

# Производственные функции

Автор: Лаврушина Е.Г.

# Производственная функция (функция выпуска)

---

функция, связывающая объём выпускаемой продукции с потребляемыми ресурсами

$$Y = Y(K, L),$$

здесь  $Y$  – объём выпускаемой продукции,  $K$  – объём используемого капитала,  $L$  – количество единиц затрачиваемого труда (живой труд), который тоже может исчисляться в стоимостном выражении.

В данном случае производственная функция (ПФ) называется **двухфакторной**, поскольку зависит от двух аргументов

# Производственная функция Кобба - Дугласа

---

На практике при моделировании отдельной отрасли, региона или страны часто используют ПФ следующего вида:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha},$$

где параметры  $A$ ,  $\alpha$  – положительные

Такая функция называется ПФ Кобби-Дугласа по имени американских математика Кобби и экономиста Дугласа, предложивших её использовать в 1928 году.

# Мультипликативная производственная функция (ПФ)

---

задается выражением

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} .$$

здесь  $A$  называется коэффициентом нейтрального технического прогресса,  $\alpha, \beta$  - коэффициенты эластичности по труду и капиталу.

Если  $\alpha + \beta = 1$  ,то мультипликативная ПФ носит название функции Кобба-Дугласа

Если  $\alpha + \beta > 1$  , то выпуск растет быстрее затраченных ресурсов (растущая экономика);

если  $\alpha + \beta < 1$  , то потребление ресурсов неэффективно, в случае ПФ Кобба-Дугласа соблюдается пропорциональный рост на масштаб ресурса.

# **Мультипликативная ПФ имеет ряд замечательных свойств, которые соответствуют реальной экономике**

---

- увеличение ресурса приводит к увеличению конечного продукта
- при монотонном увеличении ресурсов скорость роста объема продукции будет уменьшаться

- 
- **Изокванта** – геометрическое место точек, в которых различные сочетания факторов производства дают одно и то же количество продукции
  - **Изоклираль** – линия наибольшего роста производственной функции

# Функция издержек

показывает зависимость объёма затрат (издержек) от объёма выпускаемой продукции.

Обычно полные затраты  $Z(Y)$  сепарируются на постоянные  $Z_{\Pi} = const$ , не зависящие от объёма выпускаемой продукции и переменные затраты,  $Z_{Пер}(Y)$  являющиеся функцией  $Y$  – объёма выпускаемой продукции.

Например, для функции  $Z(Y) = a \cdot Y^2 + b \cdot Y + c$  получаем,  $Z_{\Pi} = c$

$$Z_{Пер}(Y) = a \cdot Y^2 + b \cdot Y$$

# Функция спроса и предложения

связывает величину спроса (предложения) на товар  $Y^c$  от комплекса факторов.

Например, **функция спроса**  $Y^c(p) = C \cdot e^{-\beta \cdot p}$   
(здесь  $C$ ,  $\beta$  – положительные параметры,  $p$  – цена на товар) показывает, как спрос убывает с ростом цены.

**Функция предложения**  $Y^П(p)$  является возрастающей, поскольку продавец заинтересован (в отличие от покупателя) в росте цены.

Например,  $Y^П(p) = M \cdot p$   
где  $M$  – положительный параметр.

# Функция выручки (дохода)

определяет полученный доход от объёма реализованного товара и цены за единицу этого товара.

Таким образом, функция выручки  $W(Y^c, p)$  имеет вид:

$$W(Y^c, p) = Y^c \cdot p$$

В частности для заданной функции спроса имеем зависимость только от цены

$$W(p) = C \cdot p \cdot e^{-\beta \cdot p}$$

# Функция прибыли

---

определяется, как разность между функцией выручки и функцией издержек,  $P_r = W - Z$  .

В случае конкретного вида формул получим:

$$P_r(Y, p) = C \cdot p \cdot e^{-\beta \cdot p} - (a \cdot Y^2 + b \cdot Y + c)$$

# Функция полезности

---

**количественно в относительных единицах  
показывает потребительскую оценку (пользу)  
данного набора благ**

Часто эту функцию используют в виде  
логарифмической зависимости

$$U = \ln(n + 1)$$

# Понятие эластичности

В экономике и социологии это создаёт ряд неудобств, учитывая многообразие входящих в модели размерностей. Поэтому вводится понятие безразмерной производной, или эластичности.

**Средней эластичностью** называется отношение относительного приращения функции к относительному приращению аргумента

$$E_{\text{ср.}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Естественно, что **эластичностью** (мгновенной) называется величина

$$E = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

# Экономический смысл эластичности

---

Она показывает, на сколько процентов изменится результат, если фактор изменить на один процент, поскольку

$$E \approx \left( \frac{\Delta y}{y} \cdot 100\% \right) / \left( \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% \right)$$

Классическую производную  $\frac{dy}{dx}$  в социально – экономических исследованиях интерпретируют так: она показывает, на сколько изменится результат, если аргумент изменить на 1 единицу, поскольку:

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{1} = \Delta y.$$

Однако формально с математической точки зрения это выполняется только при линейных соотношениях, поскольку в общем случае:

$$\frac{dy}{dx} \neq y \cdot (x + 1) - y(x).$$