
Теория систем счисления

Число

- Под *числом* мы будем понимать его *величину*, а не его *символьную запись*
- Число: 10 – X – «десять» – «ten»
- Символы, при помощи которых записывается число, называются *цифрами*.
- Под *системой счисления* принято называть *совокупность приемов обозначения (записи) чисел*.

Непозиционная система счисления

- системы счисления, в которых для обозначения чисел вводятся специальные знаки, количественное значение которых («вес» символа) всегда одинаково и не зависит от их места в записи числа.
- В римской системе счисления для записи числа в качестве цифр используются буквы латинского алфавита.
- I – 1 V – 5 X – 10
- L – 50 C – 100 D – 500 M – 1000

Для записи чисел в римской системе используются два правила:

- 1) каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него;
 - 2) каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к нему.
 - $III = 1+1+1=3$ $IV = -1+5 = 4$ $VI = 5+1 = 6$ $XL = -10+50 = 40$ $LX = 50+10 = 60$
 $XC = -10+100 = 90$ $CIX = 100-1+10 = 109$
-
- $MCMXCVIII = 1000-100+1000-10+100+5+1+1+1=1998$

Позиционный принцип в системах счисления

- *Позиционной системой счисления* называется система счисления, в которой значение каждой цифры в изображении числа зависит от ее положения в ряду других цифр, изображающих число.
- *Положение, занимаемой цифрой при письменном обозначении числа называется разрядом.*

$$1978 = 1000 + 900 + 70 + 8 = 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

$$3019,7294 = 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}$$

- *Базис системы счисления* — это последовательность ключевых чисел, каждое из которых задает значение цифры в ее позиции или «вес» каждого разряда
- каждые *десять* единиц образуют один десяток, *десять* десятков образуют одну сотню, *десять* сотен образуют одну тысячу и т.д.
- 10 – *основание* 10-чной с.с.

Позиционный принцип в системах счисления

- Выбирая за *основание системы счисления* любое натуральное число k , то есть, считая, что k единиц любого разряда образует одну единицу соседнего более крупного разряда, приходим к так называемой *k -ной системе счисления*.
 - Если $k < 10$, то цифры от k до 9 становятся лишними.
 - Если $k > 10$, то для чисел от 10 до $k-1$ включительно надо придумать специальные значения цифр.
-

Позиционный принцип в системах счисления

- Для 16-ричной системы счисления:

$10_{10} — A_{16}$

$11_{10} — B_{16}$

$12_{10} — C_{16}$

$13_{10} — D_{16}$

$14_{10} — E_{16}$

$15_{10} — F_{16}$

Позиционный принцип в системах счисления

- Базис двоичной системы счисления:
 $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots$
- Базис восьмеричной системы счисления:
 $1, 8, 64, 512, \dots, 8^n, \dots$
- Или в общем виде: $q_0=1, q_1=q, q_2=q^2, q_3=q^3, \dots, q_n=q^n, \dots$, где $q \in \mathbb{N}$ и $q \neq 1$.
- Число q называют *основанием системы счисления*.

Два способа записи числа

- Каждое число в любой позиционной системе может быть записано в цифровой и многочленной форме:

- **Цифровая форма:**

$$A_q = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_q,$$

где a_i – цифра в диапазоне от 0 до $q-1$.

- **Многочленная форма:**

$$A_q = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + a_{n-2} q^{n-2} + \dots + a_2 q^2 + a_1 q^1 + a_0,$$

где q – базис системы счисления.

Перевод целых чисел. Алгоритм 1

- Для того чтобы исходное целое число A_q , в системе счисления с основанием q , заменить равным ему целым числом B_p , в системе счисления с основанием p , необходимо число A_q разделить нацело по правилам q -арифметики на новое основание p . Полученный результат вновь разделить нацело на основание p и т.д. до тех пор, пока частное не превратится в ноль. Цифрами искомого числа B_p являются остатки от деления, выписанные так, чтобы последний остаток являлся бы цифрой старшего разряда числа B_p .
- Число p перед делением должно быть записано в системе с основанием q .
- Так как нам известна только десятичная арифметика, то этот алгоритм будет удобен при переводе чисел из десятичной системы счисления в любую другую.

