Компьютерная дискретная математика

Отношения и их свойства

Понятие отношения

Теория отношений реализует в математических терминах на абстрактных множествах реальные связи между реальными множествами.

Понятие отношения

Пример.

“Orion” продает мебель,

“День” – светильники,

“Sit” – мебель и светильники,

“House” – светильники и материалы для ремонта.

Фирмы = {“Orion”, “День”, “Sit”, “House”} – множество фирм.

Продукция = {мебель, светильники, материалы для ремонта} – множество видов продукции.

Кортеж, упорядоченная пара

Кортеж – это последовательность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место.

Обозначение: $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Число элементов кортежа называется ***длиной***.

Кортеж длиной 2 называется ***упорядоченной парой***.

Декартово произведение множеств

Декартовым произведением $\boldsymbol{n}$ множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ называется множество всех возможных упорядоченных наборов из $\boldsymbol{n}$ элементов – $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которых первый элемент принадлежит множеству X_1, второй – множеству X_2, … , n-й – множеству X_n.

Декартово произведение $X \times X \times \ldots \times X$, в котором одно и то же множество X умножается n раз само на себя, называют ***декартовой степенью*** множества и обозначают X^n. При этом $X^1 = X$.

Множество X^2 называют ***декартовым квадратом*** множества X, множество X^3 называют **- *декартовым кубом*** множества X.

Декартово произведение множеств

Пример.

$A=\{a_1, a_2, a_3\}$,

$B=\{b_1, b_2\}$,

$C=\{c_1,c_2\}$.

$A\times B=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1),(a_3, b_2)\}$.

$B\times A=\{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_1, a_3), (b_2, a_1),(b_2, a_2), (b_2, a_3)\}$.

$A\times B\times C=\{(a_1, b_1, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_1),(a_1,b_2, c_2),$
$(a_2, b_1, c_1),(a_2,b_1, c_2),(a_2, b_2, c_1),(a_2, b_2, c_2),$
$(a_3, b_1, c_1),(a_3, b_1, c_2),(a_3, b_2, c_1),(a_3, b_2, c_2)\}$.

n-арное отношение

n-арное отношение $\boldsymbol{R}$ на множествах X_1, X_2, …, X_n – это подмножество декартова произведения этих $\boldsymbol{n}$ множеств: $R \subseteq X_1 \times X_2 \times, \ldots, \times X_n$.

Если упорядоченный набор элементов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит отношению $\boldsymbol{R}$, то говорят, что элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ находятся в отношении $\boldsymbol{R}$.

n-арное отношение

Пример.

$A=\{a_1, a_2, a_3\}, B=\{b_1, b_2\}, C=\{c_1, c_2\}$.

$A\times B\times C=\{(a1, b1, c1), (a1, b1, c2), (a1, b2, c1), (a1, b2, c2), (a2, b1, c1), (a2, b1, c2), (a2, b2, c1), (a2, b2, c2), (a3, b1, c1), (a3, b1, c2), (a3, b2, c1), (a3, b2, c2)\}$.

$R\subseteq A\times B\times C$

$R_1 = \{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_1, c_2), (a_3, b_1, c_1), (a_3, b_1, c_2), (a_3, b_2, c_2)\}$

$R_2 = \{(a_2, b_2, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_1, c_1)\}$.

$A\times B=\{(a1, b1), (a1, b2), (a2, b1), (a2, b2), (a3, b1), (a3, b2)\}$

$R\subseteq A\times B$

$R_3=\{(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$.

Бинарные отношения

Бинарные отношения – это отношения между элементами двух множеств.

<u>Пример</u>.

$X=\{2, 3\}$, $Y=\{3, 4, 5\}$.

$X \times Y = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3,5)\}$.

$R \subseteq X \times Y$

R_1 –"$X<Y$" $R_1=\{(2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$

R_2 –"$X \geq Y$" $R_2= \{(3,3)\}$

R_3 –"$X>Y$" $R_3= \{\varnothing\}$

Способы задания бинарных отношений

1. Любое отношение может быть задано в виде ***списка***, элементами которого являются пары, определяемые этим отношением.

Пример.

