Загадочное число π

Задачи

Узнать…

- 1. Чему равно это число.
- 2. Как его раньше вычисляли.
- 3. Где оно используется.
- 4 .В чём его особенность.
- 5.Как его вычислить по круговой диаграмме.
- 6. Как это повлияло на нашу жизнь.

Чему равно число π ?

Многие думают, что число равно 3.14, но это не так! Это число равняется тысячам, нет - миллионам цифр! На самом деле оно равно 3.14159265358979З2…Вы его сейчас увидите НЕ полностью на следующих слайдах…

Число π равно:…(1 часть)

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209
74944592307816406286208998628034825342117067982148086
513282306647093844609550582231725359408128481117450284
102
7019385211055596446229489549303819544288109756659334461
2847564823378678316527120190914554856692346034861045432
6648213393607250249141273724587006606315588174881520920
9628292540917153643678925903500113305305488204665213841
4695194151160943305727036575959195309218611738193251179
3105118548074462379952749557351885752724891227938183011
9491298336733624406566430860213949463952247371907021798
6094370277053921717629317675238467481845766940513200056
8127145263560827785771342757789609173637178721468440901

Число π равно:…(2 часть)

2249534301465495853710507922796892589235420199581121290
2196086403441815981362977477130995051870721134999999837
2978049951059731732816096318595024459455346908302642522
3082533446850352519311881710100031378387528865875332083
8142061717766914730359825349042875546873115956286388235
3787593751957781857780532171226806613001927876611195909
2164201989380952572010654858632788659361533818279682303
0195203530185296899577362259941389124972177528347913151
5574857242454150695950829533116861727855889075098381754
6374649393192550604009277016711390098488240128583616035
6370756010471018194295559619894676783744944825537977472
6847104047534646208046684259069491293313677028989152104
7521620569550240580381501935112533824300355875402474964
7326391419927260426992279678235478163600934172164121992
4585315030286182974555706749838505494588586926995590 92

Число π равно:…(3 часть)

- 21079750930295532116534498720275596023648066549911988183
  347977535663698074265425278625518184175746728909777279
  380008164706001614524919217321721477235014144197356854
- 816136115735255213347574184946843852332390739414333454776
  24168625189835694855620992192221842725502542588876717
  9
  0494601653466804988627232791786085784383827957976681454
  4
- 100953883785360950680054225125205117392984896084128488
  6
  26945604241965285022210661186306744278522039194945047
  12
  371378695095635437191728745776455757395241389086583264
- 5995813390478027590099465764078951269468398352595709825
  8
  22620522489407726719478268482601476990902640136394437
  4
  5
  53050682034962524517493996514314298091906592509372216
  9
  6

Число π равно:…(4 часть)

- 1365497627807977156914359977001295160894416948585558484063534220722258284886481584560285060168427394522674676788952521385225499546567278239864565961163548862305774564980355936345681743241125150760694794510965960940252288797108931456691368672287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848216829989487226588048575640142704775551323796414515237462343645428584447952658678210511413547357395231134271661021359695362314429524849371871101457654035902799344037420073105785390621983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192781911979399520614196634287544406437451237181921799983910159195618146751426912397489409071864942319515679452080951465502252316

Число π равно:…(5 часть)

- 230558763176359421873125147120532928191826186125867321579198414848829164470609575270695722091756711672291098169091528017350671274858322287183520935396572512108357915
- 136988209144421005751033467110314126711136990865851539831501970165151168517143765761835155650884909989859982387345528331635507647918535893226185489632132933089857054
- 2046752590709154814165498594516371802709819943099244889
  575712828905923233260972997120844335732554893823911932597453667305836041428138830320382490375898524374417029132765618093773444030707459211201913020330380197621101100449293215160842444859637669838952286847831235526582131
  4
  4957685726243344189303968642624341077322697802807318915
- 441101044682325271620105265227211166039688557309254711055785376346682065310989652691862056476931257058635662011

Число π равно:…(6 часть)

- 270826683063432858785698305235808933065757406795457163775254202114955761581400250126228594130216471550979259230990796547376125517656751357517829666454779174501129961
- 489030463994713296210734043751895735961458901938971311179042978285647503203198891514028708085990480109412147221317947647772622414254854540332157185306142288137585043
- 063321751829798652237172159150771559254748738986654949450114654052843355393790039759265572146385306736096571209180763832716641627488880078692550290228472104031721186
- 082041900042296617119637792133757511495950156604963186294726547364252308177036751590673502350728354056704038674351362222477158915049530984448933309634087807693259939
- 780541934144737744184263129860809988868741326047215695162396586457302163159819319516735381297416772947867242292465436680098067692823828058996400482435403701416314965
- 897940924323789690706977942236250822168895738379862300159377647155122893578601588161755782973523344504281512627203734314653197777416031990665541876397929334419521541

Число π равно:…(7 часть)

- 3418994854447345673831624993419131814809277771038638773
  4317720754565453220777092120190516609628049092636019759
  8828161332316563652861932568633606273567630354477628035
- 0450777235547105859548702790814356240145171806246435267
  9456127531813407833033625423278394497538243720583531147
  7119926063813345776879695970309833913077109870408591337
- 4641442822772634559470474587847787201927715280731767907
  7071572134447305057007334924369311383504931631284042512
  1925651798069411352801314701304781643788518529092854520
- 1165839341965621349143415956258658655705526904965209858
  8
  0338507224264829397285847831630577775606888764462482468
  8
  5792603953527734803048029005876075825104747091643961362
- 6760449256274204208320856611906254543372131535958450687
  7246029016187667952405163425225771954291629919306455377
  9914037340432875262888963995879475729174642535745525407
- 9091451357111369410911939325191076020825202618798531887

Число π равно:…(8 часть)

- 45172201381280695501178440874519601212285993716231301711
  44484640903890644954440061986907548516026327505298349
  1
  87407866808818338510228334508504860825039302133219715518
- 43063545500766828294930413776552793975175461395398468339
  36383047461199565385815384205685338621867252334028308
  711232827892125077125294632295639898989358211674552701021
- 8356462201349671518819097303811980049734072396103685406
  64319395097901906995395524530054505806855019567302292
  19139339185680344903982059551002263535361920419947455385
- 938102343955449597783779023742161727111723643435439478
  22181852862408514006660443325888569867054315470696574
  74
  58550332323342107301545940516553790686627333799585115625
- 784322988273723198987571415957811196358330059408730681
  21602876495286744604774649159950549737425626901049037
  78

Число π равно:…(9 часть)

- 8383436346553794986419270563872931748723320837601123029
  9113679386270894387993620162951541337142489283072201269
  014754668476535761647737946752004907571555278196536213 2
- 3926405160136358155907422020203187277605277219005561484
  2555187925303435139844253223415762336106425063904975008
  6562710953591945589751413103482276930624743536325691607
- 8154781811528436579570511086153315044521274739245449454
  2368288605134084148637767009612071512491404302725386076
  4823634143346235189757664521641376796903149501910857598
- 4423919862916421939949072362346468441173940326591840443
  780513338945257423995082965912285085558215725031071257012
  66830240292952522011872676756220415420516184163484756
- 5169998
  116141010029960783869092916030288400269104140792
  8862150784245167090870006332821206504183718065355672525
  3256753285129104248776182582976515795984703562226293486

Как было придумано число π ?

- Число придумал Уильям Джонс, но после него было много открытий об этом числе. Историю разбили на периоды, о которых я сейчас буду рассказывать.

Геометрический период

Постоянство отношения длины любой окружности к её диаметру было замечено уже давно. Жители Междуречья применяли довольно грубое приближение числа π. Как следует из древних задач, в своих расчетах они используют значение π ≈3.

Более точное значение для π использовали древние египтяне. В Лондоне и Нью-Йорке хранятся две части древнеегипетского папируса, который называют «папирус Ринда». Папирус был составлен писцом Армесом примерно между 2000-1700 гг. до н.э.. Армес в своем папирусе написал, что площадь круга с радиусом r равна площади квадрата со стороной, то есть π=3.16

Древнегреческий математик Архимед (287-212 гг. до н.э.) впервые поставил задачу измерения круга на научную почву. Рассмотрев отношение периметров вписанного и описанного 96-угольника к диаметру окружности. Архимед выразил приближение числа π в виде дроби 22/7 которое до сих называется архимедовым числом.

Метод достаточно простой, но при отсутствии готовых таблиц тригонометрических функций потребуется извлечение корней. Кроме этого, приближение сходится к π очень медленно: с каждой итерацией погрешность уменьшается лишь вчетверо.

Атлантический период

- Несмотря на это, до середины 17 века все попытки европейских учёных вычислить число π сводились к увеличению сторон многоугольника. Так например, голландский математик Лудольф Ван Цейлен (1540-1610 гг.) вычислил приближенное значение числа π с точностью до 20-ти десятичных цифр.
- На вычисление ему понадобилось 10 лет. Удваивая по методу Архимеда число сторон вписанных и описанных многоугольников, он дошел до угольника с целью вычисления π с 20 десятичными знаками.
- После смерти в его рукописях были обнаружены ещё 15 точных цифр числа π. Лудольф завещал, чтобы найденные им знаки были высечены на его надгробном камне. В честь него число π иногда называли «лудольфовым числом» или «константой Лудольфа».
- Одним из первых, кто представил метод, отличный от метода Архимеда, был Франсуа Виет (1540-1603 гг.). Он пришел к результату что круг, диаметр которого равен единице, имеет площадь:

…имеет площадь

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots}}}}$$

С другой стороны,

- площадь равна $\frac{\pi}{4}$. Подставив и упростив выражение, можно получить следующую формулу бесконечного произведения для вычисления приближенного значения $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$$

Полученная формула представляет собой первое точное аналитическое выражение для числа π. Кроме этой формулы, Виет, используя метод Архимеда, дал с помощью вписанных и описанных многоугольников, начиная с 6-угольника и заканчивая многоугольником с $2^{16} \cdot 6$ сторонами приближение числа π с 9 правильными знаками.

Английский математик Уильям Броункер (1620-1684 гг.), используя цепную дробь, получил следующие результаты вычисления $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \cdots}}}}}}$$

- Данный метод вычисления приближения числа $\frac{4}{\pi}$ требует довольно больших вычислений, чтобы получить хотя бы небольшое приближение.
- Получаемые в результате подстановки значения то больше, то меньше числа π, и каждый раз все ближе к истинному значению, но для получения значения 3,141592 потребуется совершить довольно большие вычисления.
- Другой английский математик Джон Мэчин (1686-1751 гг.) в 1706 году для вычисления числа π со 100 десятичными знаками воспользовался формулой, выведенной Лейбницем в 1673 году, и применил её следующим образом:

$$\frac{\pi}{4} = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}$$

Ряд быстро сходится и с его помощью можно вычислить число π с большой точностью. Формулы подобного типа использовались для установки нескольких рекордов в эпоху компьютеров.

В XVII в. с началом периода математики переменной величины наступил новый этап в вычислении π.

Немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716 гг.) в 1673 году нашел

$$\pi = 1 - 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right)$$

записать следующим бесконечным рядом:

ряд получается при подстановке:

$x = 1$ в $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$

Леонард Эйлер развивает идею Лейбница

- в своих работах, посвященных использованию рядов для arctg x при вычислении
- числа π. В трактате «De variis modis circuli quadraturam numeris proxime
- exprimendi» (О различных методах выражения квадратуры круга
- приближенными числами),написанном в 1738 году, рассматриваются методы
- усовершенствования вычислений по формуле Лейбница.
- Эйлер пишет о том, что ряд для арктангенса будет сходиться быстрее,
- если аргумент будет стремиться к нулю. Для x=1 сходимость ряда очень
- 10^{50} дленная: для вычисления с точностью до 100 цифр необходимо сложить
- членов ряда. Ускорить $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ления можно, уменьшив значение
- аргуме

$$\frac{\pi}{6} = artctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right)$$

