Ранг матрицы.
Метод окаймляющих миноров

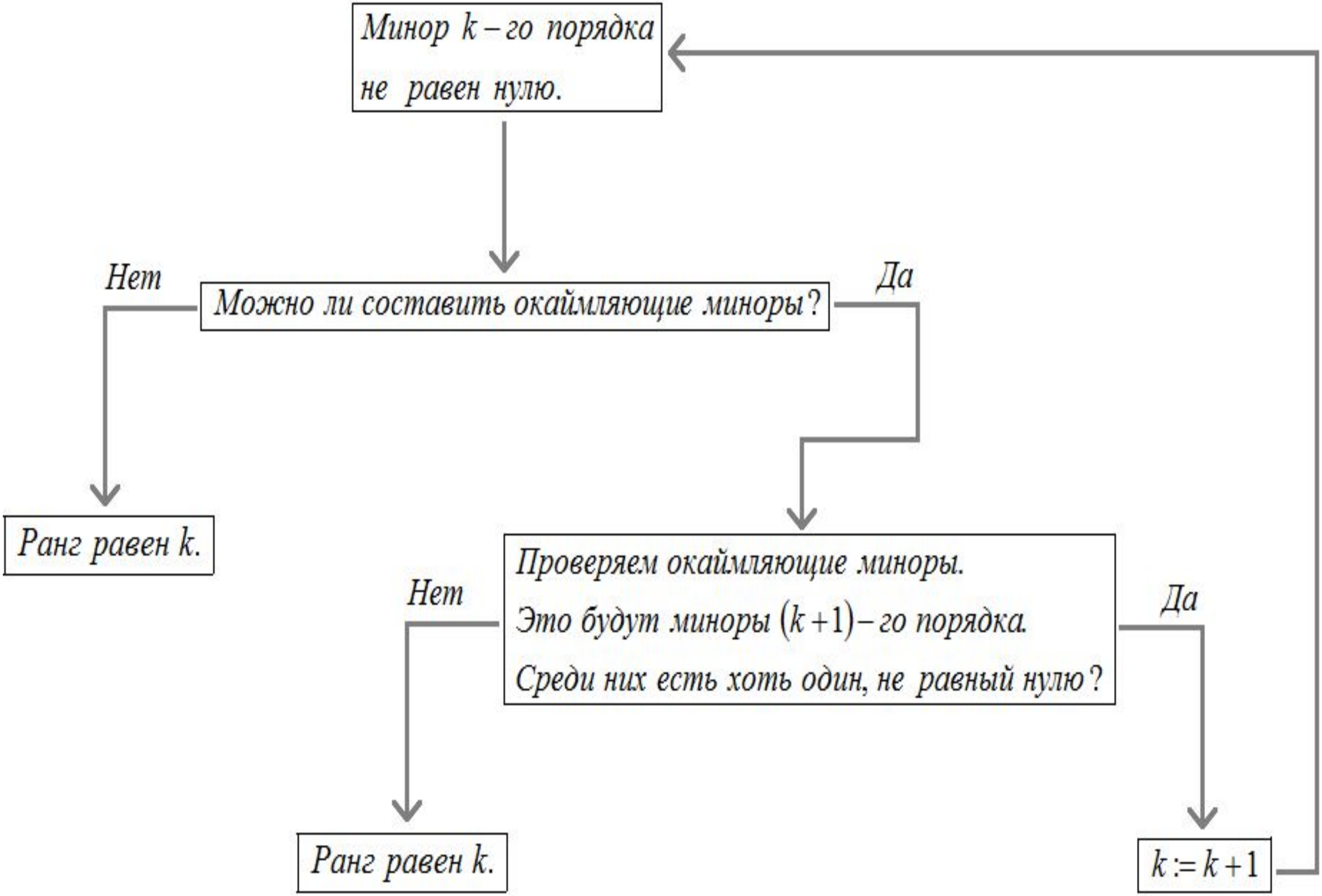
Ранг матрицы - это число линейно независимых строк (столбцов) этой матрицы.

Суть метода окаймляющих миноров выражается парой пунктов простого алгоритма:

1) Пусть некий минор M k-го порядка не равен нулю.

2) Если окаймляющие миноры для минора M (это уже будут миноры (k+1)-го порядка), составить невозможно (т.е. матрица содержит k строк или k столбцов), то ранг равен k. Если окаймляющие миноры существуют и все равны нулю, то ранг равен k. Если среди окаймляющих миноров есть хотя бы один, отличный от нуля, то повторяем для него пункт №1, приняв k+1 вместо k.