$A=\{2,3,5,7\}$;

$B=\{24,25,26\}$;

$A\times B=\{(2,24),(2,25),(2,26),(3,24),(3,25),(3,26),(5,24),(5,25),$
$(5,26),(7,24),(7,25),(7,26)\}$

$R\subseteq A\times B$

R—“быть делителем”,

$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

Способы задания бинарных отношений

2. Бинарное отношение может быть задано с помощью ***матрицы***.

$R \subseteq X \times Y$

$|X| = n$, $|Y| = m$.

n – количество строк,

m – количество столбцов.

Ячейка (i,j) матрицы соответствует паре (x_i, y_j) элементов, где $x_i \in X$, а $y_j \in Y$.

В ячейку (i,j) помещается 1, если $(x_i, y_j) \in R$.

В ячейку (i,j) помещается 0, если $(x_i, y_j) \notin R$.

Способы задания бинарных отношений

Пример.

$A=\{2,3,5,7\}$;

$B=\{24,25,26\}$;

R— “быть делителем”

$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)\}$

A \ B	24	25	26
2	1		1
3	1		
5		1	
7			

Способы задания бинарных отношений

3. Бинарное отношение ***R*** на множествах ***X*** и ***Y*** может быть задано ***графически***.

Если пара (x_i, y_j) принадлежит отношению ***R***, соединяем изображенные точки x_i, y_j линией, направленной от первого элемента пары ко второму.

Направленные линии, соединяющие пары точек, называются ***дугами***, а точки, обозначающие элементы множеств – ***вершинами*** графа.

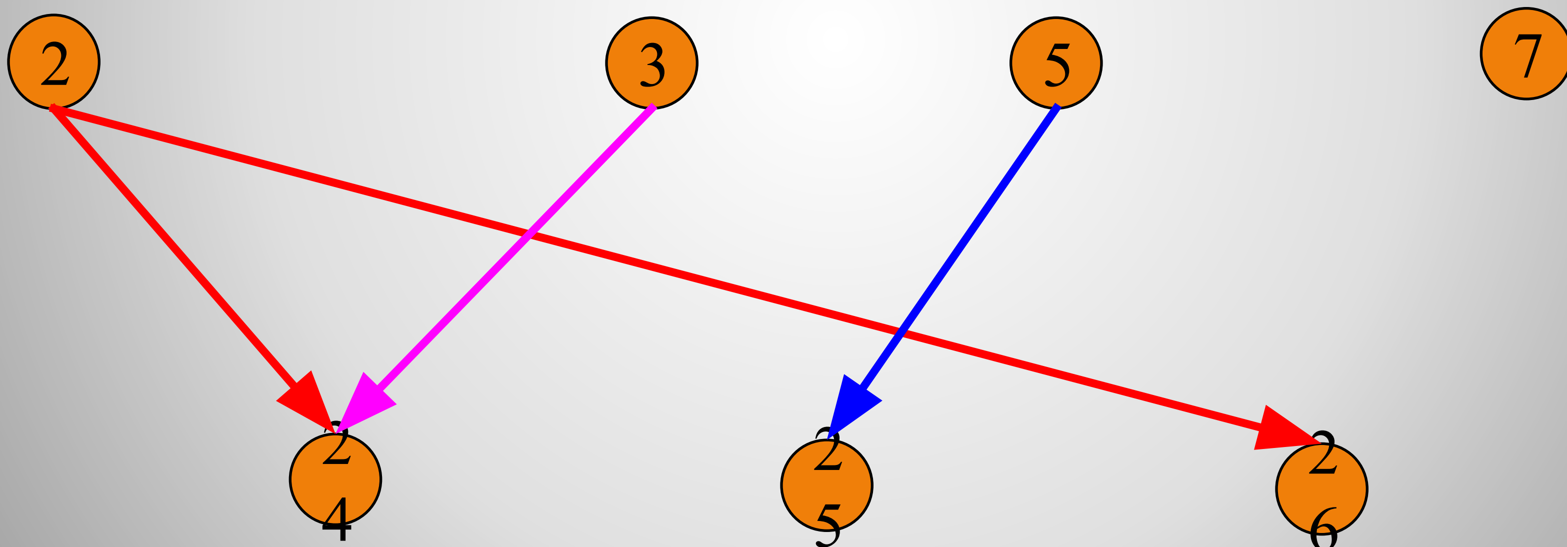
Способы задания бинарных отношений

Пример.

A={2,3, 5, 7}; *B={24,25,26}.*

R— “быть делителем”;

R={(2,24),(2,26),(3,24),(5,25)}.