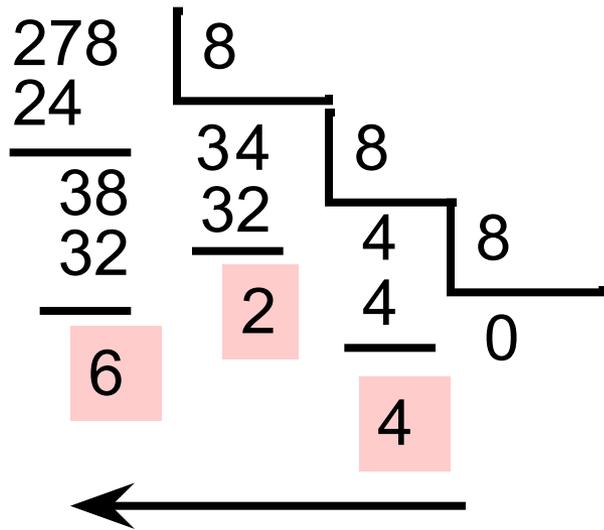
Пример перевода десятичного числа в двоичную систему счисления

$$58_{10} = 111010_2$$

№	A_{10}	x_i	Остаток b_i
0.	58		$b_0 = 58 \bmod 2 = 0$
1.		$x_1 = \left[\frac{58}{2} \right] = 29$	$b_1 = 29 \bmod 2 = 1$
2.		$x_2 = \left[\frac{29}{2} \right] = 14$	$b_2 = 14 \bmod 2 = 0$
3.		$x_3 = \left[\frac{14}{2} \right] = 7$	$b_3 = 7 \bmod 2 = 1$
4.		$x_4 = \left[\frac{7}{2} \right] = 3$	$b_4 = 3 \bmod 2 = 1$
5.		$x_5 = \left[\frac{3}{2} \right] = 1$	$b_5 = 1 \bmod 2 = 1$
6.		$x_6 = \left[\frac{1}{2} \right] = 0$	

Перевод целых чисел. Алгоритм 1

Переведем $278_{10} \rightarrow 8$



$$278_{10} = 426_8$$

$$278_{10} = 100010110_2$$

$$278_{10} = 116_{16}$$

Перевод целых чисел. Алгоритм 1

- При переводе числа из десятичной системы счисления в систему счисления, основание которой больше десяти, нужно очень внимательно относиться к записи цифр, чей «вес» больше или равен десяти.

$$574_{10 > 16}$$

574		16	
48		35	16
94		32	2
80		3	
14			

- один остаток – 1 цифра !
- Остатками здесь служат числа от 0 до 15. Это цифры шестнадцатеричной системы счисления. По таблице определяем, что 14 - это цифра E.

- $574_{10} = 23E_{16}$

Другой способ перевода из 10-чной с.с. в 2-чную с.с. Алгоритм 1А.

- разложение исходного числа на сумму степеней двойки:

в искомом двоичном числе единицы будут стоять в позициях тех разрядов, степени двойки которых присутствуют в разложении.

$$234_{10} = 128 + 64 + 32 + 8 + 2 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 =$$

$$\begin{array}{cccccccc} & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ = & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} 2$$

Перевод целых чисел. Алгоритм 2

- Для того чтобы исходное целое число A_q заменить равным ему целым числом B_p , достаточно цифру старшего разряда числа A_q умножить по правилам p -арифметики на старое основание q . К полученному произведению прибавить цифру следующего разряда числа A_q . Полученную сумму вновь умножить на q по правилам p -арифметики, вновь к полученному произведению прибавить цифру следующего (более младшего) разряда. Так поступают до тех пор, пока не будет прибавлена младшая цифра числа A_q . Полученное число и будет искомым числом B_p .
- Для перевода из какой системы счисления в какую можно использовать данный алгоритм?

Перевод целых чисел. Алгоритм 2

- $439_{16} = (4 \times 16 + 3) \times 16 + 9 = 1081_{10}$
- $1011101_2 = (((((1 \times 2 + 0) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 1) \times 2 + 0) \times 2 + 1 = 93_{10}$
- $645_8 = (6 \times 8 + 4) \times 8 + 5 = 421_{10}$

Другой способ перевода целых чисел из q-й с.с. в 10-чную. Алгоритм 2А.

1. Над цифрами числа в q-й с.с. расставляются степени основания справа налево, начиная от 0
2. Число в 10-чной с.с. получается суммированием произведений цифр числа на проставленные степени основания q.

$$\begin{array}{cccccccc} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1011101_2 & = & 1 \times 2^6 & + & 0 \times 2^5 & + & 1 \times 2^4 & + & 1 \times 2^3 & + & 1 \times 2^2 & + & 0 \times 2^1 & + & 1 \times 2^0 & = & 93_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 \\ 439_{16} & = & 4 \times 16^2 & + & 3 \times 16^1 & + & 9 \times 16^0 & = & 93_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 \\ 645_8 & = & 6 \times 8^2 & + & 4 \times 8^1 & + & 5 \times 8^0 & = & 421_{10} \end{array}$$

1. Домашнее задание

1. Выучить теорию, определения и алгоритмы, быть готовыми к письменной работе по теории и практике
2. Выучить степени числа 2 от 0 до 10
3. Заполнить таблицу

10	2	16	8
391			
	111101010		
		F1	
			555
525			
	10111100		
		124	
			237

Домашнее задание

4. Заполнить таблицу

10	2	8	16	5
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

Перевод правильных дробей.

Алгоритм 3

- Для того чтобы исходную правильную дробь $0,A_q$ заменить равной ей правильной дробью $0,B_p$, нужно $0,A_q$ умножить на новое основание p по правилам q -арифметики. Целую часть полученного произведения считать цифрой старшего разряда искомой дроби. Дробную часть полученного произведения вновь умножить на p , целую часть полученного результата считать следующей цифрой искомой дроби. Эти операции продолжать до тех пор, пока дробная часть не окажется равной нулю, либо не будет достигнута требуемая точность.
- Для перевода из какой системы счисления в какую можно использовать данный алгоритм?

Перевод правильных дробей.

Алгоритм 3

$$0,375_{10} = 0,011_2$$

$$0,375_{10} = 0,3_8$$

$$0,375_{10} = 0,6_{16}$$

$$0,375 \times 2 = \mathbf{0,75}$$

$$0,375 \times 8 = \mathbf{3,0}$$

$$0,375 \times 16 = \mathbf{6,0}$$

$$0,75 \times 2 = \mathbf{1,5}$$

$$0,5 \times 2 = \mathbf{1,0}$$



Перевод правильных дробей.

Алгоритм 4

- Для того чтобы исходную правильную дробь $0, A_q$ заменить равной ей правильной дробью $0, B_p$, нужно цифру младшего разряда дроби $0, A_q$ разделить на старое основание q по правилам p -арифметики. К полученному частному прибавить цифру следующего (более старшего) разряда и далее поступать также, как и с первой цифрой. Эти операции продолжать до тех пор, пока не будет прибавлена цифра старшего разряда исходной дроби. После этого полученную сумму разделить еще раз на q .
- Для перевода из какой системы счисления в какую можно использовать данный алгоритм?

Перевод правильных дробей.

Алгоритм 4

- $0,1101_2 = (((1:2+0):2+1):2+1):2 = 0,8125_{10}$
- $0,45_8 = (5:8+4):8 = 0,578125_{10}$
- $0,F03_{16} = ((3:16+0):16+15):16 = 0,9382324_{10}$

дробей из q -й с.с. в 10-чную.

1. Над цифрами дроби в q -й с.с. расставляются степени основания слева направо от запятой, начиная от $-1, -2, \dots$
2. Число в 10-чной с.с. получается суммированием произведений цифр дроби на проставленные степени основания q .

$$0, \overset{-1}{1} \overset{-2}{1} \overset{-3}{0} \overset{-4}{1} {}_2 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 0,8125_{10}$$

$$0, \overset{-1}{4} \overset{-2}{5} {}_8 = 4 \times 8^{-1} + 5 \times 8^{-2} = 0,578125_{10}$$

$$0, \overset{-1}{F} \overset{-2}{0} \overset{-3}{3} {}_{16} = F \times 16^{-1} + 0 \times 16^{-2} + 3 \times 16^{-3} = 0,9382324_{10}$$

Домашнее задание

1. Выучить теорию, определения и алгоритмы, быть готовыми к письменной работе по теории и практике
2. Выучить степени числа 2 от 0 до 10
3. Заполнить таблицу