- По утверждению Эйлера, если мы возьмем 210 членов этого ряда, то получим 100 верных знаков числа. Полученный ряд неудобен, потому что необходимо знать достаточно точное значение иррационального числа $\sqrt{3}$. Также Эйлер в своих вычислениях использовал разложения арктангенсов на сумму арктангенсов меньших аргументов:

$$arctg\frac{1}{p} = arctg\frac{1}{p+q} + arctg\frac{1}{p^2+pq+1},$$

$$arctg\frac{1}{n} = arctg\frac{1}{n+1} + arctg\frac{1}{n^2+n+1},$$

$$arctg\frac{1}{n} = arctg\frac{1}{x} + arctg\frac{1}{y} + arctg\frac{1}{z},$$

$$x = n + \frac{n^2-1}{m-n}, y = m+p, z = m + \frac{m^2+1}{p}$$

- Далеко не все формулы для вычисления π, которые использовал Эйлер в своих записных книжках, были опубликованы. В опубликованных работах и записных книжках он рассмотрел 3 различных ряда для вычисления арктангенса, а также привел множество утверждений, касающихся количества суммируемых членов, необходимых для получения приближенного значения π с заданной точностью.
- В последующие годы уточнения значения числа π происходили все быстрее и быстрее. Так, например, в 1794 году Георг Вега (1754-1802 гг.) определил уже 140 знаков, из который только 136 оказались верными.

Период компьютерных вычислений

- XX век ознаменован совершенно новым этапом в вычислении числа π. Индийский математик Сриниваса Рамануджан (1887-1920 гг.) обнаружил множество новых формул для π. В 1910 году он получил формулу для вычисления π через разложение арктангенса в ряд Тейлора:

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1103+26390k)\cdot(4k)!}{(4\cdot 99)^{4k}(k!)^2}}.$$

- При k=100 достигается точность в 600 верных цифр числа π.
- Появление ЭВМ позволило существенно увеличить точность получаемых значений за более короткие сроки. В 1949 году всего за 70 часов с помощью ENIAC группа ученых под руководством Джона фон Неймана (1903-1957 гг.) получила 2037 знаков после запятой числа π . Давид и Григорий Чудновские в 1987 году получили формулу, с помощью которой смогли установить несколько рекордов в вычислении π:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{426880\sqrt{10005}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3(-640320)^{3k}}.$$

- Каждый член ряда дает по 14 цифр. В 1989 году было получено 1 011 196 691 цифра после запятой. Данная формула хорошо подходит для вычисления π на персональных компьютерах. На данный момент братья являются профессорами в политехническом институте Нью-Йоркского университета.
- Важным событием недавнего времени стало открытие формулы в 1997 году Саймоном Плаффом . Она позволяет извлечь любую шестнадцатеричную цифру числа π без вычисления предыдущих. Формула носит название «Формула Бэйли — Боруэйна — Плаффа» в честь авторов статьи, где формула была впервые опубликована. Она имеет следующий вид:

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

- В 2006 году Саймон, используя PSLQ, получил несколько красивых формул для вычисления π. Например,

$$\frac{\pi}{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{q^n-1} - \frac{4}{q^{2n}-1} + \frac{1}{q^{4n}-1}\right),$$

$$\frac{\pi^3}{180} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{4}{q^{2n}-1} - \frac{5}{q^{2n}-1} + \frac{1}{q^{4n}-1}\right)$$

В 2009 году японские ученые, используя суперкомпьютер T2K Tsukuba System, получили число π с 2 576 980 377 524 десятичными знаками после запятой. Вычисления заняли 73 часа 36 минут. Компьютер был оснащен 640-ка четырех ядерными процессорами AMD Opteron, что обеспечило производительность в 95 триллионов операций в секунду.

- Следующее достижение в вычислении π принадлежит французскому программисту Фабрису Беллару , который в конце 2009 года на своем персональном компьютере под управлением Fedora 10 установил рекорд, вычислив 2 699 999 990 000 знаков после запятой числа π. За последние 14 лет это первый мировой рекорд, который поставлен без использования суперкомпьютера. Для высокой производительности Фабрис использовал формулу братьев Чудновских. В общей сложности вычисление заняло 131 день (103 дня расчеты и 13 дней проверка результата). Достижение Беллара показало, что для таких вычислений не обязательно иметь суперкомпьютер.