Граф *G* отношения *R*

Частные случаи отношений

R – бинарное отношение на множестве ***A***: $R \subseteq A^2$.

$R = A^2$ –***полное*** отношение.

$R = \varnothing$ –***пустое*** отношение.

Если отношение содержит все возможные пары вида ***(a, a)*** и не содержит других пар элементов, то такое отношение называется ***тождественным*** ($R = E$).

Свойства бинарных отношений. Рефлексивность

1. Рефлексивность.

Отношение ***R*** на множестве ***X*** называется ***рефлексивным***, если для любого $x \in X$ имеет место ***xRx***, то есть, каждый элемент $x \in X$ находится в отношении ***R*** к самому себе.

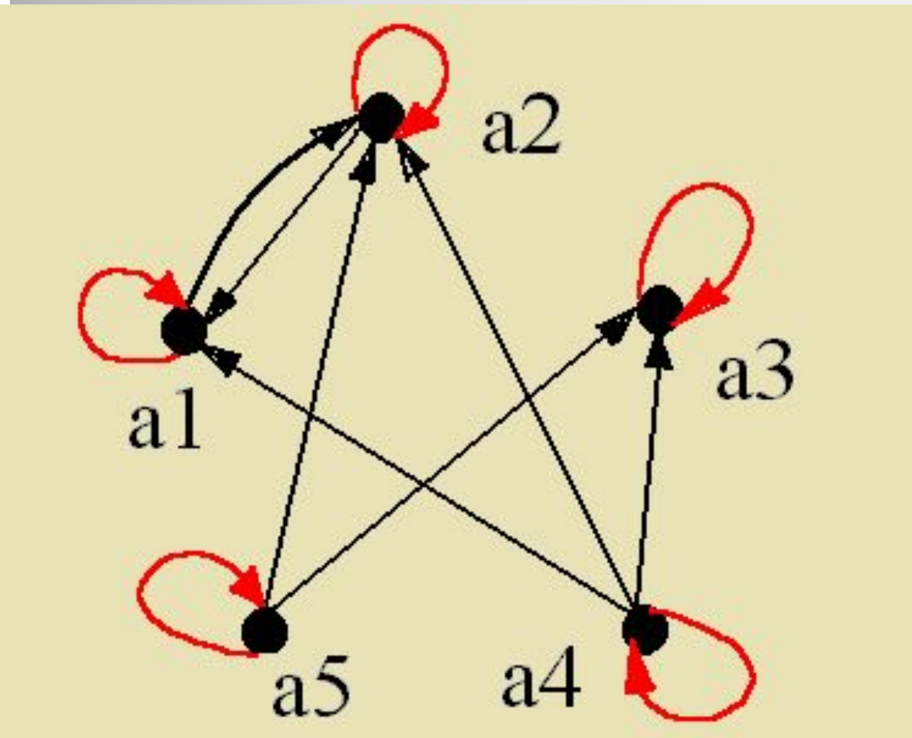
Все диагональные элементы матрицы равны 1; при задании отношения графом каждый элемент имеет петлю – дугу ***(x, x)***.

Пример.

R_1 — “$\le$” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “иметь общий делитель” на множестве целых чисел.

Свойства бинарных отношений. Рефлексивность



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	1			
a_2	1	1			
a_3			1		
a_4	1	1	1	1	
a_5		1	1		1

Свойства бинарных отношений. Антирефлексивность

2. Антирефлексивность.

Отношение R на множестве X называется ***антирефлексивным***, если из $x_1 R x_2$ следует, что $x_1 \neq x_2$.

Все диагональные элементы являются нулевыми; при задании отношения графом ни один элемент не имеет петли – нет дуг вида (x,x).

Пример.

R_1 — “$<$” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “быть сыном” на множестве людей.

