

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН



# ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН

В практической жизни человек всюду имеет дело с измерениями. На каждом шагу встречаются и известны с незапамятных времен измерения таких величин, как длина, объем, вес, время и другие. Измерения являются одним из важнейших путей познания природы человеком. Они дают количественную характеристику окружающего мира, раскрывая человеку действующие в природе закономерности.

Математика, механика, физика стали именоваться точными науками потому, что благодаря измерениям они получили возможность устанавливать точные количественные соотношения, выражающие объективные законы природы. Д.И.Менделеев выразил значение измерений для науки следующим образом: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немислима без меры». Все отрасли техники – от строительной механики и машиностроения до ядерной энергетики – не могли бы существовать без развернутой системы измерений, определяющих как все технологические процессы, контроль и управление ими, так и свойства и качество выпускаемой продукции. Особенно возросла роль измерений в наш век широкого внедрения новой техники, развития электроники, автоматизации, атомной энергетики, космонавтики. Высокая точность управления полетами космических аппаратов достигнута благодаря современным совершенным средствам измерений, устанавливаемым как на самих космических аппаратах, так и в измерительно-управляющих центрах.

Во всех случаях проведения измерений, независимо от измеряемой величины, метода и средства измерений, есть общее, что составляет

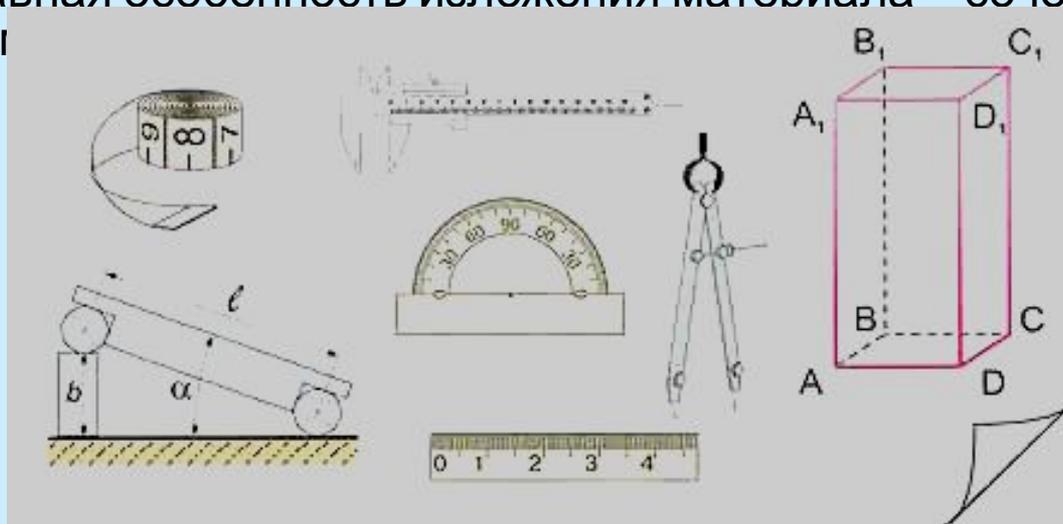
# РОЛЬ И МЕСТО ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В ОБРАЗОВАНИИ ШКОЛЬНИКОВ

Измерение -- процесс достаточно произвольный. В популярном детском мультфильме длину удава измеряют в попугаях. В повседневном быту тоже допустимо забыть о метрах и измерить длину или площадь в толщине пальцев или ширине ладони, в горстях песка или мешках картофеля. В прошлом вполне обходились частями человеческого тела и отношениями между ними, откуда и пошли все сажени, локти, шаги, футы, дюймы и т.п. Лишь на известном этапе развития науки и техники были введены эталоны, сделавшие устаревшими прежние способы измерений.

В далеком прошлом, на заре математики, практические потребности пастушества и земледелия вывели на первое место измерение длин и расстояний (а не, скажем, объемов и емкостей). Развитие строительной и землемерной практики обусловили переход к измерению углов и поверхностей. Абстрактная геометрическая наука, отражая логику развития практики и производства, двигалась от изучения линии через поверхность -- к объему. Одно измерение прибавлялось к другому, в результате в классической Евклидовой геометрии объем оказался трехмерным (и соответственно плоскость -- двухмерной, а линия -- одномерной).