Наглядно всё вышеизложенное можно выразить следующей схемой:


Минор k – го порядка не равен нулю.
Нет
Можно ли составить окаймляющие миноры?
Да
Ранг равен k.
Проверяем окаймляющие миноры.
Это будут миноры $(k+1)$ – го порядка.
Среди них есть хоть один, не равный нулю?
Нет
Да
Ранг равен k.
$k := k+1$

Поясню эту схему более подробно. Станем рассуждать с самого начала, т.е. с миноров первого порядка. Если все миноры первого порядка некоей матрицы A (миноры первого порядка – это элементы матрицы) равны нулю, то $\mathrm{rang}A=0$. Если в матрице есть минор первого порядка $M1\neq 0$, то $\mathrm{rang}A\geq 1$.
Проверяем окаймляющие миноры для минора M1. Это уже будут миноры второго порядка. Если все миноры, окаймляющие M1, равны нулю, то $\mathrm{rang}A=1$. Если среди миноров второго порядка, окаймляющих M1, есть хоть один минор $M2\neq 0$, то $\mathrm{rang}A\geq 2$.
Проверяем окаймляющие миноры для минора M2. Это будут миноры третьего порядка. Если все миноры третьего порядка, окаймляющие M2, равны нулю, то $\mathrm{rang}A=2$. Если среди миноров третьего порядка, окаймляющих M2, есть хоть один минор $M3\neq 0$, то $\mathrm{rang}A\geq 3$.
Проверяем окаймляющие миноры для минора M3. Если все миноры четвёртого порядка, окаймляющие M3, равны нулю, то $\mathrm{rang}A=3$. Если среди миноров четвёртого порядка, окаймляющих M3, есть хоть один минор $M4\neq 0$, то $\mathrm{rang}A\geq 4$.
Проверяем все окаймляющие миноры для минора M4, и так далее. В конце концов возможны два случая: либо на каком-то шаге окажется, что все окаймляющие миноры равны нулю, либо окаймляющий минор составить просто не получится, так как в матрице "закончатся" строки или столбцы. *Порядок последнего составленного ненулевого минора и будет равен рангу матрицы*.

Пример №1
Найти ранг матрицы А=

-1	2	1	3
-3	0	5	4
-5	4	7	10

методом окаймляющих миноров.
Решение
Можно, конечно, начать с миноров первого порядка, которые представляют собой просто элементы данной матрицы. Но лучше сразу выбрать какой-либо не равный нулю минор второго порядка, тем паче что такой выбор большой сложности не представляет.

Например, на пересечении строк №1, №2 и столбцов №1, №2 расположены элементы минора , который несложно вычислить

-1	**2**	**1**	**3**
-3	0	5	4
-5	4	7	10

$-1\cdot 0-2\cdot(-3)=6.$

Итак, существует минор второго порядка, не равный нулю, из чего следует, что $\mathrm{rang}A\geq 2$. Рассмотрим миноры третьего порядка, окаймляющие данный минор второго порядка. Как составить окаймляющий минор? Для этого к набору строк и столбцов, на пересечении которых лежат элементы минора второго порядка, нужно добавить ещё одну строку и ещё один столбец.

Вспоминаем, что элементы записанного нами минора второго порядка расположены на пересечении строк №1, №2 и столбцов №1, №2. Добавим к строкам ещё строку №3, а к столбцам – столбец №3. Мы получим минор третьего порядка, элементы которого (они для наглядности показаны в матрице красным цветом) лежат на пересечении строк №1, №2, №3 и столбцов №1, №2, №3. Найдём значение этого минора

-1	**2**	**1**	**3**
-3	0	5	4
-5	4	7	10

Окаймляющий минор равен нулю. О чём это говорит? Это говорит о том, что нам нужно продолжить нахождение окаймляющих миноров. Либо они все равны нулю (и тогда ранг будет равен 2), либо среди них найдётся хотя бы один, отличный от нуля.

-1	**2**	**1**	**3**
-3	0	5	4
-5	4	7	10

-1	**2**	**3**
-3	0	4
-5	4	10

И этот окаймляющий минор равен нулю. Иных окаймляющих миноров нет. Следовательно, все окаймляющие миноры равны нулю. Порядок последнего составленного ненулевого минора равен 2. Вывод: ранг равен 2, т.е. rangA=2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 12 & 2 \end{pmatrix} \qquad |-1| \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 12 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 12 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 60$$

rank $A = 3$

Домашнее задание

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$