Свойства бинарных отношений. Симметричность

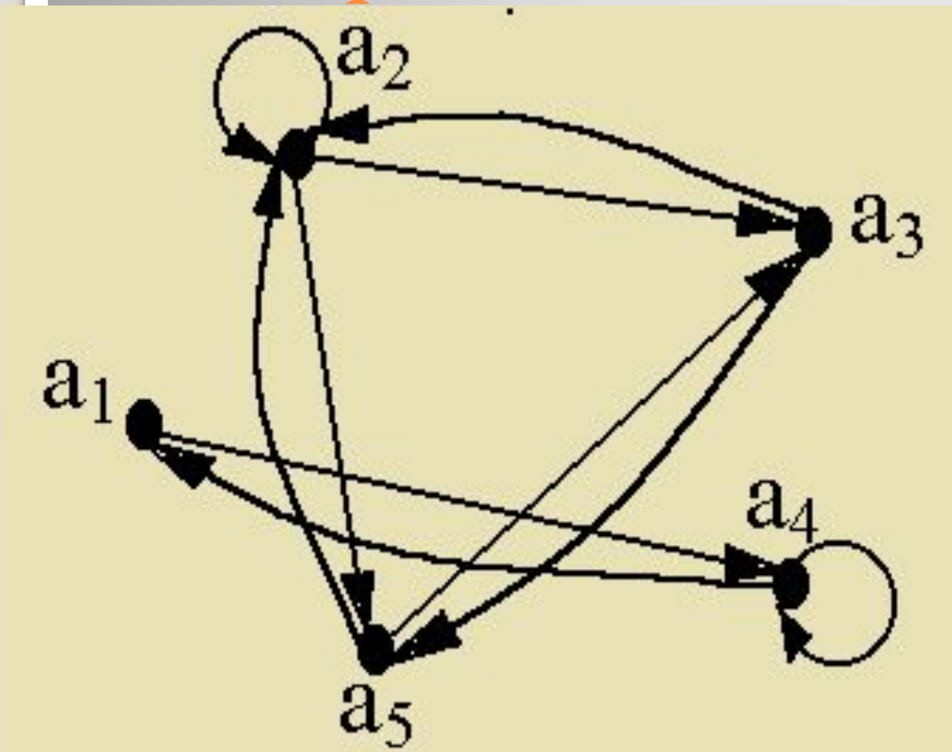
3. Симметричность.

Отношение R на множестве X называется ***симметричным***, если для пары $(x_1,x_2)\in X^2$ из x_1Rx_2 следует x_2Rx_1 (иначе говоря, для любой пары R выполняется либо в обе стороны, либо не выполняется вообще).

Матрица симметричного отношения является симметричной относительно главной диагонали, а в задающем графе для каждой дуги из x_i в x_k существует противоположно направленная дуга из x_k в x_i.

Граф и матрица симметричного отношения.

Симметричность



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1				1	
a_2		1	1		1
a_3		1			1
a_4	1				
a_5		1	1		

Пример.

R_1 — “=” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “быть родственником” на множестве людей.

Свойства бинарных отношений. Асимметричность

4. Асимметричность.

Отношение $\boldsymbol{R}$ называется ***асимметричным***, если для пары $(x_1,x_2) \in X^2$ из x_1Rx_2 следует, что не выполняется x_2Rx_1 (иначе говоря, для любой пары $\boldsymbol{R}$ выполняется либо в одну сторону, либо не выполняется вообще).

Пример.

R_1 — “>” на множестве вещественных чисел,

R_2 — “быть сыном” на множестве людей.

Свойства бинарных отношений. Антисимметричность

5. Антисимметричность.

Отношение R называется ***антисимметричным***, если из x_1Rx_2 и x_2Rx_1 следует, что $x_1=x_2$.

Пример.

R_1 — "$\leq$" на вещественной оси .

R_2 — "быть делителем"– на множестве действительных чисел.

Свойства бинарных отношений. Транзитивность

6. Транзитивность.

Отношение ***R*** называется ***транзитивным***, если для любых x_1, x_2, x_3 из x_1Rx_2 и x_2Rx_3 следует x_1Rx_3.

В графе, задающем транзитивное отношение ***R***, для всякой пары дуг таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья дуга, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй.

<u>Пример</u>.

R — “$\leq$” и “$<$” на множестве действительных чисел – транзитивны.

Свойства бинарных отношений. Антитранзитивность

7. *Антитранзитивность*.

Отношение R называется ***антитранзитивным***, если для любых x_1, x_2, x_3 из x_1Rx_2 и x_2Rx_3 следует, что x_1Rx_3 не выполняется.

Пример.

R_1 — “пересекаться с” на множестве отрезков,

R_2 — “быть отцом” на множестве людей.

Операции над отношениями

Так как отношение – это множество, то над отношениями выполняются все теоретико–множественные операции.