# РОЛЬ И МЕСТО ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В ОБРАЗОВАНИИ ШКОЛЬНИКОВ

Измерение геометрических величин – одна из основных линий школьного курса геометрии, которая знакомит учащихся с важными идеями, понятиями и методами метрической геометрии. Измерение геометрических величин связано с идеей аксиоматического метода, теорией действительного числа, методами математического анализа. Знакомство учащихся с различными формулами расширяет возможности применения в школьном курсе геометрии аналитического метода. Главная особенность изложения материала – сочетание различных

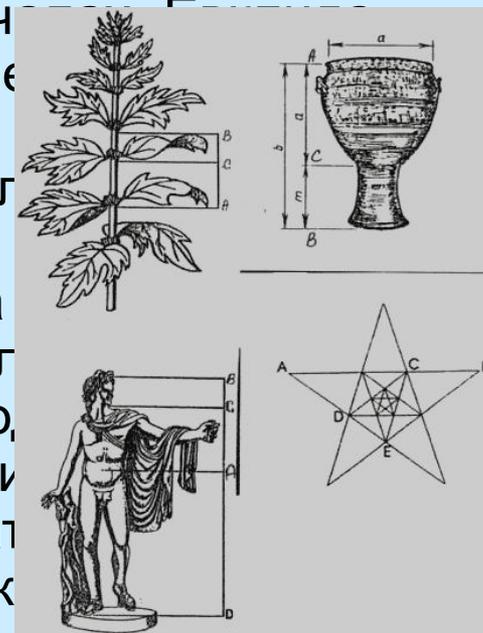


# РОЛЬ И МЕСТО ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В ОБРАЗОВАНИИ ШКОЛЬНИКОВ

Величина – одно из основных понятий математики, возникшее в древности и подвергшееся в процессе развития математики ряду обобщений.

Общее понятие величины – непосредственное обобщение конкретных величин (длины, площади, объема, массы и т.д.), свойства которых сформулированы еще в «начальных» науках. Впоследствии эта величина получила название «положительной скалярной величины», чтобы отличить ее от более общих понятий величин (векторной и др.).

Интуитивно мы представляем себе, что величина может быть больше или меньше, две однородные величины складываются, ее можно измерить, понимая под измерением сравнение данной величины с однородной, принятой за единицу измерения. Однако сформулировать это понятие в математических терминах не так просто.



# ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИЗУЧЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

## I. Пропедевтика

*I.1.* Начальная школа: примеры величин (длина, площадь, масса, стоимость); единицы их измерения; примеры зависимостей между величинами (путем, скоростью и временем; площадью и длинами сторон прямоугольника и т. д.);

*I.2.* 5-6 классы: примеры величин (длина, площадь, объем, градусная мера угла); единицы измерения длин, площадей, объемов и углов; масса тел; площадь прямоугольника, прямоугольного треугольника, объем прямоугольного параллелепипеда, формулы длины окружности и площади круга.

*II.* Понятие о площади, основные свойства площади, площадь прямоугольника, треугольника, параллелограмма, трапеции, отношение площадей подобных фигур, площадь круга и его частей, решение задач на вычисление неизвестных длин, углов и площадей – 7-9 классы.

*III.* Измерение углов. Радианная мера угла. Тригонометрия.

*IV.* Понятие об объеме, основные свойства объема, объемы многоугольников: прямоугольного параллелепипеда, призмы,

# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОПЕДЕВТИКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

Понятие величины – одно из фундаментальных понятий математики, физики, химии и других наук. При изучении раздела «Измерение величин» в школе первая ступень обучения является пропедевтическим этапом, на котором, опираясь на опыт ребёнка, формируется интуитивное представление о величинах и их практическом применении.

Данный раздел «Измерение величин» является одним из наиболее трудных для осмысления. Ученикам необходимо осознать отличие понятий «величина» (объективная реальность) и «мера величины» (количественное значение величины, которое зависит от единицы измерения), правильно переводить одни единицы измерения в другие.

В начальной школе при решении задач нередко используется количество в апельсинах, попугаях или снеговиках, при этом как сокращать новое слово и забываться измеряется в «штуках».



# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОЦЕДУРКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

В учебнике математики Э.И. Александровой (2 книги) (система Д.Б. Эльконина - В.В. Давыдова) по разделу программы «Измерение величин» рассматривают следующие величины: длина, площадь, объём, скорость, время, цена, количество, стоимость, градусная мера угла, масса. Основной список алгоритмов, рассматриваемых в учебнике можно представить таким образом: алгоритм записи числа в двоичной системе счисления; алгоритм арифметических действий с именованными числами; нахождение периметра фигур (2 способа); алгоритм нахождения площади фигуры (при помощи палетки, по формуле, разбиением на части); составление схем решения задач. Список соответствий: перевод чисел в двоичную систему счисления; перевод одних мер измерения величин в другие; подстановка значений букв в выражения; задания на узнавание объектов; переводы типа рисунок – формула, формула – рисунок, формула – текст. Приложения представлены заданиями на сравнение, измерение величин; применение формул (периметр треугольника, четырёхугольника, многоугольника; площадь квадрата, прямоугольника, треугольника; объём куба, прямоугольного параллелепипеда (2 способа), площадь поверхности тела); заданиями на изготовление фигур различных форм, а также развёрток тел; текстовыми задачами на движение, движение по реке и др. Задания на логику и доказательства представлены упражнениями на анализ периметров различных фигур; требованиями обосновать мнение по вопросу, составить краткое условие задачи, восстановить пропущенные цифры. В данном учебнике задания на развитие интуиции представлены задачами на смекалку, задачами со спичками, а также магическими квадратами. Комбинаторные задания: представить несколько решений задачи (один ответ), либо несколько способов решения (много ответов),

# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОПЕДЕВТИКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

В учебнике математики И.И. Аргинской и Е.И. Ивановской (система академика Л.В. Занкова) по разделу «Измерение величин» рассматриваются: длина, площадь, объём, скорость, время, цена, количество, стоимость, температура, масса. Большая часть упражнений данного учебника по рассматриваемому разделу представлена в прикладном стиле. В основной список алгоритмов входят: построение треугольника по: а) двум углам и стороне, б) углу и двум сторонам, в) трём сторонам; алгоритм вычисления среднего арифметического; выполнение арифметических действий с величинами, составление алгоритма решения задачи, а также выполнение диктанта по клеточкам. Список соответствий, рассматриваемых авторами учебника: перевод одних мер измерения величин в другие; подстановка значений букв в выражения; переводы типа: рисунок – текст, текст – рисунок, текст – текст. Приложения представлены заданиями на приближённые вычисления и округление чисел, а также использование формул (площадь прямоугольного треугольника, прямоугольника, объём прямоугольной и произвольной прямой призмы). Задания на логику и доказательства включают в себя упражнения на сравнение (анализ) задач, чертежей, таблиц мер, где требуется найти сходства и отличия. Они также представлены вопросами типа: «Верно ли утверждение?», требованием доказать надёжность способа и объяснить свой выбор. Для развития интуиции применяются задания на смекалку. Комбинаторный стиль представлен заданиями на рациональный перебор вариантов, классификацию и сортировку объектов, а также требованиями авторов найти несколько решений задачи. В учебнике есть задания, включающие элементы исследования по данному разделу. Это задачи с лишними или, наоборот, недостающими данными, а также упражнения с требованием авторов

# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОПЕДЕВТИКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

В учебнике математики Т.Е. Демидовой и др. (3 части) (образовательная система «Школа 2100») по разделу «Измерение величин» рассматриваются: длина, площадь, объём, скорость, время, цена, количество, стоимость, масса. Основной список алгоритмов, рассматриваемых в учебнике: алгоритм нахождения площади фигуры (при помощи палетки, по формуле); алгоритм округления чисел; алгоритм нахождения объёма куба; алгоритм перехода от больших единиц измерения величин к меньшим и наоборот, а также используются арифметические действия с именованными числами. Соответствия представлены заданиями на перевод одних мер измерения величин в другие; показаны переводы типа рисунок – текст, текст – рисунок, текст – текст, рисунок – рисунок. Приложения включают в себя текстовые задачи; задания на сравнение, измерение величин; задания на нахождение приближённых значений величин, прикидку результата. Есть в учебнике упражнения, при решении которых необходимо использовать логику, доказательства, рассуждения. Это – задачи на принцип Дирихле, а также задания, которые в основном нацелены на анализ схем к задачам, работу с высказываниями. Для развития интуиции применяются задачи на смекалку, а также задания типа «одним росчерком». Комбинаторные задания представлены упражнениями на классификацию и сортировку объектов, на рациональный перебор вариантов решений, задачами на разрезание, а также требованиями авторов решить задачи несколькими способами. Задания исследовательского характера представлены проектами: «Модель машины времени», «Российская ярмарка», «Страничка из энциклопедии». Авторы требуют поиска информации в математических справочниках, энциклопедиях и других учебниках, проводить опросы на различные темы в классе, придумывать задачи. В качестве игр

# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОПЕДЕВТИКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

В учебнике математики Н.Б. Истоминой (традиционная система обучения) на раздел программы «Измерение величин» рассматриваются: длина, площадь, объём, скорость, время, цена, количество, стоимость, масса. В основной список алгоритмов раздела входят следующие: арифметические действия с величинами, составление алгоритма решения задачи. Автор данного учебника рассматривает следующие соответствия: перевод из одних мер измерения величин в другие, подстановка значений букв в выражения; показаны переводы типа формула – текст, текст – текст. Сравнительно большое количество заданий представлено в данном учебнике на приложения. Это, в основном, текстовые задачи, задания на сравнение величин, а также упражнения на нахождение периметра и площади прямоугольника. Дедуктивный стиль представлен заданиями на поиск закономерностей, правил записи рядов, а также автор требует сравнить задачи. Для развития интуиции автор предлагает задания типа: «Догадайся». Комбинаторный анализ представлен упражнениями на классификацию и сортировку объектов, а также заданиями на поиск различных вариантов решения задачи. В качестве заданий исследовательского характера представлены только задачи с недостающими данными.

# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОПЕДЕВТИКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

В учебнике математики М.И. Моро и др. (2 части) («Школа России») по разделу «Измерение величин» рассматриваются величины: длина, площадь, скорость, время, цена, количество, стоимость, масса. Алгоритмический стиль представлен следующими алгоритмами: построение треугольника по углу и двум сторонам, прямоугольника на нелинованной бумаге, четырёх прямых углов; арифметические действия с величинами; алгоритм вычисления площади фигур при помощи палетки; составление выражения для решения задачи; алгоритм вычисления среднего арифметического. Список соответствий: перевод одних мер измерения величин в другие; упражнения на узнавание объектов; переводы типа: рисунок – текст, текст – текст, формула – текст, текст – рисунок. Большая часть заданий рассматриваемого учебника относится к прикладному стилю. Он представлен заданиями на сравнение значений величин, применение формул для вычисления площади прямоугольника, периметра треугольника и многоугольника, а также текстовыми задачами. В учебнике имеются упражнения, при решении которых необходимо использовать логику, доказательства, рассуждения. Это задания типа: «Верны ли равенства?», «Верны ли неравенства?», «Докажи, что:...». Для развития интуиции авторы используют задания со спичками и задачи на смекалку. Комбинаторный анализ представлен упражнениями на перечисление элементов, сортировку значений величин, рациональный перебор вариантов, задачами на разрезание, а также заданиями на поиск различных способов решения задачи, наибольшего числа объектов с заданным свойством. Авторы предлагают учащимся проводить исследование своей занятости, своего времени, а также проверять сделанные предположения. Данный стиль представлен заданиями на составление задачи, обратной данной, или по предоставленным данным.

# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОПЕДЕВТИКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

В учебнике математики Л.Г. Петерсон (3 части) дано большое количество заданий развивающего характера, заданий на переводы, а также много прикладных задач. Автор рассматривает следующие величины: длина, площадь, объём, скорость, время, цена, количество, стоимость, масса, градусная мера угла. В основном списке алгоритмов можно назвать: алгоритм нахождения объёма тела, составленного из кубиков; составление выражения; нахождение значения выражения по блок-схеме; арифметические действия с именованными числами. Основные типы соответствий, используемые в данном разделе: перевод одних мер измерения величин в другие; подстановка значений букв в выражения; упражнения на узнавание объектов; столбчатые и линейные диаграммы; переводы типа: формула – текст, рисунок – текст, текст – рисунок, текст – текст. В учебнике дано большое количество заданий прикладного характера. Они представлены текстовыми задачами; практическими работами на измерение площади прямоугольника и длины отрезка мерками, приближёнными вычислениями, округлением чисел до определённого разряда, вычислением по формуле (периметр фигур, площадь прямоугольника, прямоугольного треугольника, объём прямоугольного параллелепипеда), а также сравнением значений величин. Задания на логику и доказательства представлены упражнениями на поиск зависимости между переменными, общего и отличного в задачах, заданиями на поиск верных высказываний и типа «Докажи, что ...». Интуитивный стиль представлен задачами на смекалку, задачами на разрезание и со спичками. Комбинаторный анализ: классификация и сортировка объектов, выполнение упражнений на перебор вариантов решения. Исследовательский стиль представлен задачами с недостающими данными, исследование

# ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПРОПЕДЕВТИКА (НАЧАЛЬНАЯ ШКОЛА)

В учебнике математики В.Н. Рудницкой и Т.В. Юдачевой («Начальная школа XXI века») дано большое количество заданий алгоритмического характера, заданий на переводы, а также много прикладных задач. Авторы рассматривают следующие величины: длина, площадь, объём, скорость, время, цена, количество, стоимость, масса, градусная мера угла. Алгоритмический стиль представлен алгоритмами: вычисление площади прямоугольника и объёма прямоугольного параллелепипеда (2 способа); построение треугольника, равного данному; построение отрезка и угла, равных данному; деление отрезка на 2, 4, 8 равных частей; арифметические действия с именованными числами; решение задач приёмом «обратный ход». В списке соответствий можно указать: перевод одних мер измерения величин в другие; подстановка значений букв в выражение; переводы типа: рисунок – текст, текст – текст, рисунок – рисунок. Большое количество упражнений на приложения. Это текстовые задачи; задания на вычисление площади поверхности, периметра, объёма; упражнения на измерение времени, углов, отрезков, а также задания на построение фигур (отрезок, угол, прямоугольник, квадрат, круг). Задания на логику и доказательства включают в себя упражнения на анализ выражений, а также работу с логическими высказываниями. Для развития интуиции авторы предлагают задачи со спичками, задачи на смекалку, а также на переливание. Комбинаторный анализ представлен заданиями на сортировку объектов, а также на поиск различных способов решения задачи. Автор требует поиска информации в математических справочниках, энциклопедиях и других источниках информации.

# ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть имеем бесконечное множество  $M$  с введенным в нем отношением  $<$  (меньше) и операцией  $+$  (сложение), которые назовем системой однородных величин, элементы этого множества – однородные величины. Эта система характеризуется свойствами, которые можно принять за аксиомы:

- 1)  $a, b: a < b, a = b, b < a$ , причем имеет место одно из трех соотношений;
- 2)  $a, b, c: a < b, b < c, a < c$  – транзитивность " $<$ ";
- 3)  $a, b, c: a + b = c$  – замкнутость  $M$  относительно сложения;
- 4)  $a, b: a + b = b + a$  – коммутативность;
- 5)  $a, b, c: a + (b + c) = (a + b) + c$  – ассоциативность сложения;
- 6)  $a, b: a + b > a$  – монотонность сложения;
- 7)  $a, b: a > b \Rightarrow \exists !c: b + c = a$  – возможность вычисления:  $a - b = c$ ;
- 8)  $a, n, b: nb = a$  – возможность деления величины на натуральное число  $n$ ;
- 9)  $a, b, n \in \mathbb{N}: a < nb$  – аксиома Архимеда;



# ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

10) Пусть даны две последовательности величин из  $M$ :  $a_1 < a_2 < \dots < \dots$ ; и  $\dots < b_2 < b_1$  причем для любой величины «с» при достаточно большом номере  $n$ :  $b_n - a_n < c$ , т.е. члены последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$  неограниченно приближаются друг к другу. В таком случае существует единственная величина  $x \in M$ , которая больше всех  $a_n$  и меньше всех  $b_n$  – аксиома непрерывности.

Если какую-либо величину  $c \in M$  принять за единицу измерения, то всякая величина системы  $M$  однозначно представима в виде:  $a = qc$ , где  $q$  – положительное действительное число:  $q \in \mathcal{R}_+$  ( $q > 0$ ).

Меру  $a$  при единице измерения  $c$  обозначим через  $m(a)$ , т.е. если  $a = qc$ , то  $m(a) = q$ .

Мера обладает следующими свойствами:

- (1)  $m$  – функция с областью определения  $M$  и областью значения  $\mathcal{R}_+$ , т.е.  $m$  отображает  $M$  на  $\mathcal{R}_+$
- (2) монотонность меры;
- (3) аддитивность меры;
- (4) мера единицы измерения равна 1.

Перечисленные свойства полностью характеризуют меру  $m$ , существует единственная функция:  $M \rightarrow \mathcal{R}_+$  обладающее этими свойствами, а именно мера  $m(a)$  величины  $a$  при единице измерения  $c$ .

Перечисленные свойства общего понятия величины и меры величины находят применения (в явном или не явном виде) при изучении

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: УРОВНИ ИЗУЧЕНИЯ

*Измерение геометрических величин (длины, площади, объема) изучается в школьном курсе дважды, на двух различных уровнях.*

*На первом, экспериментальном, уровне (1-6 классы) учатся измерять длины отрезков, площади простейших плоских фигур и объёмы простейших пространственных тел. На этом уровне не дается определений длины, площади и объема. Цель состоит в том, чтобы создать у учащихся ясные интуитивные понятия.*

*Второй, теоретический, уровень (7-11 классы) характеризуется единым подходом к измерению геометрических величин.*

*Школьная теория измерения геометрических величин должна строиться с сохранением некоторой общей схемы. Это относится прежде всего к определению понятий: «длины», «площадь», «объем». Повторение одной и той же схемы определения способствует обобщению, формированию такого представления: из аналогии вытекает, что эти понятия относятся к одному более общему понятию, связывающему их. Раскрытие этой связи в процессе обучения способствует более глубокому пониманию и прочности знаний. Каждое из трёх понятий определяется как вещественное число, удовлетворяющее условиям, которые характеризуют общие понятия меры множества.*

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА

*Теория измерения длины отрезков может быть построена по такой схеме:*

- *Определение длины отрезка как вещественного числа, удовлетворяющего условиям (1)-(4) понятия меры;*
- *Описание процедуры измерения отрезка;*
- *Установление существования и единственности длины отрезка при данном выборе единицы измерения с использованием аксиомы Архимеда;*
- *Установления существования отрезка, длина которого при данном выборе единицы измерения равна любому, наперед заданному положительному числу (с использованием аксиомы Кантора, геометрического эквивалента аксиомы непрерывности).*

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ

При изучении темы «Площади фигур» используется такая схема:

- простая фигура
- площадь фигуры как величина
- площадь прямоугольника
- площадь треугольника – площадь параллелограмма – площадь трапеции – площадь многоугольника
- площадь подобных фигур
- площадь круга.

Геометрическую фигуру будем называть простой, если ее можно разбить на конечное число плоских треугольников.

Площадь простой фигуры – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

- 1) равные фигуры имеют равные площади;
- 2) если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей;
- 3) площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице;

В таком определении новой величины использован аксиоматический подход. С помощью свойств описана аддитивность площади простой фигуры, определена мера (единица измерения) площади. Первое свойство площади определяет термин «равновеликие». Если фигуры равны, то равны и их площади, однако обратное утверждение не всегда верно.

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ

*При решении различных математических задач часто бывает полезно рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Разберём основные приёмы решения геометрических задач при помощи понятия*

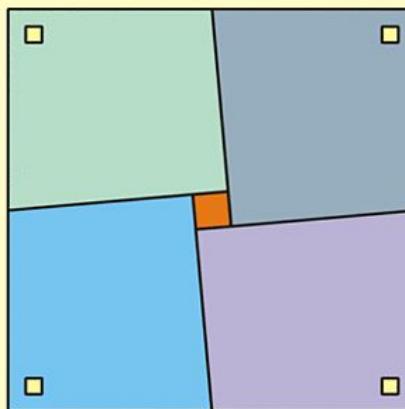
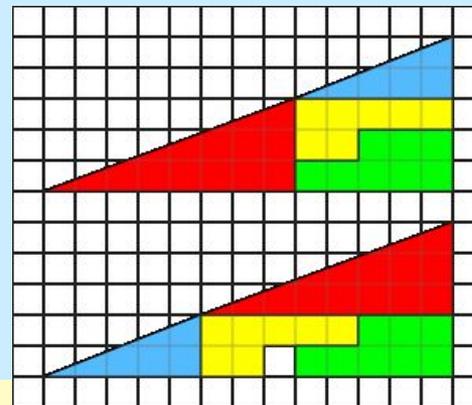
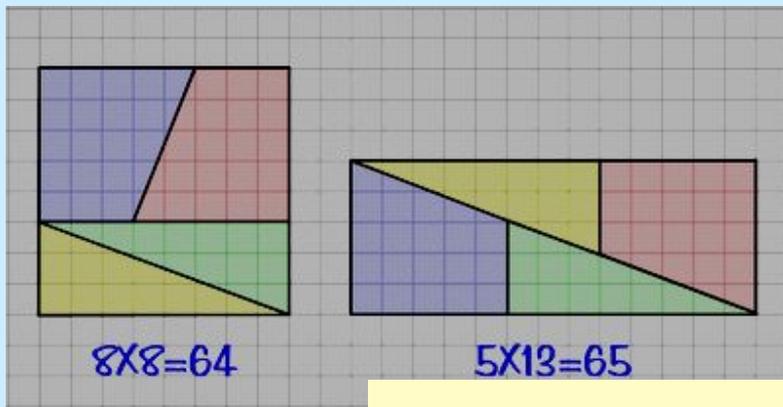
№	Название приёма	Способы реализации	Формы приёма	Компоненты приёма
1	<i>Приём «разрезания и складывания»</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) разбиение данной фигуры на конечное число;</li> <li>2) составление новой фигуры;</li> <li>3) вычисление площади каждой фигуры.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) если фигуру можно разбить на конечное число;</li> <li>2) если можно получить путём складывания фигуры, площадь которой умеем вычислять;</li> <li>3) если фигуру можно разбить на части, вычисление площадей которых не вызывает затруднения.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) оптимальный выбор «разрезания и складывания»;</li> <li>2) переход к новой фигуре, полученной при «складывании»;</li> <li>3) переход к новым фигурам, полученным при «разрезании»;</li> <li>4) нахождение площадей полученных фигур;</li> <li>5) обратный переход к исходной фигуре.</li> </ol>
2	<i>Аддитивность</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) разбиение фигуры;</li> <li>2) вычисление площади каждой части;</li> <li>3) нахождение площади основной фигуры.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>3) если фигуру можно разбить на части, вычисление площадей которых не вызывает затруднения.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) оптимальный выбор разбиения;</li> <li>2) нахождение площадей полученных фигур;</li> <li>3) обратный переход к исходной фигуре.</li> </ol>
3	<i>Эквивалентность отношения длин сторон и площадей</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) построение чертежа по условию задачи;</li> <li>2) составление отношения сторон через площади треугольников;</li> <li>3) нахождение площади треугольников.</li> </ol>	Если треугольник можно разбить на такие треугольники, высоты которых равны.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) оптимальный выбор треугольников;</li> <li>2) нахождение искомого отношения сторон через площади треугольников.</li> </ol>

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ

*При решении различных математических задач часто бывает полезно рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Разберём основные приёмы решения геометрических задач при помощи понятия*

№	Название приёма	Способы реализации	Формы приёма	Компоненты приёма
4	<i>Инвариантность</i>	1) запись формул для исходной фигуры; 2) нахождение неизвестной величины.	1) вычисление площади при помощи различных формул; 2) если можно найти прямую, относительно которой будет проведена симметрия; 3) определение меры поворота.	1) оптимальный выбор формул площади фигуры; 2) нахождение неизвестной величины.
5	<i>Инвариантность отношения перемещений</i>	1а) отображение фигуры относительно прямой; 2б) выполнение поворота фигуры; 2) вычисление полученной площади; 3) нахождение площади исходной путём приравнивания площади полученной фигуры.	1) вычисление площади при помощи различных формул; 2) если можно найти прямую, относительно которой будет проведена симметрия; 3) определение меры поворота.	1) наилучший способ нахождения площади: (а) при помощи «разрезания»; (б) при помощи «складывания»; (в1) с помощью симметрии относительно прямой; (в2) с помощью поворота на угол $+90^\circ$ ; 2) нахождение площади полученной фигуры; 3) обратный переход к исходной фигуре.
7	<i>Неизменяемость величин</i>	1) вычленение двух фигур, имеющих общую сторону и высоту, проведённую к этой стороне; 2) вычисление площади выбранной фигуры; 3) вычисление площади общей части выбранных многоугольников; 4) вычисление площади исходной фигуры.	Вычисление площади при помощи различных формул	Оптимальный выбор: (а) многоугольников; (б) общей части фигур; 2) нахождение площади: (а) выбранной фигуры; (б) общей части; 3) обратный переход к исходной фигуре.

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ



# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ОБЪЁМ ТЕЛА

*В изучении темы «Объемы тел» в курсе стереометрии прослеживается аналогия с темой «Площади фигур» и распределение учебного материала такое:*

- *простое тело*
- *объем тела как величина*
- *объем прямоугольного параллелепипеда – объем треугольной призмы – объем призмы*
- *тела, имеющие равные объемы*
- *объем полной треугольной пирамиды – объем произвольной полной пирамиды – объем усеченной треугольной пирамиды – объем произвольной усеченной пирамиды*
- *объемы подобных тел*
- *объем тел вращения*
- *решение практических задач*.

# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЁМОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Ввести систему координат так, что ось  $Ox$  перпендикулярна основанию геометрического тела.
2. Найти пределы интегрирования  $a$  и  $b$ .
3. Провести сечение плоскостью перпендикулярно оси  $Ox$  через точку с абсциссой  $x$ .

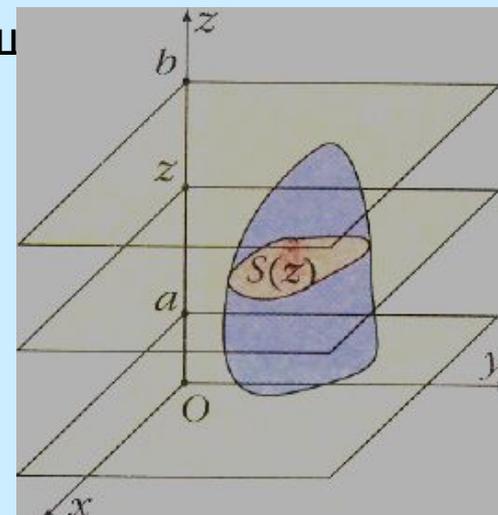
Определить вид сечения, задать формулой его площадь

функцию  $S(x)$ .

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

4. Проверить непрерывность функции  $S(x)$  на  $[a; b]$ .

5.



# ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН: ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ

В соответствии с Кодификатором **ШКОЛЫ** элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов государственной (итоговой) аттестации выпускников IX классов общеобразовательных учреждений 2012 года, перечислены следующие элементы содержания по теме «Измерение», проверяемые заданиями **ГИА**:

1. Единицы измерения длины, площади, объема, массы, времени, скорости

2. Представление зависимости между величинами в виде формул

По теме «Измерение геометрических величин»:

3. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника.

Расстояние от точки до прямой

4. Длина окружности

5. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности

6. Площадь прямоугольника

7. Площадь параллелограмма

8. Площадь трапеции

9. Площадь треугольника

10. Площадь круга, площадь сектора

11. Формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба, шара

# ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ: ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

В соответствии с Кодификатором требований к уровню подготовки выпускников по математике для составления контрольных измерительных материалов **ГИА** выпускников *IX* классов общеобразовательных учреждений *2012* года, учащиеся должны уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, а именно,

- решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

# ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ: ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

В соответствии с Кодификатором элементов содержания к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения в 2011 году **ЕГЭ** по математике включает:

1. Величиной угла и длиной дуги окружности
2. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью
3. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника
4. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными прямыми, параллельными плоскостями
5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора
6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
7. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

# ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ: ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ОБЯЗАТЕЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

В соответствии с Кодификатором требований к уровню подготовки выпускников по математике для составления контрольных измерительных материалов **ЕГЭ** выпускников *XI* классов общеобразовательных учреждений *2011* года, учащиеся должны уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами, а именно,

- решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей);
- решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы;
- решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин