Лекция №15

Теорема 1. (Гамильтона-Кэли). Всякое линейное преобразование является корнем своего характеристического многочлена.

Евклидовы пространства.

Определение. Линейное пространство **L** называется евклидовым пространством, если выполняются следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам x и y этого пространства ставится в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением этих элементов (будем обозначать **(x, y)**).

II. Указанное правило подчинено следующим аксиомам:

1) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \epsilon \boldsymbol{L} \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ – коммутативность.

2) $(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y})$ - дистрибутивность для $\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y}\ \epsilon \boldsymbol{L}$.

3) $\forall \boldsymbol{\lambda} \epsilon \mathbf{R}$ **и** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ \epsilon \boldsymbol{L} \quad (\boldsymbol{\lambda x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

4) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \epsilon \boldsymbol{L}$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > \mathbf{0}$, *если* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$,

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$, *если* $\boldsymbol{x}$ – нулевой элемент.

Примеры евклидовых пространств

1. Рассмотрим множество всех векторов в трехмерном пространстве со скалярным произведением $(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}) = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{b}}| \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\varphi}$, где $\boldsymbol{\varphi} = (\vec{\boldsymbol{a}},^\wedge \vec{\boldsymbol{b}})$.
2. $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ - множество непрерывных функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$. Скалярное произведение в виде:

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx\,.$$

3. Множество $\boldsymbol{R}^n$, если

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n,$$

если $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$, $\tilde{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \dots, \boldsymbol{y}_n)$.

<u>Теорема 2</u> (неравенство Коши-Буняковского). Для любых двух элементов x и y произвольного евклидова пространства справедливо неравенство:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

называемое неравенством Коши-Буняковского.

Определение. Линейное пространство L называется нормированным, если выполнены следующие два требования.

I. Имеется правило, по которому каждому элементу x пространства L ставиться в соответствие вещественное число, называемое нормой элемента x (обозначается $\|x\|$).

II. Указанное правило подчинено следующим аксиомам:

1) $\|\boldsymbol{x}\| > \mathbf{0}$, если $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ и $\|\boldsymbol{x}\| = \mathbf{0}$, если $\boldsymbol{x}$ – нулевой элемент.

2) $\forall \boldsymbol{x} \epsilon \boldsymbol{L}$ и $\forall \boldsymbol{\lambda} \epsilon \boldsymbol{R}$

$$\|\boldsymbol{\lambda x}\| = |\boldsymbol{\lambda}| \cdot \|\boldsymbol{x}\|.$$

3) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \epsilon \boldsymbol{L}$ $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ выполнено неравенство треугольника.

Теорема 3. Всякое евклидово пространство является нормированным с нормой:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

В любом евклидовом пространстве между двумя произвольными элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ можно ввести понятие угла.

<u>Определение.</u> Углом между элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называется угол (изменяющийся от $\boldsymbol{0}$ до $\boldsymbol{\pi}$) и определяемый соотношением:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)(y, y)}}.$$

<u>Определение.</u> Элементы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства $\boldsymbol{L}$ называются ортогональными, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ (в этом случае $\boldsymbol{\cos\varphi = 0}$).

<u>Определение.</u> Будем говорить, что n элементов $\boldsymbol{e_1, e_2, \dots, e_n}$ $\boldsymbol{n}$-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{E}$ образуют ортонормированный базис этого пространства, если эти элементы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т.е.

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, \text{при } i = j \\ 0, \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

▪ ***Теорема 4.*** Во всяком $\boldsymbol{n}$-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

В доказательстве теоремы применяется следующий алгоритм построения по данной системе n-линейно независимых элементов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ - системы $\boldsymbol{n}$ попарно ортогональных элементов $\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}$, норма каждого из которых равна $\mathbf{1}$.

$$\boldsymbol{e_1} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\sqrt{(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1})}}$$

$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_2)}}$, где $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$

$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_3)}}$, где $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{b}_n}{\sqrt{(\boldsymbol{b}_n,\boldsymbol{b}_n)}}$, где $\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n - (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_{n-1})\boldsymbol{e}_{n-1} - \cdots - (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$.

Этот алгоритм называется процессом ортогонализации линейно независимых элементов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$.