Пример.

$A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3\}$

$R_1=\{(a,1),(a,3),(b,2),(c,3)\}$, $R_2=\{(a,2),(a,3)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(a,3)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,2),(c,3)\}$

$R_1 \setminus R_2 = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

□$R_1 = \{(a,2),(b,1),(b,3),(c,1),(c,2)\}$

Аналитическое доказательство тождеств

$$\underbrace{(A\times B)\cap C}_{X}=\underbrace{(A\cap C)\times(B\cap C)}_{Y}$$

$$X=Y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X\subseteq Y \\ Y\subseteq X \end{array}\right.$$

Пусть $x\in X \Rightarrow x\in (A\times B)\cap C \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A\times B \\ x\in C \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times B \\ (a,b)\in C \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\in A \\ b\in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a\in C \\ b\in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\in A\cap C \\ b\in B\cap C \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b)\in(A\cap C)\times(B\cap C)$$

Аналитическое доказательство тождеств

$$(A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$$

X Y

$$X=Y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X\subseteq Y\\ Y\subseteq X\end{array}\right.$$

Пусть $(a,b)\in Y\Rightarrow(a,b)\in(A\cap C)\times(B\cap C)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\in A\cap C\\ b\in B\cap C\end{array}\right.\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a\in A\\ a\in C\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}b\in B\\ b\in C\end{array}\right.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(a,b)\in A\times B\\ a\in C\\ b\in C\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(a,b)\in A\times B\\ (a,b)\in C\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a,b)\in(A\times B)\cap C$$

$$\left[\begin{array}{l}(A\times B)\cap C\subseteq(A\cap C)\times(B\cap C)\\ (A\cap C)\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap C\end{array}\right.\Rightarrow(A\times B)\cap C=(A\cap C)\times(B\cap C)$$

Обратное отношение

Пусть ***R*** – бинарное отношение.

Обратное отношение к ***R*** обозначается $\boldsymbol{R^{-1}}$.

Упорядоченная пара ***(y,x)*** принадлежит $\boldsymbol{R^{-1}}$ тогда и только тогда, когда ***(x,y)*** принадлежит ***R***.

Если $R \subseteq X^2$, то $R^{-1} \subseteq X^2$, где ***X*** – некоторое множество.

Если бинарное отношение задано на двух множествах ***X*** и ***Y*** – $R \subseteq X \times Y$, то $R^{-1} \subseteq Y \times X$.

Обратное отношение

Пример.

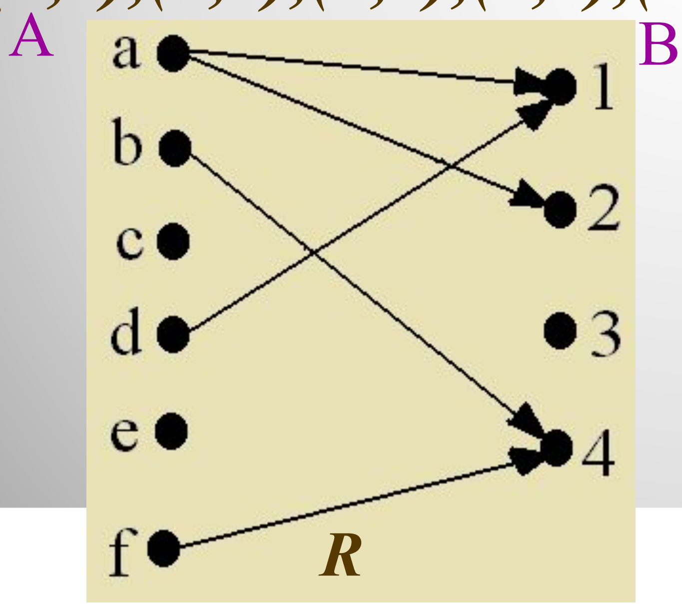
$A=\{a,b,c,d,e,f\}$, $B=\{1,2,3,4\}$

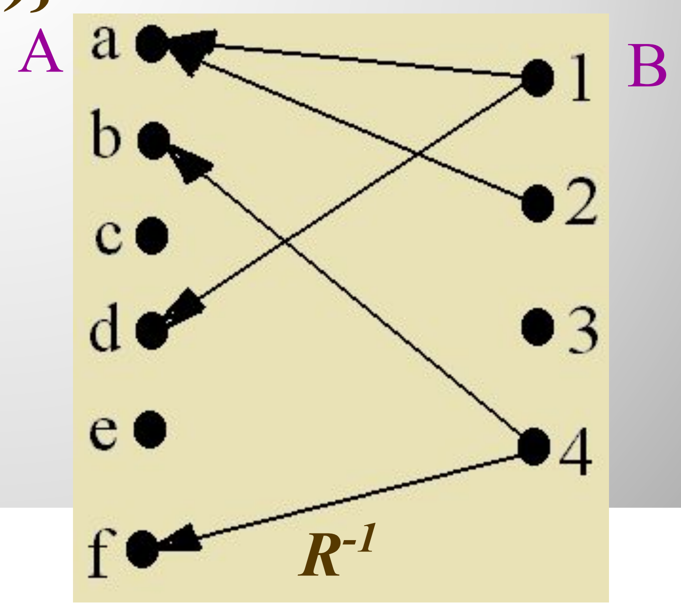
$R\subseteq A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3),$

$(c,4),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4),(e,1),(e,2),(e,3),(e,4),(f,1),(f,2),(f,3),(f,4)\}$
;

$R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$;

$R^{-1}=\{(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)\}$.





Композиция отношений

Пусть R и S – отношения, $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, где X, Y, Z – некоторые множества.

Композицией отношений R и S называется отношение, состоящее из упорядоченных пар (x,z), $x \in X$, $z \in Z$, для которых существует элемент $y \in Y$ такой, что выполняются условия $(x,y) \in R$, $(y,z) \in S$.

Композиция отношений R и S обозначается $S \circ R$.

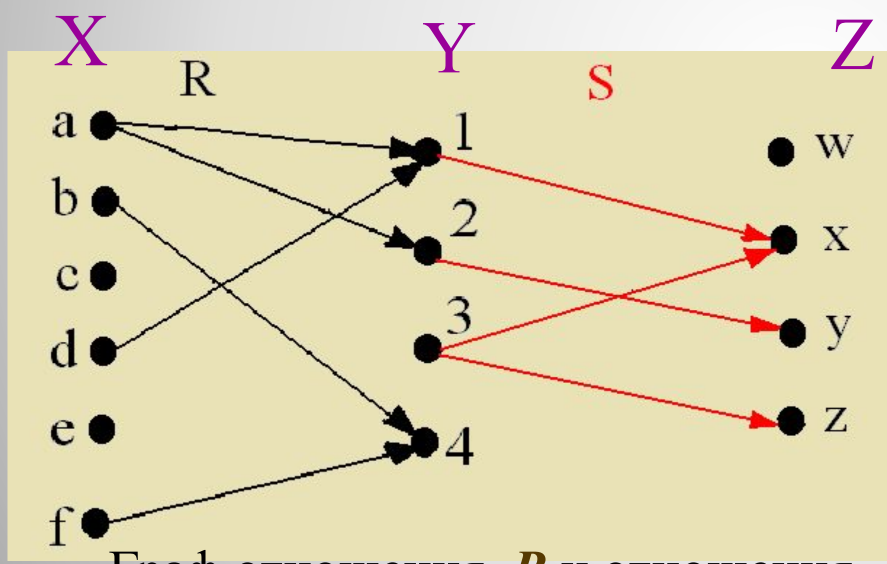
Композиция отношений

<u>Пример</u>.

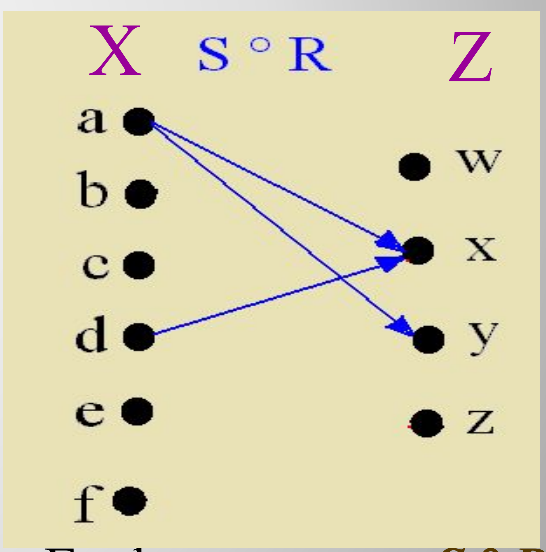
$X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$, $Z=\{w,x,y,z\}$.

