos x \quad \times dx$$

$$dU = \cos x dx$$

$$\int dU = \int \cos x dx$$

$$\boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + c}$$

$$\boxed{U = \sin x + C}$$

$$y = U \cdot V \qquad \boxed{y = (\sin x + C)x}$$

Простейшие ДУ второго порядка

Общий вид: $$\boxed{y'' = f(x)}$$

Алгоритм решения:

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$$

$$y = \int (F(x) + C_1)dx = \Phi(F(x)) + C_1x + C_2 \; - \textit{общее решение}$$

Пример 1: Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' = \sin 2x$

$$y'' = \sin 2x$$

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$$

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$$

$$y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C_1x + C_2 = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2}$$

Простейшие ДУ второго порядка

Пример 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' = 18x + 2$ если y=3 при x=0 и y=9 при x=1.

$$y'' = 18x + 2$$

$$y' = \int (18x + 2)dx = 9x^2 + 2x + C_1$$

$$y = \int (9x^2 + 2x + C_1)dx = 3x^3 + x^2 + C_1x + C_2$$

$$\boxed{y = 3x^3 + x^2 + C_1x + C_2 - \textit{общее решение}}$$

$$x = 0 \ \textit{и} \ y = 3 \ \Rightarrow \ 3 = 3 \cdot 0 + 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \ \Rightarrow C_2 = 3$$

$$x = 1 \ \textit{и} \ y = 9 \ \Rightarrow \ 9 = 3 + 1 + C_1 + 3 \ \Rightarrow \ C_1 = 2$$

$$\boxed{y = 3x^3 + x^2 + 2x + 3 - \textit{частное решение}}$$

ЛОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид:

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x)}$$

***y* – искомая функция; p, g – постоянные величины**

Если f(x)=0, то уравнение называется линейным однородным (мы будем рассматривать данный вид уравнения).

Если f (x) не равно 0, то уравнение называется линейным неоднородным.

ЛОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p\cdot y' + g\cdot y = 0$$

Алгоритм:

1) Заменяем $y = e^{kx}$ **k - некоторое число**

2) Находим производные $y' = k\cdot e^{kx}$ $\quad y'' = k^2\cdot e^{kx}$

3) Подставляем в уравнение

$$\underbrace{k^2\cdot e^{kx}}_{y''} + p\cdot \underbrace{k\cdot e^{kx}}_{y'} + g\cdot \underbrace{e^{kx}}_{y} = 0$$

4) Приводим уравнение к виду $k^2 + p\cdot k + g = 0$

характеристическое уравнение

5) Решаем квадратное уравнение, находим k_1 и k_2

корни характеристического уравнения

Если $k_1 \neq k_2$ ***(вещественные числа),***

то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

Если $k_1 = k_2 = k$ ***(вещественные числа)***

то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}}$$

Если $k_1 = \alpha + \beta \cdot i; \qquad k_2 = \alpha - \beta \cdot i$ ***(комплексные числа)***

то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}$$

Пример 1: Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

(Заменяем)

$$y = e^{kx} \qquad y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} - 5 \cdot k \cdot e^{kx} + 4 \cdot e^{kx} = 0$$

(Подставляем в уравнение)

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

(Решаем квадратное уравнение)

$$D = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4;1$$

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = 1$$

(Подставляем в общий вид решения, в зависимости от К)

$$k_1 \neq k_2 \qquad \boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}}$$

Пример 2: Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

(Заменяем)

$$y = e^{kx} \qquad y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} - 6 \cdot k \cdot e^{kx} + 9 \cdot e^{kx} = 0$$

(Подставляем в уравнение)

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

(Решаем квадратное уравнение)

$$D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$k_1 = k_2 = k = 3$$

(Подставляем в общий вид решения, в зависимости от К)

$$k_1 = k_2 = k$$

$$\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}}$$

Пример 3: Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

(Заменяем)

$$y = e^{kx} \qquad y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} - 2 \cdot k \cdot e^{kx} + 2 \cdot e^{kx} = 0$$

(Подставляем в уравнение)

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

(Решаем квадратное уравнение)

$$D = 4 - 8 = -4 \qquad \sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2i \qquad k_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$k_1 = 1 + i$$

$$k_2 = 1 - i$$

(Подставляем в общий вид решения, в зависимости от К)

$$k_1 = \alpha + \beta \cdot i; \qquad k_2 = \alpha - \beta \cdot i$$

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 1$$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} \cdot \cos x + C_2 e^{x} \cdot \sin x}$$

Домашнее задание

Решите уравнения:

1. $y'' = 36x + 12$ Ответ: $y = 6x^3 + 6x^2 + C_1x + C_2$

2. $y'' = \cos x$ Ответ: $y = -\cos x + C_1x + C_2$

3. $y'' - 5y' + 6y = 0$ Ответ: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$

4. $y'' - 4y' + 4y = 0$ Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x}$

5. $y'' - 6y' + 13y = 0$ Ответ:

$$y = C_1e^{3x} \cdot \cos 2x + C_2e^{3x} \cdot \sin 2x$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta = 2$$