10	2	16	8
0,3125			
	= 0,011		
		= 0,7	
			= 0,4
0,5625			
	=0,0001011		
		= 0,32	
			= 0,31

Домашнее задание

4. Заполнить таблицу

10	2	16	8
402,5			
	1010111101,01		
		265,(6)	
			1107,2(3146)
414,375			
	10101010,101		
		77,C	
			=343,1

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 1

- Для записи целого двоичного числа в системе с основанием $q=2^n$ достаточно данное двоичное число разбить на грани справа налево (т.е. от младших разрядов к старшим) по n цифр в каждой грани. Затем каждую грань следует рассматривать как n -разрядное двоичное число и записать его как цифру в системе с основанием $q=2^n$.
-

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 1

2-я система счисления	8-я система счисления
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

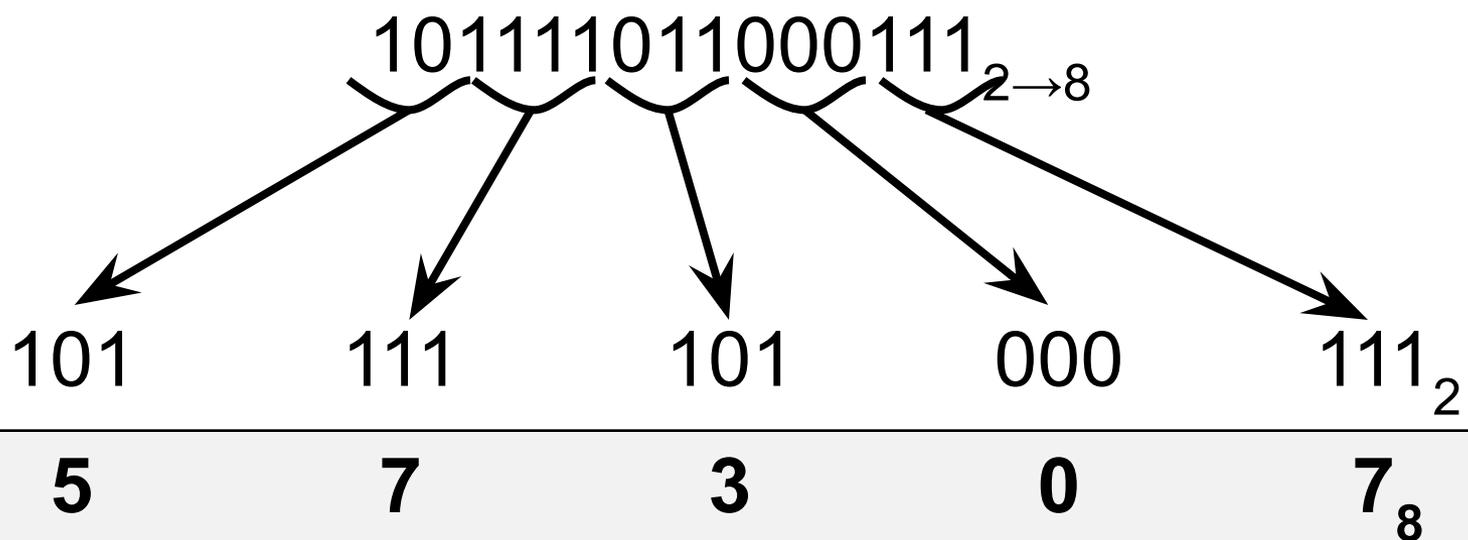
Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 1

2-я с.с.	16-я с.с.	2-я с.с.	16-я с.с.
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

