ТЕОРИЯ РЯДОВ

1.3. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

- Признак сравнения.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - ряды с положительными членами,

причем $u_n \leq v_n$ для всех n, начиная с некоторого. Тогда:

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Пример 1

Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots.+\frac{1}{(1+n)!}+\ldots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+....+\frac{1}{(1+n)!}+...$$

Решение

Сравним его с убывающей геометрической прогрессией:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^n}+...$$

Каждый член первого ряда, начиная со второго, меньше соответствующего члена второго ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2} \qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3} \quad .... \quad \frac{1}{(1+n)!}<\frac{1}{2^n}$$

Второй ряд сходится, следовательно первый ряд сходится.

Ответ: ряд сходится

Пример 2

Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$$

Решение

Сравним его с гармоническим рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{n}+...$$

Каждый член первого ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена второго ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{3} \quad .... \quad \frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$$

А ряд второй расходится, следовательно расходится и первый. Ответ: ряд расходится

- Предельный признак сравнения.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - ряды с положительными членами,

Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения одинаковых по номеру членов рядов

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} \qquad \left(0 < l < +\infty\right)$$

то эти ряды одновременно сходятся или расходятся.

Если члены u_n *и* v_n *двух положительных рядов являются бесконечно малыми одного порядка, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 3

Исследовать на сходимость ряд

$$\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{\pi}{n}+\ldots$$

$$\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} + \ldots + \sin\frac{\pi}{n} + \ldots$$

Решение

Сравним его с гармоническим рядом:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots. + \frac{1}{n} + \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cdot\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi \neq 0$$

Так как гармонический ряд расходится, то и первый ряд тоже расходится. Ответ: ряд расходится

В отличие от признаков сравнения, где всё зависит от догадки и запаса известных сходящихся и расходящихся рядов, признак Даламбера позволяет часто решить вопрос о сходимости ряда, проделав лишь некоторые операции над самим рядом.

- Признак Даламбера (1717-1783 фр. математик)

Если в ряде с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

выполняется условие $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell}$

то данный ряд сходится, если $\ell<1$;

ряд расходится, если $\ell>1$.

Замечание:

1) Если же $\ell=1$, то ряд может быть как сходящийся, так и расходящийся. В этом случае для решения вопроса о сходимости ряда необходимо применить какой-либо другой признак или дополнительные исследования.

2) Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n.

Пример 4

Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots .+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

Решение

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n} \qquad u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2n-1} = \frac{2n+1}{2(2n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Ответ: ряд сходится

Пример 5

Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+....+\frac{n!}{10^n}+...$$

Решение

$$u_n = \frac{n!}{10^n} \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty > 1$$

Ответ: ряд расходится

Пример 6

Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+....+\frac{n}{2n-1}+...$$

Решение

$$u_n = \frac{n}{2n-1} \qquad u_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{n} = \frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = 1$$

Признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Но т.к

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

то не выполняется необходимое условие сходимости ряда, следовательно ряд расходится.

Ответ: ряд расходится

Пример 7

Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.+\frac{1}{n\left(n+1\right)}+\ldots$$

Решение

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{1} = \frac{n}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1$$

Признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим необходимый признак сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

то есть ряд может быть сходящимся или расходящимся. Установим сходимость другим путем:

Заметим, что $$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Данный ряд можем записать в виде:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}+\ldots$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$ *-частичная сумма*

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

То есть ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 8

Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots.+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Решение

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}}} = 1$$

Признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Установим сходимость другим путем. Проверим признак сравнения (см. пример 2)

Ответ: ряд расходится

- Признак Коши (Cauchy 1789-1857)

Пусть дан ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ существует и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \ell$

Тогда данный ряд сходится, если $\ell<1$;

ряд расходится, если $\ell>1$.

В случае, когда $\ell=1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 9

Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

Ответ: ряд сходится

Пример 10

Исследовать на сходимость ряд

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}+\ldots$$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

Признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим необходимое условие сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$$

Ответ: ряд расходится

• Интегральный признак

Пусть дан ряд с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

причем $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$

и *f(x)*- такая непрерывная, монотонно убывающая функция, что $f(n)=u_n$.

Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Пример 11

Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

Эта функция непрерывная, монотонно убывает и $f(n) = \dfrac{1}{n}$

Следовательно, условия интегрального признака выполнены. Имеем

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M \to \infty} \int_{1}^{M} \frac{dx}{x} = \lim_{M \to \infty} \left(\ln|x| \right) \Big|_{1}^{M} = \lim_{M \to \infty} \left(\ln M - \ln 1 \right) =$$

$$= \lim_{M \to \infty} \ln M = \infty$$

Ответ: ряд расходится

Пример 12

Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

Решение

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Эта функция непрерывная, монотонно убывает и $f(n) = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
Следовательно, условия интегрального признака
выполнены. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{M \to \infty} \int_1^M x^{-\frac{3}{2}} dx = -2 \lim_{M \to \infty} \left. \frac{1}{\sqrt{x}} \right|_1^M =$$

$$= -2 \lim_{M \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} - 1 \right) = 2$$

Ответ: ряд сходится

Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots,$$

$$p > 0, \quad p \in R$$

Интегральный признак целесообразно применять для исследования сходимости обобщенного гармонического ряда. Признаки Коши и Даламбера ответа о сходимости не дают.

$$f(x)=\frac{1}{x^p}$$

Эта функция непрерывная, монотонно убывает и $f(n)=\frac{1}{n^p}$
Следовательно, условия интегрального признака выполнены. Имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1 \quad \textit{ряд сходится}\\ \infty, & p<1 \quad \textit{ряд расходится}\end{cases}$$

При p=1 имеем гармонический ряд. (см. пример 11)

Пример 13

Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2^{\frac{5}{4}}}+\frac{1}{3^{\frac{5}{4}}}+\ldots+\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}+\ldots$$

Решение

Ряд сходится, т.к. $p=\frac{5}{4}>1$

Ответ: ряд сходится

Пример 14

Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Решение

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Ряд расходится, т.к. $p=\frac{1}{2}<1$

Ответ: ряд расходится

Рассмотренные признаки сходимости (есть и другие) рядов с положительными членами позволяют судить о сходимости практически любого положительного ряда.

Необходимые навыки приобретаются на практике!