Функциональные и степенные ряды. Ряды Тейлора, Маклорена, Фурье.

Функциональные ряды.

Ряд, членами которого являются функции от x, называется *функциональным:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (62.1)$$

Придавая x определенное значение x_0, мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ ..+ u_n(x_0) + \ldots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется ***точкой сходимости*** ряда (62.1); если же ряд расходится — ***точкой расходимости*** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

Функциональные ряды.

В области сходимости функционального ряда его сумма является некоторой функцией от x: $S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad \text{где} \quad S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \ —$$

частичная сумма ряда.

Функциональные ряды.

О п р е д е л е н и е 6. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***сходящимся поточечно*** к функции $S(x)$ на множестве X, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $S(x)$ на X, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \ \forall x \in X .$$

Функция $S(x)$ называется ***суммой*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Очевидно, что для сходящегося на множестве X ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ его остаток

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) \to 0 \ \forall x \in X \text{ при } n \to \infty .$$

Функциональные ряды.

Определение 7. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется ***абсолютно сходящимся*** на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Следует упомянуть :

- Равномерная сходимость
- Критерий Коши равномерной сходимости
- Признак Вейерштрасса
- Признак Дирихле
- Признак Абеля

Функциональные ряды.

Пример 62.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

❍ Решение: Данный ряд является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$. Следовательно, этот ряд сходится при $|x| < 1$, т. е. при всех $x \in (-1; 1)$; сумма ряда равна $\dfrac{1}{1-x}$:

$$S(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{при} \quad |x| < 1.}$$

●

Функциональные ряды.

Пример 62.2. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

○ Решение: Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots \tag{62.2}$$

Так как при любом $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение $\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд с общим членом $\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщенный гармонический ряд, $p = 2 > 1$, см. п. 60.4), то по признаку сравнения ряд (62.2) сходится при $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится при всех $x \in \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$. ●

Степенные ряды.

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый ***степенной ряд***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (62.3)$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда*** (62.3), $x \in \mathbb{R}$ — действительная переменная.

Ряд (62.3) расположен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, т. е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (62.4)$$

где x_0 — некоторое постоянное число.

Ряд (62.4) легко приводится к виду (62.3), если положить $x - x_0 = z$.

Степенные ряды.

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x, т. е. так называемый ***степенной ряд***:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (62.3)$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда*** (62.3), $x \in \mathbb{R}$ — действительная переменная.

Ряд (62.3) расположен по степеням x. Рассматривают также степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$, т. е. ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \ldots, \qquad (62.4)$$

где x_0 — некоторое постоянное число.

Ряд (62.4) легко приводится к виду (62.3), если положить $x - x_0 = z$.

Степенные ряды.

Выясним вопрос о сходимости степенного ряда (62.3).

Область сходимости степенного ряда (62.3) содержит по крайней мере одну точку: $x = 0$ (ряд (62.4) сходится в точке $x = x_0$).

63.1. Теорема Н. Абеля

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из следующей теоремы.

Теорема 63.1 (Абель). Если степенной ряд (62.3) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

Степенные ряды.

❏ По условию ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Отсюда следует, что величина $a_n x_0^n$ ограничена, т. е. найдется такое число $M > 0$, что для всех n выполняется неравенство $|a_n x_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $|x| < |x_0|$, тогда величина $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \leqslant M \cdot q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. модуль каждого члена ряда (62.3) не превосходит соответствующего члена сходящегося ($q < 1$) ряда геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при $|x| < |x_0|$ ряд (62.3) абсолютно сходящийся. ■

Степенные ряды.

Следствие 63.1. Если ряд (62.3) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

❑ Действительно, если допустить сходимость ряда в точке x_2, для которой $|x_2| > |x_1|$, то по теореме Абеля ряд сходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$, и, в частности, в точке x_1, что противоречит условию. ■

Степенные ряды.

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (62.3) расходится.

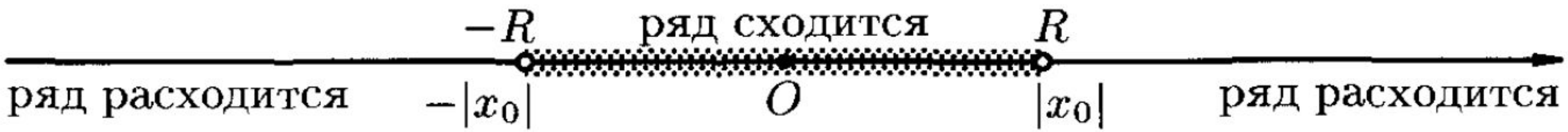

Рис. 259

Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ и называют ***интервалом сходимости*** степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, т. е. $R > 0$ — это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (62.3) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится (см. рис. 259).

Степенные ряды.

В частности, когда ряд (62.3) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (62.3) сходится при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ (т. е. во всех точках числовой оси), то считаем, что $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (т. е. при $x = R$ и при $x = -R$) сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (62.3) можно поступить следующим образом. Составим ряд из модулей членов данного степенного ряда

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

и применим к нему признак Даламбера.

дел

Степенные ряды.

Таким образом, для ряда (62.3) радиус абсолютной сходимости

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.} \tag{63.1}$$

Аналогично, воспользовавшись радикальным признаком Коши, можно установить, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{63.2}$$

Степенные ряды.

1. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, то можно убедиться, что ряд (62.3) абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

2. Интервал сходимости степенного ряда (62.4) находят из неравенства $|x - x_0| < R$; имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, т. е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости (формулы (63.1) и (63.2)), а непосредственно применяя признак Даламбера (или Коши) для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Степенные ряды.

Пример 63.1. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Решение: Воспользуемся формулой (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходится на всей числовой оси.

Степенные ряды.

Пример 63.2. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

◑ Решение: Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}, \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot|x^{2n-1}|} = |x^2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем ряд $+1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ — это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1; 1]$. ●

Степенные ряды.

Пример 63.3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}.$$

❍ Решение: Находим радиус сходимости ряда по формуле (63.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2.$$

Степенные ряды.

Следовательно, ряд сходится при $-2 < x + 2 < 2$, т. е. при $-4 < x < 0$.

При $x = -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуотрезок $[-4; 0)$. ●

Степенные ряды.

Д/З

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$.

Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$.

При каких значениях x ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ сходится?

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$$

Ряды Тейлора и Маклорена

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.} \qquad (64.2)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим разложение функции по степеням x в так называемый *ряд Маклорена*:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.} \qquad (64.3)$$

Д/З

Найти ряд Маклорена для функции $\cos^2 x$.

Ряды Тейлора и Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.4}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.5}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty; \infty), \tag{64.6}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geqslant 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leqslant -1, \end{cases} \tag{64.7}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad x \in (-1; 1), \tag{64.8}$$

Ряды Тейлора и Маклорена

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad x \in (-1; 1], \quad (64.9)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ldots, \quad x \in [-1; 1], \quad (64.10)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \quad (64.11)$$

$$\cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1; 1], \quad (64.12)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

$$(64.14)$$

Ряды Тейлора и Маклорена

Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ в точке $x = 1$.

Решение.

Вычислим производные:

$$f'(x) = 6x - 6,\;\; f''(x) = 6,\;\; f'''(x) = 0.$$

Видно, что $f^{(n)}(x) = 0$ для всех $n \geq 3$. Для $x = 1$ получаем значения:

$$f(1) = 2,\;\; f'(1) = 0,\;\; f''(1) = 6.$$

Следовательно, разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(1)\,\frac{(x-1)^n}{n!} = 2 + \frac{6(x-1)^2}{2!} = 2 + 3(x-1)^2.$$

Некоторые приложения степенных рядов

Пример 65.1. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

❍ Решение: Согласно формуле (64.5),

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Стоящий справа ряд сходится абсолютно (проверить самостоятельно). Так как $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008(3) > 0{,}001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}842.$$

Допускаемая при этом ошибка меньше, чем первый отброшенный член (т. е. меньше, чем 0,0002). Вычисленное микрокалькулятором значение $\sin 1$ примерно равно 0,84147. ●

Некоторые приложения степенных рядов (приближенное выч. ф-ций)

Пример 65.1. Найти $\sin 1$ с точностью до 0,001.

❍ Решение: Согласно формуле (64.5),

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Стоящий справа ряд сходится абсолютно (проверить самостоятельно). Так как $\frac{1}{5!} \approx 0{,}008(3) > 0{,}001$, а $\frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001$, то для нахождения $\sin 1$ с точностью до 0,001 достаточно первых трех слагаемых:

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}842.$$

Допускаемая при этом ошибка меньше, чем первый отброшенный член (т. е. меньше, чем 0,0002). Вычисленное микрокалькулятором значение $\sin 1$ примерно равно 0,84147. ●

Некоторые приложения степенных рядов (приближенное интегр.)

Пример 65.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

○ Решение: Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$ в формуле (64.4):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty). \tag{65.1}$$

Интегрируя обе части равенства (65.1) на отрезке $\left[0; \frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty; \infty)$, получим:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

Некоторые приложения степенных рядов (приближенное интегр.)

$$= \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots \right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = 0{,}0052\ldots >$ $> 0{,}001$, а $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

●

65.3. Приближенное решение дифференциальных уравнений

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Ряды Фурье

Определение ряда Фурье

Говорят, что функция $f(x)$ имеет период P, если $f(x+P) = f(x)$ для всех значений x. Пусть период функции $f(x)$ равен 2π. В этом случае достаточно рассмотреть поведение функции в интервале $[-\pi, \pi]$.

1. Предположим, что функция $f(x)$ с периодом 2π абсолютно интегрируема в интервале $[-\pi, \pi]$. При этом является конечным так называемый *интеграл Дирихле*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty;$$

2. Предположим также, что функция $f(x)$ является однозначной, кусочно-непрерывной (то есть имеет конечное число точек разрыва) и кусочно-монотонной (имеет конечное число максимумов и минимумов).

Ряды Фурье

Ряд Фурье функции $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\},$$

где *коэффициенты Фурье* a_0, a_n и b_n определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$