Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

Первообразная

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на промежутке (а,в), если $F(x)$ дифференцируема на (а,в) и производная $F'(x) = f(x)$ всюду на (а,в).

Например, $F(x) = \sin(x)$ является первообразной для $f(x) = \cos x$, т.к

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

Первообразная

Очевидно, если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке (а,в), называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$, где f(x) – подынтегральная функция, а f(x)dx –подынтегральное выражение

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$- одна из первообразных функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x)+C$

Свойства интеграла

$$1. \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

$$3. \int \alpha f(x) = \alpha \int f(x)$$

$$4. \int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$5. \int \alpha(f(x)+\beta g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием и является действием обратным дифференцированию

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

Пример

Вычислить $\int \cos 5x dx$

В таблице интегралов найдем

$\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = adx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin 5x + C .$$

Пример

Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Пример

Вычислим

$$\int (2+3x)^5 dx = \frac{1}{3\cdot 6}(2+3x)^6 + C.$$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

- Использование таблицы интегралов и свойств интегралов

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Пример

Найти

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2} 2tdt =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2t - 2arctgt + C =$$

$$= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin xdx$, где $n = 1,2...k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k.$;

г) $\int x^n \ln xdx$, где $n = 0,\pm1,\pm2,...\pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$, а, например $\sin xdx = dv$, тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Пример

Вычислить $\int x\cos x dx$.

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C \ .$$

Пример

Вычислить

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C .$$