

Логарифмические уравнения и неравенства



Алгебра 10 класс

Т.Н.Оленникова
учитель ГБОУ школы № 413
г. Санкт-Петербург



План урока

- 1. Определение.
- 2. Свойства и формулы логарифмирования.
- 3. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических уравнений.
- 4. Примеры решения простейших логарифмических уравнений.
- 5. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических неравенств.
- 6. Примеры решения простейших логарифмических неравенств.

1. Определение.

1. **Логарифмом** положительного числа **b** ($b > 0$) по основанию **a** ($a > 0, a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести **a**, чтобы получить **b**.

Обозначение : $\log_a b$

2. **Логарифмическим уравнением (неравенством)** называется уравнение (неравенство), в котором переменная находится под знаком логарифма.

Например: 1) $\log_4 \frac{1}{x^2} + \log_4 \sqrt{x} = -3$

2) $\log_3 (x + 2) < 3$



Примеры

- **1.** $\log_3 9 = 2$, так как $3^2 = 9$
- **2.** $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, так как $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- **3. Десятичный логарифм:** $\log_{10} b = \lg b$
- **4. Натуральный логарифм:**

$$\log_e b = \ln b, (e \approx 2,7182\dots)$$

2. Свойства и формулы логарифмирования

$a^{\log_a b} = b$ - Основное логарифмическое тождество

■ **1.** $\log_a 1 = 0$ **2.** $\log_a a = 1$

■ **3.** $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

■ **4.** $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$

■ **5.** $\log_a x^n = n \log_a x$

■ **6.** $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$

3. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических уравнений.

■ **1.** $\log_a f(x) = b$

$$m \neq 0, a \neq 1; \quad a^{(\quad)} = b$$

■ **2.** $\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, a \neq 1,$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

4. Примеры решения простейших логарифмических уравнений.

$$1) \log_2(x-5) = 3$$

Решение

$$\log_2(x-5) = 3$$

$$x-5=2^3$$

$$x=13$$

Ответ : $x=13$

$$2) \log_4(x-5) = \log_4(2x-1)$$

Решение

$$\log_4 x = \log_4(2x-1)$$

$$\begin{cases} x=2x-1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ x > 0 \end{cases} \quad x=1$$

Ответ : $x = 1$

5. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических неравенств

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$x > 0, a \neq 1,$$

1) Если $0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства

меняется и

учитывается ОДЗ

2) Если $a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства

не меняется и

учитывается ОДЗ

6. Примеры решения простейших логарифмических неравенств.

$$1) \log_5(2x) > \log_5(x-1)$$

Т.к. $5 > 1$, то функция $y = \log_5 t$ – возрастающая и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x > x-1 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \quad x > 1$$

Ответ: $(1; +\infty)$

Примеры решения простейших логарифмических неравенств. (продолжение)

$$2) \quad \log_{\frac{1}{2}}(2x) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

Т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ – убывающая

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x < x-1 \\ 2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет