Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«СОШ №4 г . Оса»

Методы решения тригонометрических уравнений.

Выполнила ученица 103 группы Казакова Настя

Г. Оса, 2017 г

Методы решения тригонометрических уравнений

* Приведение к простейшим тригонометрическим уравнениям
* Замена переменной
* Метод понижения порядка уравнения
* Однородные уравнения
* Метод преобразования уравнения с помощью тригонометрических формул.

Решение тригонометрического уравнения.

Чтобы решить тригонометрическое уравнение, надо попытаться:

* Привести все функции, входящие в уравнение, к « одинаковым углам»
* Привести уравнение к «одинаковым функциям»
* Разложить левую часть уравнения на множители

1. Приведение к простейшим тригонометрическим уравнениям

* Выразить тригонометрическую функцию через известные компоненты
* Найти аргумент функции по формулам:

  $\cos x = a;\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$

  $\sin x = a;\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

  $\mathrm{tg}\, x = a;\ x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z.$

  $\mathrm{ctg}\, x = a;\ x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z.$

* Найти неизвестную переменную

Пример решения методом приведения к простейшим тригонометрическим уравнениям.

- $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$
- *Решение.*

1) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}/2.$

2) $3x - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$

$3x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

3) $3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pm\frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z;$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in Z.$

2. Замена переменной

* Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций
* Обозначить полученную функцию переменной t (если необходимо, ввести ограничения на t)
* Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.
* Сделать обратную замену
* Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

Пример решения методом замены переменной

* $2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 5\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 5 = 0.$
* *Решение.*

1) $2\left(1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 5\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 5 = 0;$

$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 5\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0.$

2) *Пусть* $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = t$, *где* $|t| \le 1.$

3) $2t^2 + 5t + 3 = 0;$

$t = 1$ *или* $t = -\frac{3}{2}$, *не удовлетворяет условию* $|t| \le 1.$

4) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1.$

5) $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$

$x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z.$

3. Метод понижения порядка уравнения

- Заменить данное уравнение линейным, используя для этого формулы понижения степени

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x);$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x);$

$\mathrm{tg}^2\, x = (1 - \cos 2x) \,/\, (1 + \cos 2x).$

- Решить полученное уравнение с помощью 1 и 2 методов.

Пример решения методом понижения порядка уравнения.

- $\cos 2x + \cos^2 x = 5/4.$
- *Решение.*

$$1)\ \cos 2x + \frac{1}{2}\cdot(1+\cos 2x) = \frac{5}{4}.$$

$$2)\ \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 2x = \frac{5}{4};$$

$$\frac{3}{2}\cdot\cos 2x = \frac{3}{4};$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Однородные уравнения

* *Привести данное уравнение к виду*

  а) $a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение первой степени); или к виду:

  б) $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение второй степени).
* *Разделить обе части уравнения на*

  а) $\cos x \neq 0$;

  б) $\cos^2 x \neq 0$; и получить уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

  а) $a \operatorname{tg} x + b = 0$;

  б) $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{arctg} x + c = 0$.
* *Решить уравнение известными способами*

Пример решения методом однородного уравнения

- $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4 = 0.$
- *Решение.*

  1) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$

  $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0;$

  $\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0/\cos^2 x \neq 0.$

  2) $tg^2 x + 3tg\, x - 4 = 0.$

  3) *Пусть* $tg\, x = t$, *тогда* $t^2 + 3t - 4 = 0;$

  $t = 1$ *или* $t = -4$, *значит*

  $tg\, x = 1$ *или* $tg\, x = -4.$

Из первого уравнения $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; *из второго уравнения* $x = -arctg\, 4 + \pi k,\ k \in Z.$

- *Ответ:* $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ x = -arctg\, 4 + \pi k,\ k \in Z.$

Метод преобразования уравнения с помощью тригонометрических формул

* *Используя всевозможные тригонометрические формулы, привести данное уравнение к уравнению, решаемому методами I, II, III, IV.*
* *Решить полученное уравнение известными методами.*

Пример решения методом преобразования уравнения с помощью тригонометрических формул

- *sin x + sin 2x + sin 3x = 0.*
- Решение.

1) (sin x + sin 3x) + sin 2x = 0;

2sin 2x · cos x + sin 2x = 0.

2) sin 2x · (2cos x + 1) = 0;

sin 2x = 0 или 2cos x + 1 = 0;

Из первого уравнения $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n Є Z; из второго уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$

Имеем $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, n Є Z; из второго уравнения $x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi k$, k Є Z.

В итоге $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, n Є Z; $x = \pm A = \pi r^2 \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k Є Z.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, n Є Z; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k Є Z.