Системы счисления

Цифры – это символы, участвующие в записи числа и составляющие некоторый алфавит.

Число – это некоторая величина.

Система счисления – это определенный способ изображения чисел и соответствующие ему правила действия над числами.

Системы счисления можно разделить на непозиционные и позиционные.

Непозиционная система счисления

Непозиционными системами счисления называются такие системы счисления, в которых от положения знака в числе не зависит величина, которую он обозначает.

Римская система записи чисел

I V X L C D M

1 5 10 50 100 500 1000

Например, число **CCXXXII** складывается из двух сотен, трех десятков и двух единиц и равно **232**.

Римская система записи чисел

В римских числах цифры записываются слева направо в порядке убывания. В таком случае их значения складываются. Если слева записана меньшая цифра, а справа – большая, то их значения вычитаются.

Например,

VI = 5 + 1 = 6, IV = 5 - 1 = 4.

MCMXCVII = 1000 + (- 100 + 1000) + (- 10 + +100) + 5 + 1 + 1 = 1997

Позиционные системы счисления

Позиционными системами счисления называются такие системы счисления, в которых величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции.

Количество используемых цифр называется **основанием** позиционной системы счисления.

За основание позиционной системы счисления можно принять любое натуральное число большее 1.

Система счисления, применяемая в современной математике, является **позиционной десятичной системой**. Ее основание равно десяти, так как запись любых чисел производится с помощью десяти цифр:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например, в числе **725** семерка обозначает семь сотен, двойка – два десятка, пятерка – пять единиц. Каждая цифра в зависимости от позиции в записи числа обозначает разные величины.

$$\mathbf{725} = \mathbf{7} \cdot 100 + \mathbf{2} \cdot 10 + \mathbf{5} \cdot 1$$

Свернутая форма записи числа

Развернутая форма записи числа

Всякое десятичное число можно представить как сумму произведений составляющих его цифр на соответствующие степени десятки. То же самое относится и к десятичным дробям.

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$ **$10^{-1} = 0{,}1$**

$10^2 = 100$ **$10^{-2} = 0{,}01$**

$10^3 = 1000$ **$10^{-3} = 0{,}001$** и т.д.

Например,

$26{,}387 = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.

Задание 1

Записать числа в развернутой форме:

3864

34,07

Перевод чисел
из произвольной
позиционной системы
в десятичную

Для записи чисел в позиционной системе с основанием **n** используется **n цифр**.

Основание	Система	Алфавит
n = 2	двоичная	**0 1**
n = 3	троичная	**0 1 2**
n = 8	восьмеричная	**0 1 2 3 4 5 6 7**
n = 16	шестнадцатеричная	**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F**

101101_2 3671_8 $3B8F_{16}$

Перевод
в десятичную систему счисления

Например, число 211_3 содержит в себе
1 единицу, 1 тройку и 2 девятки.

$211_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 18 + 3 + 1 = 22_{10}$

Аналогично переводятся и дробные числа.

$101{,}11_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$
$=$
$= 4 + 0 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 5{,}75_{10}$.

Задание 2

Перевести числа в десятичную систему счисления.

110101_2, $34{,}2_5$, $2A3{,}8_{16}$.

$110101_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 +$
$+ 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 53_{10}$

$34{,}2_5 = 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 + 2 \cdot 5^{-1} = 15 + 4 + 0{,}4 =$
$19{,}4_{10}$

$2A3{,}8_{16} = 2 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 + 8 \cdot 16^{-1} =$
$= 512 + 160 + 3 + 0{,}5 = 675{,}5_{10}$

Перевод целых десятичных чисел в произвольную систему счисления

Алгоритм перевода целых десятичных чисел в произвольную систему счисления

1. Десятичное число делится на основание системы. Остаток от деления – младший разряд искомого числа (правая цифра в числе).
2. Частное делится на основание системы. Остаток от деления – вторая справа цифра в числе.
3. Деление производится до тех пор, пока частное не станет меньше делителя (основания системы). Это частное – старшая цифра искомого числа.

Задание 3

Выполнить указанные переводы чисел из одной системы в другую:

$56_{10} = X_2$; $56_{10} = X_8$;

$124_5 = X_2$; $A8_{16} = X_8$.

Перевод десятичных дробей в произвольную систему счисления

Алгоритм перевода десятичных дробей в произвольную систему счисления

1. Умножить данное число на основание системы. Целая часть произведения – первая цифра в числе после запятой.
2. Произведение (без целой части) умножается на основание системы. Целая часть – вторая цифра в числе после запятой.
3. Умножение производится до тех пор, пока произведение не станет целым числом без десятичной части.

Задание 4

Выполните указанные переводы чисел из одной системы в другую:

$0,625_{10} = X_8$ $56,875_{10} = X_2$

$0,3125_{10} = X_{12}$ $324,015625_{10} = X_8$

$0,78125_{10} = X_4$ $765,125_{10} = X_{16}$

Задание 5

Переведите смешанное десятичное число в двоичное, восьмеричное и шестнадцатеричное с точностью до указанного количества знаков после запятой:

а) 3,5, один знак;

б) 98,45, три знака;

в) 47,89, три знака.

Двоичная арифметика

Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

$0_2 + 0_2 = 0_2$

$0_2 + 1_2 = 1_2$

$1_2 + 0_2 = 1_2$

$1_2 + 1_2 = 10_2$

или

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

Задание 6

Выполните операцию сложения над двоичными числами:

а) 101010 + 1101

б) 1010 + 1010

в) 10101 + 111

Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основывается на использовании следующих таблиц сложения и умножения:

$0_2 \times 0_2 = 0_2$

$0_2 \times 1_2 = 0_2$

$1_2 \times 0_2 = 0_2$

$1_2 \times 1_2 = 1_2$

или

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Задание 7

Выполните операцию умножения над двоичными числами:

а) $1010 \cdot 11$

б) $111 \cdot 101$

в) $1010 \cdot 111$

Задание 8

Расставьте знаки арифметических операций так, чтобы были верны следующие равенства в двоичной системе:

а) 1100 ? 11 ? 100 = 100000;

б) 1100 ? 10 ? 10 = 100;

в) 1100 ? 11 ? 100 = 0.

Задание 9

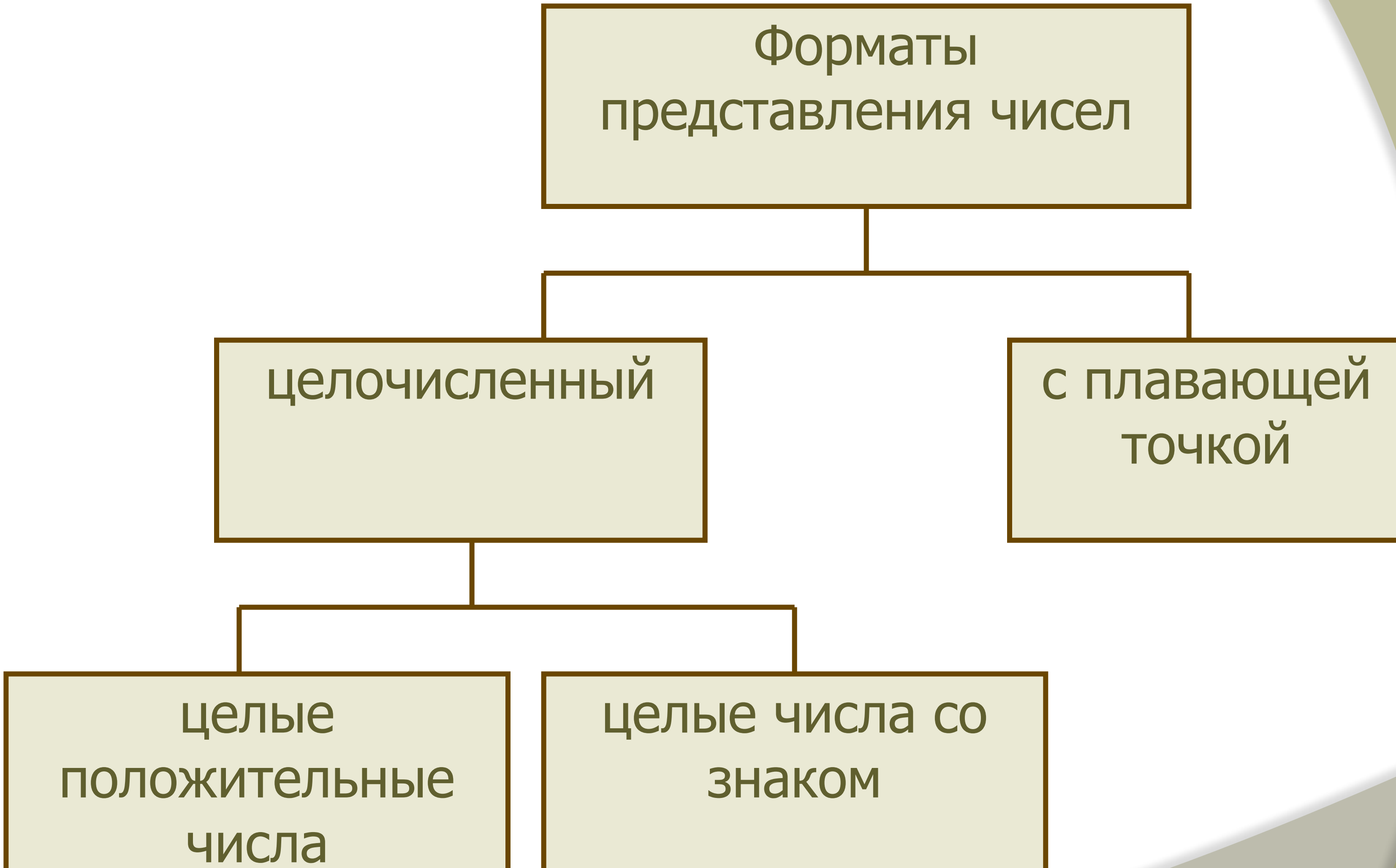
Вычислите выражения:

а) $(1111101_2 + AF_{16}):36_8$

б) $125_8 + 101_2 \cdot 2A_{16} - 141_8$

Ответ дайте в десятичной системе счисления.

Представление числовой информации в компьютере


Форматы представления чисел
целочисленный
с плавающей точкой
целые положительные числа
целые числа со знаком

Целочисленный формат (с фиксированной точкой) используется для представления в компьютере целых (англ. integer) положительных и отрицательных чисел (1, 2, 4 байта).

Однобайтовое представление применяется только для положительных целых чисел (от 00000000_2 до 11111111_2, т.е 255_{10}).

Для положительных и отрицательных целых чисел обычно используется 2 и 4 байта, при этом старший бит выделяется под знак числа:

- 0 – плюс,
- 1 – минус.

Самое большое (по модулю) целое число со знаком, которое может поместиться в 2-байтовом формате, это число **0 1111111 11111111**, то есть при помощи подобного кодирования можно представить числа от $-32\ 768_{10}$ до $32\ 767_{10}$.

Представление целого положительного числа в компьютере

1) число переводится в двоичную систему;

2) результат дополняется нулями слева в пределах выбранного формата.

Например, положительное число $+135_{10}$ в зависимости от формата представления в компьютере будет иметь следующий вид:

- для формата в виде 1 байта –

  10000111 (отсутствует знаковый разряд);
- для формата в виде 2 байтов –

  0 0000000 10000111;
- для формата в виде 4 байтов –

  0 0000000 00000000 00000000 10000111.

Представление целого отрицательного числа в компьютере

1) число без знака переводится в двоичную систему;
2) результат дополняется нулями слева в пределах выбранного формата;
3) полученное число переводится в обратный код (нули заменяются единицами, а единицы – нулями);
4) полученное число переводится в дополнительный код (к обратному коду прибавляется 1).

Например, представим число -135_{10} в 2-байтовом формате:

1) $135_{10} = 10000111_2$ (перевод десятичного числа без знака в двоичный код);
2) 0 0000000 10000111 (дополнение двоичного числа нулями слева в пределах формата);
3) 0 0000000 10000111 → 1 1111111 01111000 (перевод в обратный код);
4) 1 1111111 01111000 → 1 1111111 01111001 (перевод в дополнительный код).

Задание 10

В одном байте представлено целое положительное число в формате с фиксированной точкой. Переведите число в десятичную систему счисления.

1	0	1	0	1	0	0	0

Задание 11

В двух байтах представлено целое отрицательное число в формате с фиксированной точкой. Переведите число в десятичную систему счисления.

1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1

Формат с плавающей точкой используется для представления в компьютере действительных чисел (англ. real).

Представление числа в плавающей форме не является единственным:

$3 \cdot 10^8 = 30 \cdot 10^7 = 0{,}3 \cdot 10^9 = 0{,}03 \cdot 10^{10} = \ldots$

Договорились для выделения единственного варианта записи числа считать, что целая часть числа отсутствует, а первый разряд содержит отличную от нуля цифру .

Т.е. обоим требованиям удовлетворит только число $0{,}3 \cdot 10^9$

Вещественное число представляется в виде произведения *мантиссы* (m) и основания системы счисления в целой степени (n), называемой *порядком*.

$$R = m * P^n .$$

Порядок n указывает, на какое количество позиций и в каком направлении должна сместиться в мантиссе точка (запятая), отделяющая дробную часть от целой. Мантисса нормализуется, т. е. представляется в виде правильной дроби
($0 < m < 1$).

В 2-байтовом формате представления вещественного числа первый байт и три разряда второго байта выделяются для размещения мантиссы, в остальных разрядах второго байта размещаются порядок числа, знаки числа и порядка.

1-й байт								0-й байт							
Знак числа	Знак порядка	Порядок			Мантисса										

В 4-байтовом формате представления вещественного числа первые три байта выделяются для размещения мантиссы, в четвертом байте размещаются порядок числа, знаки числа и порядка.

<table>
<tr><td colspan="8">3-й байт</td><td colspan="8">2-й байт</td><td colspan="8">1-й байт</td><td colspan="8">0-й байт</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Знак числа</td><td>Знак порядка</td><td colspan="6">Порядок</td><td colspan="24">Мантисса</td></tr>
</table>