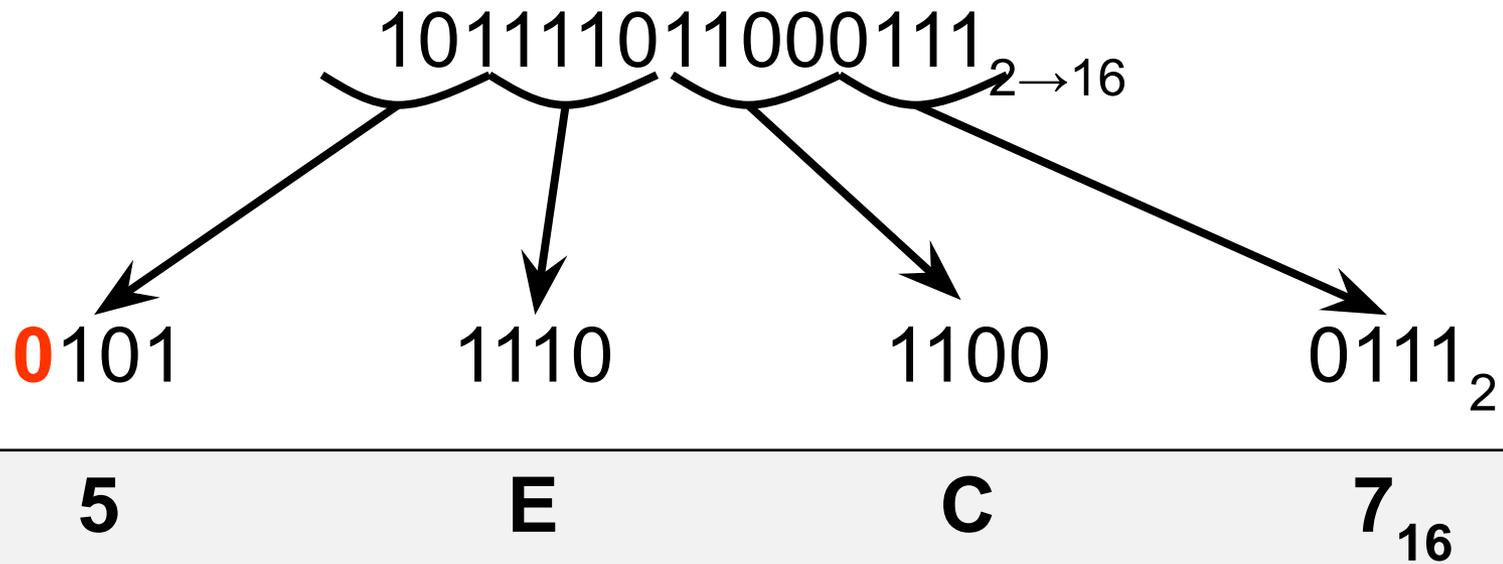
Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 1

- Создайте подобную таблицу перевода для четверичной системы счисления.
-

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 1



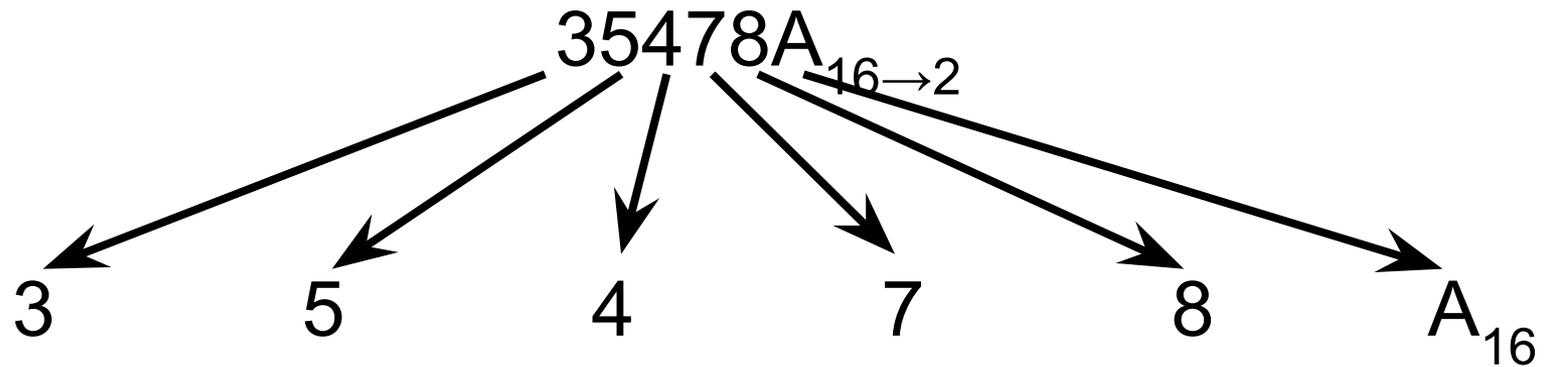
Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 1



Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 2

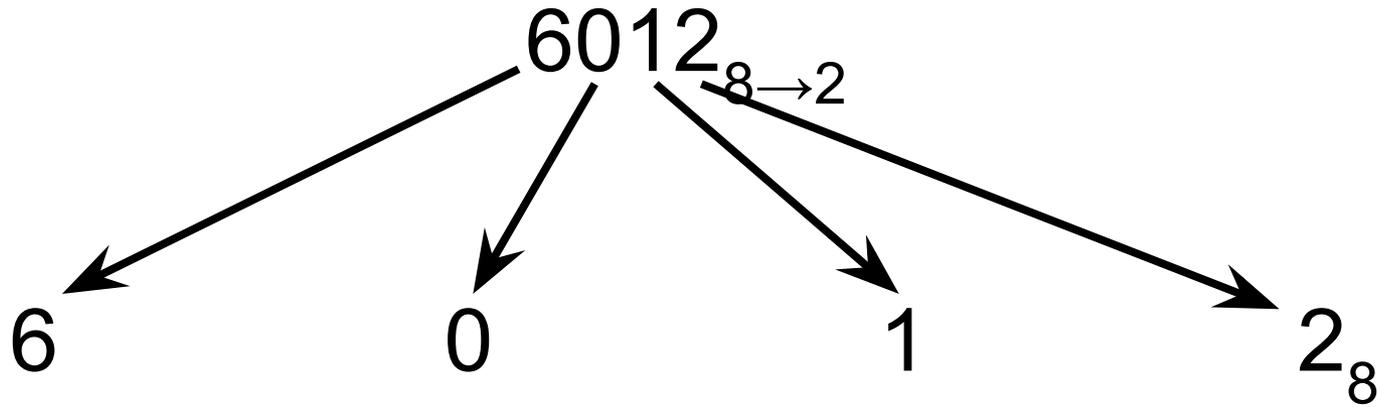
- Для замены целого числа, записанного в системе счисления с основанием $p=2^n$, равным ему числом в двоичной системе счисления, достаточно каждую цифру данного числа заменить n -разрядным двоичным числом.
-

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 2



0011 **0101** **0100** **0111** **1000** **1010₂**

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 2



110

000

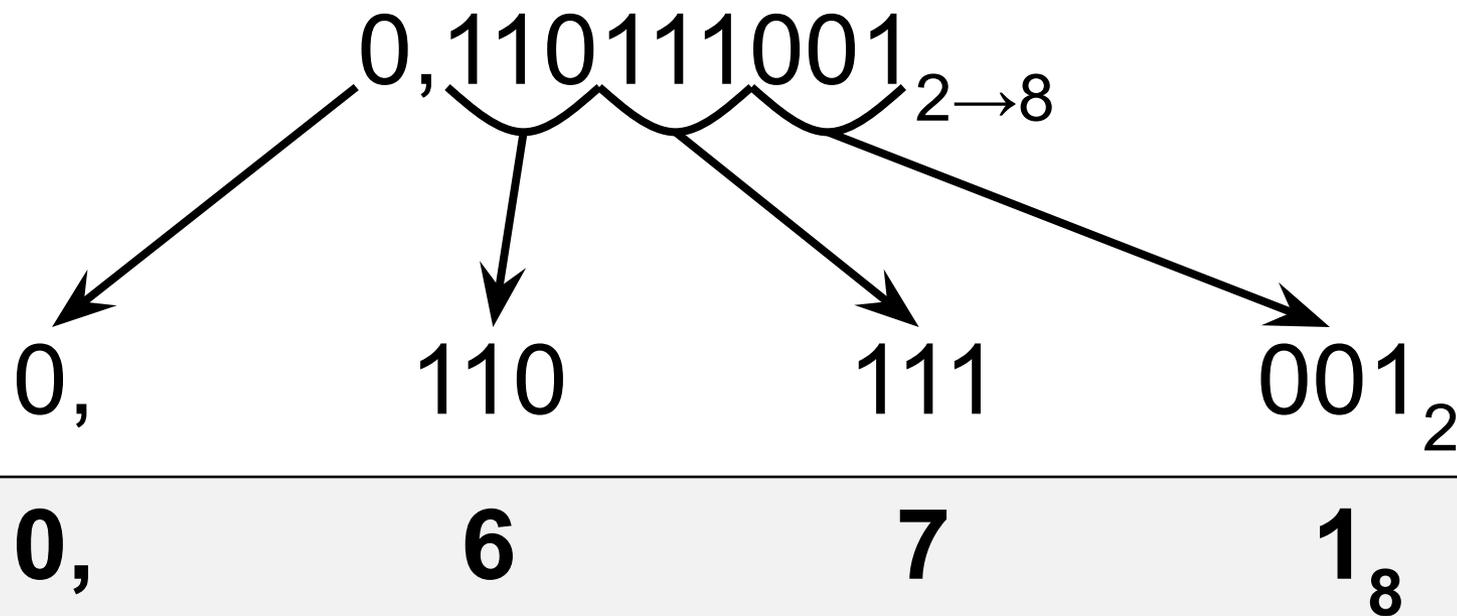
001

010₂

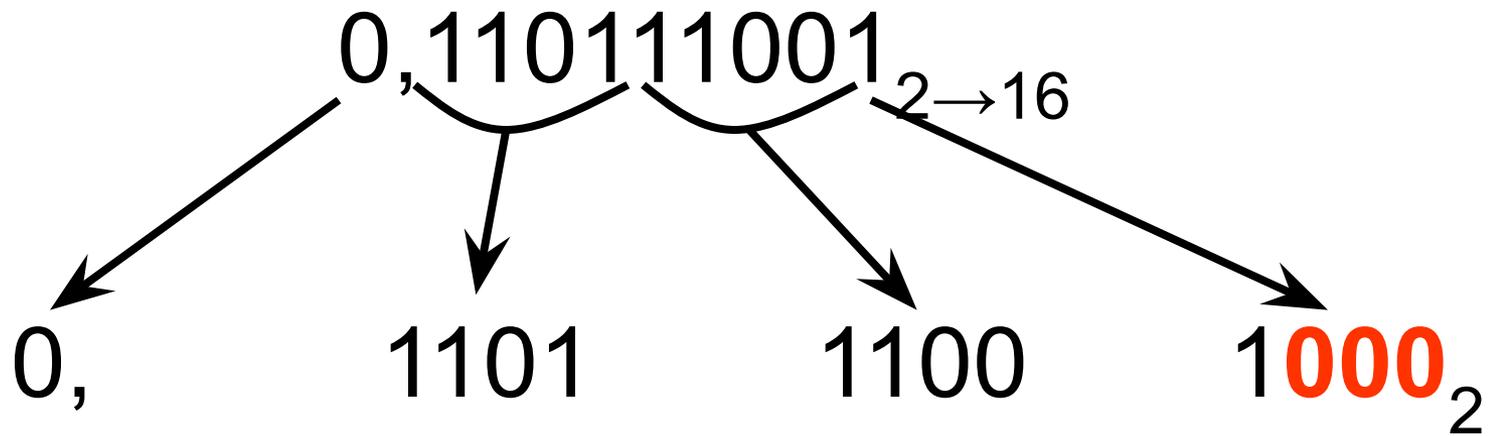
Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 3

- Для перевода правильных двоичных дробей в систему счисления с основанием $q=2^n$ необходимо данную дробь разбить на грани слева направо от запятой по n цифр в каждой. Затем каждую грань следует рассматривать как n -разрядное двоичное число и записать его как цифру в системе счисления с основанием $q=2^n$.

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 3



Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 3



0,

D

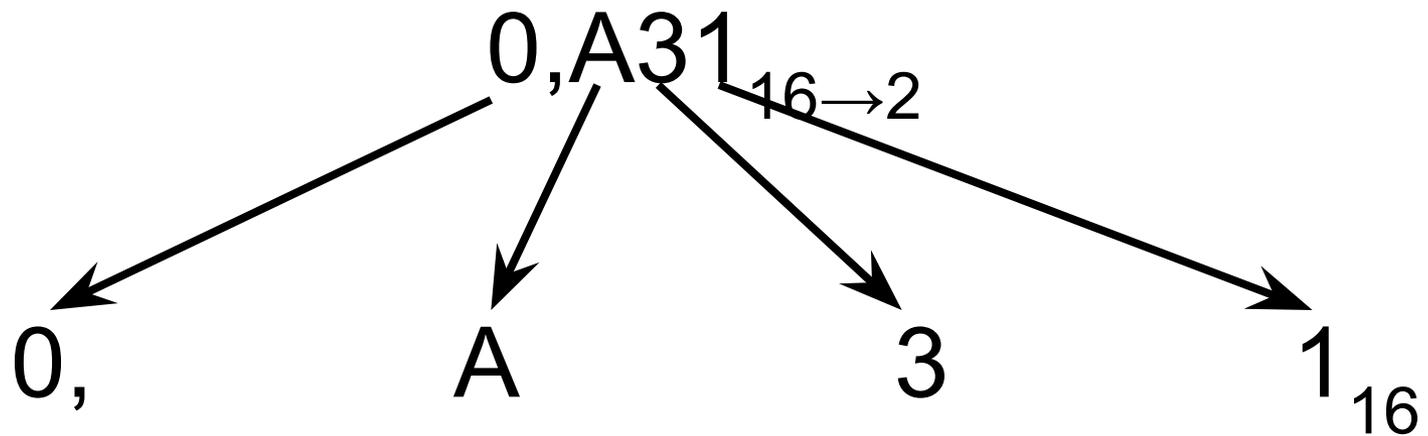
C

8₁₆

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 4

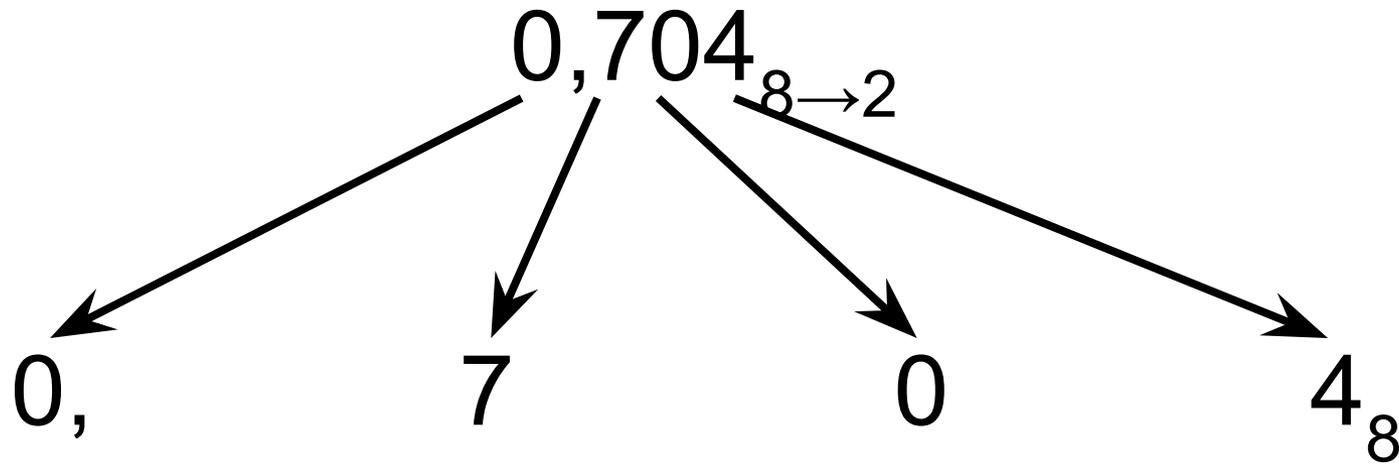
- Для замены правильной дроби, записанной в системе счисления с основанием $p=2^n$, равной ей дробью в двоичной системе счисления достаточно каждую цифру данной дроби заменить n -разрядным двоичным числом.

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 4



0,	1010	0011	0001₂
-----------	-------------	-------------	-------------------------

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16». Теорема 4



0 , 111 000 100_2

Взаимосвязь между системами счисления с основаниями «2», «8» и «16»

- Подумайте, будут ли правомочны подобные теоремы для систем счисления с основаниями 3, 9, 27.
-

5. Домашнее задание

Заполнить таблицу

8	2	16
2674,74		
	1000100010,111	
		= 24A,A
3660,25		
	= 11011011,101	
		= 111,01