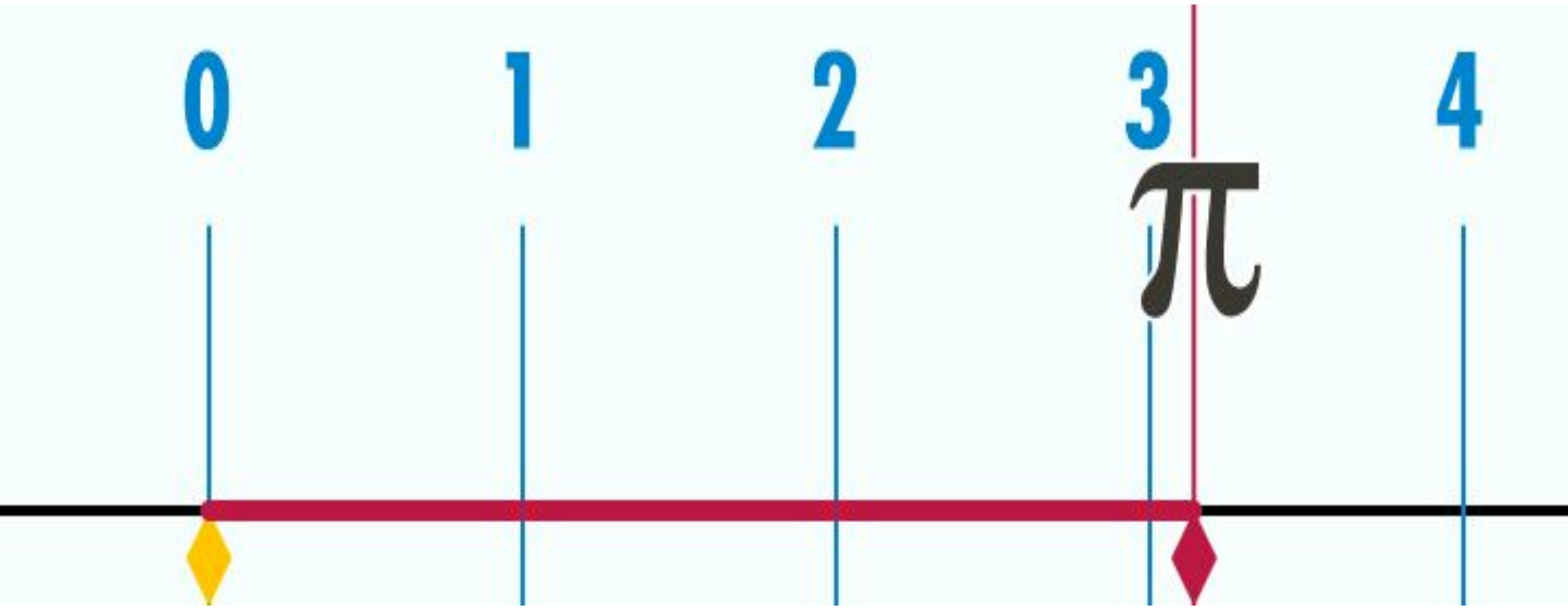
- Всего через полгода рекорд Франсуа был побит инженерами Александром Йи и Сингеру Кондо. Для установления рекорда в 5 триллионов знаков после запятой числа π был также использован персональный компьютер, но уже с более внушительными характеристиками: два процессора Intel Xeon X5680 по 3,33 ГГц, 96 ГБ оперативной памяти, 38 ТБ дисковой памяти и операционная система Windows Server 2008 R2 Enterprise x64. Для вычислений Александр и Сингеру использовали формулу братьев Чудновских. Процесс вычисления занял 90 дней и 22 ТБ дискового пространства. В 2011 году они установили еще один рекорд , вычислив 10 триллионов десятичных знаков числа π.

- Вычисления происходили на том же компьютере, на котором был поставлен их предыдущий рекорд и занял в общей сложности 371 день. В конце 2013 года Александр и Сингеру улучшили рекорд до 12,1 триллиона цифр числа π, вычисление которых заняло у них всего 94 дня. Такое улучшение в производительности достигнуто благодаря оптимизации производительности программного обеспечения, увеличения количества ядер процессора и значительного улучшения отказоустойчивости ПО.
- Текущим рекордом является рекорд Александра Йи и Сингеру Кондо, который составляет 12,1 триллиона цифр после запятой числа π.
-

- Таким образом, мы рассмотрели методы вычисления числа π, используемые в древние времена, аналитические методы, а также рассмотрели современные методы и рекорды по вычислению числа π на компьютерах.

Где используется число π ?

- Число π используют в математике там, где есть окружность. Например:


0
1
2
3
4
π

спасибо

за внимание!!!