$R\subseteq X\times Y$ $R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$,

$S\subseteq Y\times Z$ $S=\{(1,x),(2,y),(3,x),(3,z)\}$.



Граф отношения ***R*** и отношения
$S=\{(1,x),(2,y),(3,x),(3,z)\}$



Граф отношения $S \circ R$

$S \circ R = \{(a,x),(a,y),(d,x)\}$

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение называется ***отношением эквивалентности*** (обозначается ~), если оно

1) рефлексивно;
2) симметрично;
3) транзитивно.

Пример.

R_1 — “=” на любом множестве.

R_2 — “учиться в одной группе” на множестве студентов университета.

Отношение порядка

Бинарное отношение называется ***отношением частичного порядка*** (обозначается $\leq$), если оно

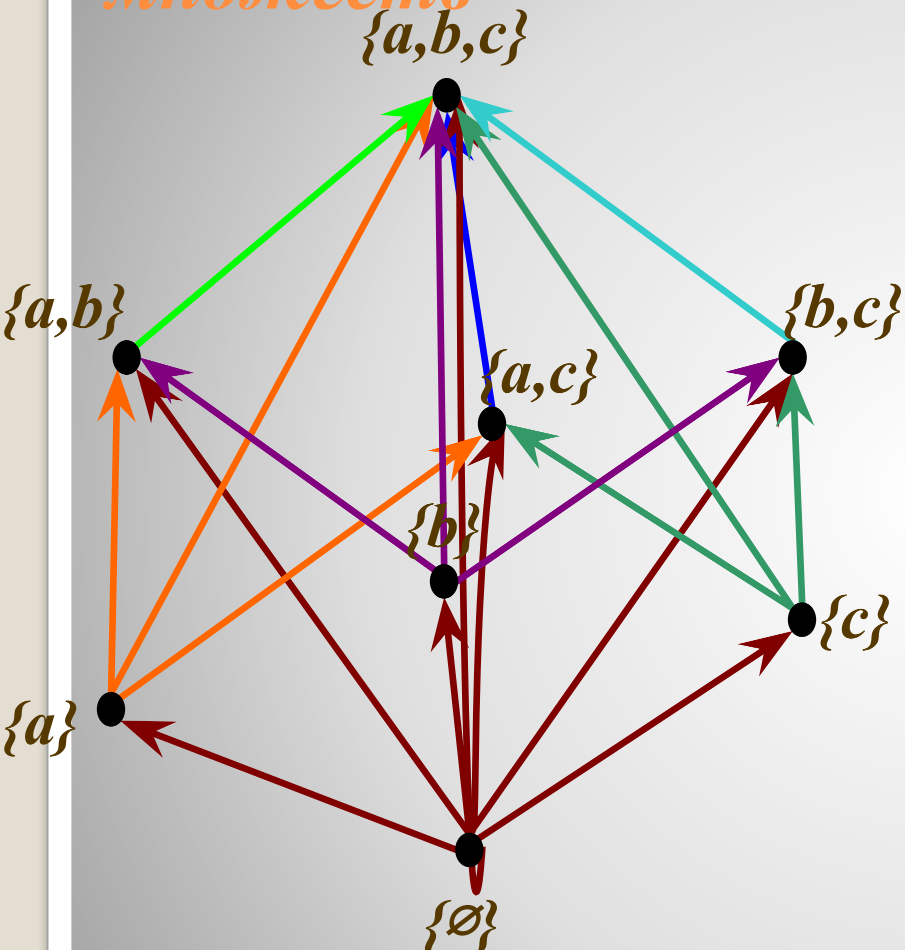
1) рефлексивно;
2) антисимметрично;
3) транзитивно.

Пример.

R_1 — "являться нестрогим включением", заданное на системе множеств.

Если на множестве задано отношение частичного порядка, то это множество называется ***частично упорядоченным.***

Отношение порядка. Отношение включения множеств



Граф отношения включения множеств

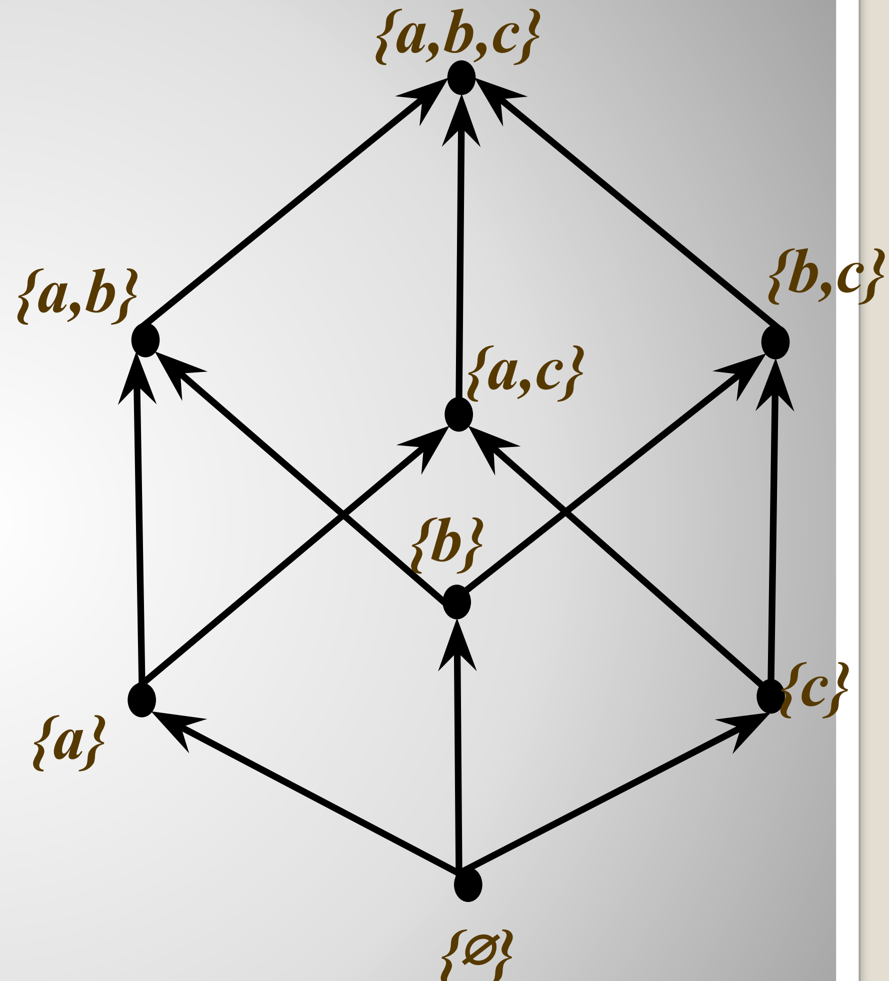


Диаграмма Хассе отношения включения множеств

Отношение порядка

Элементы ***a*** и ***b*** называются ***сравнимыми*** в отношении частичного порядка ***R***, если выполняется хотя бы одно из соотношений ***aRb*** или ***bRa***.

Множество ***A***, на котором задано отношение частичного порядка ***R*** и для которого любые два элемента этого множества сравнимы, называется ***линейно упорядоченным*** или ***полностью упорядоченным.***

Отношение порядка

Отношение частичного порядка также называется ***отношением нестрогого порядка***.

В отличии от него ***отношение строгого порядка*** (обозначается <):

1) антирефлексивно (если $a<b$, то $a \neq b$)
2) асимметрично (если $a<b$ то не верно $b<a$)
3) транзитивно (если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$).

Пример.

R_1 — “>” на любом множестве.

R_2 — “жить в одном городе” на множестве жильцов района.

Отношение толерантности

Отношение называется ***отношением толерантности***, если оно:

1) рефлексивно;
2) симметрично;
3) антитранзитивно.

Пример.

$A=\{1,2,3,4\};$

$R\subseteq A^2;$

$R=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$

Применение свойств бинарных отношений

$A=\{1,2,3,4\};$

$R_1 \subseteq A^2;$

$R_2 \subseteq A^2.$

$R_1=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\};$

$R_2=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$

	R_1	R_2
Рефлексивность	+	-
Антирефлексивность	-	+
Симметричность	-	-
Асимметричность	-	+
Антисимметричность	-	-
Транзитивность	+	+
Антитранзитивность	-	-
Эквивалентности	-	-
Толерантности	-	-
Частичного порядка	-	-
Строгого порядка	-	+